

WARSZTATY ZADANIOWE

ROK AKADEMICKI 2015/16

(ZADANIA AUTORSTWA DR WRÓBLEWSKIEGO)

- (1) Uzupełnić cechę podzielności przez 9: Dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy _____ jest podzielna przez 9.
- (2) Uzupełnić uogólnioną cechę podzielności przez 9: Dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k przy dzieleniu przez 9 daje taką samą resztę, jaką przy dzieleniu przez 9 daje _____.
- (3) Uzupełnić cechę podzielności przez 12: Dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna przez 12 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr liczby k _____, a liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k _____.
- (4) Czy podana cecha podzielności przez 4 jest poprawna? Jeśli nie, to na czym polega błąd i jak go naprawić? Dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez trzy ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez 4.
- (5) W liczbie 3?20000001?5 wpisać w miejsce obu znaków zapytania taką samą cyfrę tak, aby otrzymać liczbę podzielną przez 75. Podać wszystkie rozwiązania.
- (6) W liczbie 3120000001?? wpisać w miejsce znaków zapytania takie cyfry (mogą być różne), aby otrzymać liczbę podzielną przez 72. Podać wszystkie rozwiązania.
- (7) Podać, bez wykonywania bezpośrednich obliczeń, trzy ostatnie cyfry liczby 23!.
- (8) Która z liczb jest większa
 - (a) $10!$ czy 10^{10} ?
 - (b) $20!$ czy 10^{10} ?
 - (c) $20!$ czy $(10!)^2$?
 - (d) $100!$ czy $(10!)^{10}$?
 - (e) $10!$ czy $6! \cdot 7!$?
- (9) Niech n będzie liczbą naturalną. Jaką resztę daje
 - (a) liczba $7n+8$ przy dzieleniu przez 7?
 - (b) liczba $6n+11$ przy dzieleniu przez 3?
 - (c) liczba $10n-3$ przy dzieleniu przez 10?
 - (d) liczba $10n-23$ przy dzieleniu przez 10?
 - (e) liczba $10n-23$ przy dzieleniu przez 10, jeżeli $n = 1$?
- (10) Dowieść, że w ciągu 3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, ..., w którym każdy kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie sumy cyfr, nie występuje liczba 2008.
- (11) Jakie reszty może dawać kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez:
 - (a) 3
 - (b) 4
 - (c) 8
 - (d) 5
- (12) Jakie reszty może dawać sześcián liczby całkowitej przy dzieleniu przez
 - (a) 7
 - (b) 9

- (13) Dowieść, że liczba naturalna o sumie cyfr równej 47 nie może być ani kwadratem, ani sześcianiem liczby całkowitej.
- (14) Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d , dla których prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez d :
Dla dowolnej liczby naturalnej k , liczba k jest podzielna przez d wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby k jest podzielna przez d .
- (15) Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^2 - n$ jest parzysta, liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6, a liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 30.
Wskazówka: $n^5 - n = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + \text{coś}$.
- (16) Wskazać takie liczby naturalne m, n , że

$$m^3 n^4 = 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5^{13}.$$

- (17) Która liczba jest większa, $2^8 \cdot 18^{10}$ czy 6^{19} ?
- (18) Obliczyć NWD($24!$, 24^8).
- (19) Obliczyć NWW(12^{12} , 18^{18}).
- (20) Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 5^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 7^2$. Obliczyć NWD(a, b, c) oraz NWW(a, b, c).
- (21) Niech $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 6^9$, $b = 2^6 \cdot 3^{11} \cdot 4^5$, $c = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 10^2$. Obliczyć NWD(a, b, c) oraz NWW(a, b, c).
- (22) Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których liczba $n^2 - 1$ jest pierwsza.
- (23) Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $3p + 1$ jest pierwsza.
- (24) Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $p^2 + 2$ jest pierwsza.
- (25) Czy istnieją liczby naturalne m, n spełniające równanie

$$6^m = 12^n ?$$

- (26) Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$6^m \cdot 12^n = 18^k ?$$

- (27) Czy istnieją liczby naturalne m, n, k spełniające równanie

$$18^m \cdot 24^n = 12^k ?$$

- (28) Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne d o następującej własności: Dla dowolnych liczb naturalnych m, n , jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 7, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d .
- (29) To samo z liczbą 24 zamiast 7.
- (30) Uprościć wyrażenie

$$\frac{1}{5} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6}.$$

- (31) Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt{n^2 + n} - n < \frac{1}{2}.$$

