

## ANALIZA FUNKCJONALNA 2

### LISTA ZADAŃ 4

10.05.2016

1. Operator  $T$  jest określony na  $L^2(0, 1)$  wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y) dy.$$

Znajdź jawny wzór całkowy dla operatorów  $(zI - T)^{-1}$ , gdzie  $z \neq 0$ .

**Wskazówka** Skorzystaj z faktu, że  $(zI - T)^{-1} = \sum T^n / z^{n+1}$  i ze wzoru:

$$T^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} f(y) dy.$$

2. Załóżmy, że  $T \in \mathcal{B}(X)$  spełnia warunek  $p(T) = 0$  dla pewnego wielomianu  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ . Pokaż, że  $\sigma(T)$  jest zawarte w zbiorze pierwiastków wielomianu  $p(z)$ .
3. Dla funkcji zespolonej  $k(x, y)$  dwu zmiennych  $x, y \in [0, 1]$  określamy operator  $K$  na  $L^2(0, 1)$  wzorem

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) dy.$$

Załóżmy, że  $K$  jest ograniczony, znajdź wzór na  $K^*$ .

4. Ograniczony operator  $P$  na przestrzeni Banacha  $X$  nazywamy rzutem jeśli  $P^2 = P$ . Pokaż, że obraz  $P$  jest domknięty. Znajdź  $\sigma(P)$ . Znajdź wzór na operatory rezolwenty  $(zI - P)^{-1}$ .
5. Rzut  $P$  na przestrzeni Hilberta  $\mathbb{H}$  nazywamy ortogonalnym jeśli  $Px \perp x - Px$  dla dowolnego  $x \in \mathbb{H}$ . Pokaż, że następujące trzy warunki są równoważne:
- $P$  jest ortogonalny,
  - $\|P\| \leq 1$ ,
  - $P$  jest hermitowski.
6. Niech  $P$  i  $Q$  będą rzutami ortogonalnymi w przestrzeni Hilberta  $\mathbb{H}$  takimi, że  $PQ = QP$ . Pokaż, że każdy z operatorów  $I - P$ ,  $I - Q$ ,  $PQ$ ,  $P + Q - PQ$  i  $P + Q - 2PQ$  jest rzutem ortogonalnym. Opisz obrazy tych rzutów używając obrazów  $P$  i  $Q$ .
7. Niech  $U$  będzie ograniczonym i odwracalnym odwzorowaniem liniowym z przestrzeni Banacha  $X$  na przestrzeń Banacha  $Y$ . Niech  $T \in \mathcal{B}(X)$ ,  $S \in \mathcal{B}(Y)$  spełniają  $S = UTU^{-1}$ . Pokaż, że spektra operatorów  $S$  i  $T$  są równe.
8. Udowodnij, że jeżeli ciąg  $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$  jest słabo zbieżny, to również ciąg  $A_n^*$  jest słabo zbieżny. Pokaż, że podobne stwierdzenie nie jest prawdziwe dla mocnej zbieżności.
- 9.
- Niech  $A_n, A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ . Pokaż, że jeśli  $A_n \geq 0$  oraz  $A_n$  jest zbieżny do  $A$  w normie operatorowej, to  $A \geq 0$  oraz  $\sqrt{A_n} \rightarrow \sqrt{A}$  w normie operatorowej.
  - Pokaż, że jeżeli  $A_n \geq 0$  oraz  $A_n \rightarrow A$  mocno, to również  $A \geq 0$  oraz  $\sqrt{A_n} \rightarrow \sqrt{A}$  mocno.
  - Pokaż, że jeżeli  $A_n \rightarrow A$  w normie operatorowej, to  $|A_n| \rightarrow |A|$  w normie operatorowej.
  - Pokaż, że jeżeli  $A_n \rightarrow A$  oraz  $A^* \rightarrow A^*$  mocno, to również  $|A_n| \rightarrow |A|$  mocno.
  - Pokaż na przykładzie, że poprzednie stwierdzenie nie jest prawdziwe dla słabej zbieżności operatorowej.

10. Niech  $T_t : f(x) \mapsto f(x+t)$  będzie operatorem na  $L^2(\mathbb{R})$ . Znajdź normę  $T_t$ . Do czego są zbieżne operatory  $T_t$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ , i w jaki sposób? Rozważ to samo pytanie dla  $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$ .
11. Niech  $\mathbb{H}$  będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta.
- Pokaż, że jeżeli  $A_n, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$  są mocno zbieżne do  $A$  i  $B$  odpowiednio to  $A_n B_n$  jest mocno zbieżny do  $AB$ .
  - Pokaż na przykładzie, że jeżeli zbieżność  $A_n \rightarrow A, B_n \rightarrow B$  jest tylko słaba, to  $A_n B_n$  nie musi być słabo zbieżny do  $AB$ .
12. ( [\*] Dla tych, którzy znają się na szeregach Fouriera.)] Dla funkcji ciągłej  $g(x)$ , okresowej o okresie  $2\pi$  określmy operator  $T$  na przestrzeni  $L^2(0, 2\pi)$  wzorem

$$Tf(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy.$$

(Operator splotu z  $g$ .) Pokaż, że  $T$  jest operatorem ograniczonym i

$$\|T\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(y)|dy.$$

Znajdź spektrum operatora  $T$ .