ANALIZA FUNKCJONALNA 2

LISTA ZADAŃ 3

11.04.2016

1. Niech $B \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, gdzie $\mathbb{H}$ jest zespoloną przestrzenią Hilberta spełnia $0 \leq B \leq I$. Wykaż, że $\|B\| \leq 1$ i $0 \leq B - B^2 \leq I$.
2. Kontynuując poprzednie zadanie, utwórzmy ciąg operatorów
$$B_1 = B, \qquad B_{n+1} = B_n - B_n^2.$$
   (a) Udowodnij, że $0 \leq B_n \leq 1$.
   (b) Udowodnij, że jeżeli $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ komutuje z B to komutuje z każdym B_n.
   (c) Udowodnij, że $B_1^2 + B_2^2 + \cdots + B_n^2 = B_1 - B_{n+1} \leq B_1 \leq 1$.
   (d) Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbb{H}$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} \|B_n x\| = 0$
   (e) Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbb{H}$ zachodzi $\sum_{n=1}^{\infty} B_n x = Bx$
3. Udowodnij, że jeżeli $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ spełniają $A \geq 0$ i $B \geq 0$ i komutują, to $AB \geq 0$.
   Wskazówka: Bez utraty ogólności (tzw. BUO) można założyć, że $0 \leq B \leq 1$ i skorzystać z poprzedniego zadania.
4. Udowodnij, że jeżeli $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ spełniają $A \geq B \geq 0$ i komutują to $A^2 \geq B^2 \geq 0$.
5. Udowodnij, że jeżeli $A, B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ są nieujemne, komutują i $A \geq B \geq 0$ to $AC \geq BC$.