- (32) Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.
- (a) $a^3 \dots b^3 = (a + b) \dots$
- (b) $a^3 \dots b^3 = (a - b) \dots$
- (c) $a^4 \dots b^4 = (a + b) \dots$
- (d) $a^4 \dots b^4 = (a - b) \dots$

(33) Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{n^3 + n^2} < n + \frac{112233}{336698}.$$

(34) Które z wielomianów $x^{30}-1$, $x^{30}+1$, $x^{60}-1$, $x^{60}+1$ są podzielne przez wielomian

- (a) $x^5 + 1$,
- (b) $x^5 - 1$,
- (c) $x^6 + 1$,
- (d) $x^6 - 1$?

(35) Uporządkować rosnąco następujące liczby:

$$\binom{100}{7}, \quad \binom{100}{27}, \quad \binom{100}{47}, \quad \binom{100}{57}, \quad \binom{100}{77}, \quad \binom{100}{97}.$$

(36) Rozwiązać równanie

$$3 \cdot \binom{n}{4} = \binom{k}{2}$$

w liczbach naturalnych $n \geq 4$, $k \geq 2$.

(37) Wskazać taką liczbę x , że dla dowolnych liczb naturalnych n i k prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + x \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2}.$$

(38) Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a, b, c zachodzi równość

$$\binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{b} = \binom{a+b+c}{b} \binom{a+c}{a}.$$

(39) Obliczyć sumę

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

(40) Obliczyć sumę

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \dots$$

(41) Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} < 4^n.$$

(42) Uprościć wyrażenie

$$\sqrt{n - 40\sqrt{n} + 400}.$$

(43) Rozwiązać równanie

$$|x - 5| + |x + 7| = 12.$$

(44) Która z liczb jest większa

- (a) $\frac{8^{444}}{17^{17}}$ czy $\frac{16^{333}}{19^{17}}$?
- (b) $\frac{17^{667}}{3333^4 + 6666^4}$ czy $\frac{17^{666}}{3333^4}$?

(45) Podać co najmniej trzy przykłady par takich liczb wymiernych dodatnich $a < b$, że $a^b = b^a$.

$$\left(3^{2^n} - 2^{2^k}\right) \cdot \left(3^{2^n} + 2^{2^k}\right) \cdot \left(3^{2^{n+1}} + 2^{2^{k+1}}\right).$$
 $a^{aaaaaaaaaaaaaaaa} \quad \text{czy} \quad 10^{10^{10}}?$

- $4^{2+\log_2 7}$
- $\log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9$
- $\log_6 2 + \log_{36} 9$

(a) $\log_6 12 + 3 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$
 (b) $2 \cdot \log_6 12 + 4 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$
 (c) $\log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + 2 \cdot \log_6 24$
 (d) $3 \cdot \log_6 12 + 5 \cdot \log_6 18 + \log_6 24$

(a) $\log_7 1, \log_7 3, \log_7 5$
 (b) $\log_7 1, \log_7 4, \log_7 16$
 (c) $\log_7 4, \log_7 6, \log_7 9$
 (d) $\log_7 25, \log_7 10, \log_7 4$

- $\log_2 7$ czy $\log_3 7$
- $\log_{0,2} 7$ czy $\log_{0,3} 7$
- $\log_2 7$ czy $\log_{0,3} 7$
- $\log_{0,2} 7$ czy $\log_3 7$
- $\log_2 0,7$ czy $\log_3 0,7$
- $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$
- $\log_2 0,7$ czy $\log_{0,3} 0,7$
- $\log_{0,2} 0,7$ czy $\log_3 0,7$
- $\log_9 27$ czy $\log_4 8$
- $\log_3 8$ czy $\log_2 5$
- $\log_5 127$ czy $\log_{10} 999$
- $\log_3 100$ czy $\log_2 10$
- $(\log_2 3) \cdot \log_5 7$ czy $(\log_2 7) \cdot \log_5 3$
- $(\log_2 3) \cdot \log_7 5$ czy $(\log_7 9) \cdot \log_{16} 25$
- $\log_2 3$ czy $\log_3 5$
- $\log_3 7$ czy $\log_5 19$
- $\log_2 3$ czy $\log_5 13$
- $\log_3 5$ czy $\log_{15} 56$
- $(\log_3 15) + \log_5 15$ czy $(\log_3 15) \cdot \log_5 15$
- $(\log_7 123456789)^{\log_7 123456789}$ czy $123456789^{\log_7 \log_7 123456789}$
- $\log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} 2$ czy $(\log_{666} 665) + \log_{666} 667$
- $\log_2 3$ czy $1,6$
- $\log_2 45$ czy $72/13$

- (x) $2^{\log_3 7}$ czy $7^{\log_3 2}$
- (52) Dla ilu trójek liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c różnych od 1 spełniona jest podana równość? Dla wszystkich? Dla żadnej? Dla niektórych (podać 3 przykłady, a jeśli przykładów jest mniej niż 3, podać wszystkie)?
- (a) $\log_a(bc) = (\log_a b) + \log_a c$
 - (b) $\log_a(bc) = (\log_a b) \cdot \log_a c$
 - (c) $\log_a(b+c) = (\log_a b) \cdot \log_a c$
 - (d) $\log_a(b+c) = (\log_a b) + \log_a c$
 - (e) $(\log_a b) \cdot \log_b c = \log_a c$
 - (f) $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$
 - (g) $\log_a(b^c) = (\log_a b)^c$
- (53) Dla podanych liczb a, b wskazać taką liczbę c , że liczby $\log_a 37, \log_b 37, \log_c 37$ tworzą (w tej właśnie kolejności) postęp arytmetyczny trójwyrazowy.
- (a) $a = 64, b = 8$
 - (b) $a = 4, b = 8$
 - (c) $a = 2, b = 8$
 - (d) $a = 64, b = 16$
- (54) Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego
- (a) $\sqrt{0,(4)} + \sqrt[3]{3,374(9)}$
 - (b) $(0,2(9) + 1,(09)) \cdot 12,(2)$
 - (c) $(0,(037))^{0,(3)}$
- (55) Dowieść, że podane liczby są niewymierne
- (a) $\sqrt{2}$
 - (b) $\sqrt[n]{n}$, jeżeli n jest liczbą naturalną niebędącą m -tą potęgą liczby naturalnej
 - (c) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$
 - (d) $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$
 - (e) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$
 - (f) $\log_m n$, jeżeli liczby naturalne $m, n > 1$ nie są potęgami tej samej liczby naturalnej
- (56) Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_2 3 + \log_4 5$ jest wymierna czy niewymierna.
- (57) Liczby a i b są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a + b$ jest niewymierna?
- (58) Czy liczba $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2} + 1)$ jest wymierna czy niewymierna?
- (59) Dowieść, że suma liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.
- (60) Czy iloczyn liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest zawsze liczbą niewymierną?
- (61) Liczby $a + b, b + c$ i $c + a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c są wymierne?
- (62) Liczby $a + b, b + c$ i $c + a$ są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba $a + b + c$ jest niewymierna?
- (63) Liczby $a + b, b + c, c + d$ i $d + a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d są wymierne?
- (64) Liczby $a + b, b + c, c + d$ i $d + e, e + a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d, e są wymierne?
- (65) Niech n będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy, n , liczby całkowite oraz znaki $+, -, \cdot, :$ i $\sqrt{}$ zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od $\frac{1}{n}$.
- (66) Suma wyrazów rosnącego postępu arytmetycznego 2007-wyrazowego o wyrazach dodatnich jest liczbą wymierną. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden wyraz postępu jest liczbą wymierną?

- (67) To samo pytanie dla postępu 2008-wyrazowego.
- (68) Wszystkie poniższe przykłady można podać bez używania operacji bardziej skomplikowanych niż logarytmy i pierwiastki, korzystając tylko z faktu niewymierności liczb o postaci rozważanej we wcześniejszych zadaniach. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej x , że
- (a) $0 < x < 1$ oraz liczba x jest niewymierna,
 - (b) $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$ oraz liczba x jest wymierna,
 - (c) liczby x^2 i x^3 są niewymierne, ale liczba x^5 jest wymierna,
 - (d) liczby x^4 i x^6 są wymierne, ale liczba x^5 jest niewymierna,
 - (e) liczba $(x+1)^2$ jest niewymierna,
 - (f) liczba x jest niewymierna, ale liczba $x + \frac{1}{x}$ jest wymierna,
 - (g) liczba x jest niewymierna i liczba 2^x jest niewymierna,
 - (h) $2^x + 3^x$ jest liczbą niewymierną,
 - (i) $2^x + 3^x$ jest liczbą wymierną,
 - (j) $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
 - (k) $\log_2 x + \log_3 x$ jest liczbą wymierną,
 - (l) $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą niewymierną,
 - (m) $\log_2 x \cdot \log_3 x$ jest liczbą wymierną,
 - (n) $2^x + \log_2 x$ jest liczbą całkowitą dodatnią,
 - (o) $2^x + \log_2 x$ jest liczbą niewymierną,
 - (p) $x + \log_2 x$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
 - (q) $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną niecałkowitą,
 - (r) $x^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną,
 - (s) $\log_x(1+x)$ jest liczbą wymierną,
 - (t) $\log_x(1+x)$ jest liczbą niewymierną.
- (69) Funkcja jest
- (a) okresowa
 - (b) parzysta
 - (c) nieparzysta
- wtedy i tylko wtedy, gdy jej wykres jest niezmienniczy ze względu na
- (70) Czy funkcja f zdefiniowana podanym wzorem jest parzysta? Nieparzysta? Monotoniczna?
- (a) $f(x) = 0$
 - (b) $f(x) = 37$
 - (c) $f(x) = 2x$
 - (d) $f(x) = 2x^2 + 1$
 - (e) $f(x) = 14x^5 + 6x^3$
 - (f) $f(x) = 14x^6 + 6x^4$
 - (g) $f(x) = x^6 + x^5$
- (71) Niech

$$f(x) = \left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right|,$$

gdzie $[.]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej. Naszkicować wykres funkcji f oraz wykresy następujących funkcji

- (a) $f_1(x) = f(2x)$
- (b) $f_2(x) = f(x/2)$
- (c) $f_3(x) = 2f(x)$

$$(d) f_4(x) = f\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

$$(e) f_5(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$(f) f_6(x) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$(g) f_7(x) = \frac{1}{2} - f(x)$$

$$(h) f_8(x) = f\left(\left|x - \frac{1}{4}\right|\right)$$

$$(i) f_9(x) = \left|f\left(x - \frac{1}{4}\right)\right|$$

$$(j) f_{10}(x) = \frac{f(2x)}{2}$$

$$(k) f_{11}(x) = f(x) + x$$

$$(l) f_{12}(x) = 5f(x) + 3x$$

(72) Naszkicować wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem

$$(a) f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$(b) f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$(c) f(x) = 2 + \frac{1}{x+3}$$

$$(d) f(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$(e) f(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$$

$$(f) f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$$

$$(g) f(x) = 1 - \frac{1}{|x|-2}$$

$$(h) f(x) = 1 - \frac{1}{|x-2|}$$

$$(i) f(x) = \left|1 - \frac{1}{x-2}\right|$$

$$(j) f(x) = \left|1 - \frac{1}{|x|-2}\right|$$

$$(k) f(x) = \left|1 - \frac{1}{|x-2|}\right|$$

(73) Funkcja f spełnia warunki

$$f(3-x) = f(x), \quad f(6-x) = f(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Dowieść, że funkcja f jest okresowa i parzysta.

(74) Dla każdej z liczb $i \in \{1, 2, \dots, 13\}$ wskazać taką liczbę $j \in \{1, 2, \dots, 13\}$, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x

$$f_j(f_i(x)) = x.$$

$$(a) f_1(x) = 37 + x$$

$$(b) f_2(x) = 37 - x$$

$$(c) f_3(x) = x - 37$$

- (d) $f_4(x) = 3x - 2$
- (e) $f_5(x) = 3x - 4$
- (f) $f_6(x) = 3x - 6$
- (g) $f_7(x) = \frac{x}{3} + 2$
- (h) $f_8(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$
- (i) $f_9(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$
- (j) $f_{10}(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$
- (k) $f_{11}(x) = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$
- (l) $f_{12}(x) = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}|x|$
- (m) $f_{13}(x) = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}|x|$
- (75) Podać zbiór wartości funkcji f danej wzorem $f(x) = x^2$ na przedziale
 - (a) $[1, 4]$
 - (b) $[-2, -1]$
 - (c) $(-3, 2)$
- (76) Podać zbiór wartości funkcji f danej wzorem $f(x) = |2^x - 8|$ na przedziale
 - (a) $(0, 1)$
 - (b) $(2, 4]$
 - (c) $\left(-\infty, 3\frac{1}{2}\right]$
- (77) Podać zbiór wartości funkcji f danej wzorem $f(x) = x^4 - 50x^2$ na przedziale
 - (a) $(-10, -6)$
 - (b) $(-7, -1)$
 - (c) $(-6, 1)$
 - (d) $(-1, 7)$
 - (e) $(3, 10)$
- (78) Rozwiązać równania i nierówności
 - (a) $x^2 - 103x + 300 = 0$
 - (b) $3x < \sqrt{x^2 + 8}$
 - (c) $\sqrt{x^7 + x + 7} = 3$
 - (d) $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$
 - (e) $(x^2 + x + 1)^{3x} > (x^2 + x + 1)^{x+1}$
 - (f) $\log_{2x}(x^2 + 1) \leq \log_{2x}(x^2 + 3x)$
 - (g) $\log_2 x + \log_x 4 < 3$
 - (h) $||| ||| |x| - 1| - 1| - 1| - 1| - 1| = \frac{x}{2}$
 - (i) $|x^2 - 17| = 8$
 - (j) $|x - 1| + |x| + |x + 1| > x^2 + \frac{20}{9}$
- (79) W trapezie o wysokości 12 ramiona mają długości 15 i 20, a jedna z podstaw ma długość 50. Jaka jest długość drugiej podstawy?
- (80) Uporządkować niemalejąco następujące liczby: $\sin 18^\circ, \sin 36^\circ, \sin 72^\circ, \sin 144^\circ, \cos 18^\circ, \cos 36^\circ, \cos 72^\circ, \cos 144^\circ$.
- (81) Niech $0 < a \leq b \leq c$. Dokończyć i uzasadnić:

- (a) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- (b) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- (c) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- (d) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- (e) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę 120° wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- (f) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę 60° wtedy i tylko wtedy, gdy ...
- (82) W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 30° , a boki AC i BC mają długości odpowiednio $\sqrt{3}$ oraz 1 . Wyznaczyć długość boku AB .
- (83) Środek okręgu opisanego na trójkącie leży na prostej przechodzącej przez jeden z jego wierzchołków i środek przeciwległego boku wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest ...
- (84) Mając narysowany okrąg i jego środek, skonstruować kąt prosty przy użyciu samej linijki.
- (85) Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Wiadomo, że

$$\angle AOB = \angle ACB + 60^\circ .$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB .

- (86) To samo pytanie, gdy O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .
- (87) Poniższe warunki dotyczą czworokąta wypukłego. Połączyć je w pary warunków równoważnych.
 - (a) w czworokąt można wpisać okrąg
 - (b) na czworokącie można opisać okrąg
 - (c) czworokąt jest równoległobokiem
 - (d) czworokąt jest rombem
 - (e) czworokąt jest prostokątem
 - (f) sumy miar przeciwległych kątów są równe
 - (g) sumy długości przeciwległych boków są równe
 - (h) sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe
 - (i) przekątne są równej długości i dzielą się na połowy
 - (j) przekątne są prostopadłe i dzielą się na połowy
 - (k) przekątne są prostopadłe
 - (l) przekątne dzielą się na połowy
- (88) Czy istnieje czworokąt, którego boki mają długości (w podanej kolejności)
 - (a) 1, 3, 10, 15
 - (b) 2, 4, 10, 15
 - (c) 3, 27, 10, 15
 - (d) 4, 30, 10, 15
- (89) Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 3, 4, 5 do boków tego trójkąta.
- (90) Trzy kolejne boki wielokąta opisanego na okręgu mają długości a, b, c (z zachowaniem kolejności). Jaki warunek muszą spełniać a, b, c , aby było to możliwe?
- (91) Na okręgu opisano pięciokąt o bokach 3, 4, 5, 6, 7 (w tej kolejności). Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu do boków pięciokąta.

- (92) Pięć kolejnych boków wielokąta opisanego na okręgu ma długości a, b, c, d, e (z zachowaniem kolejności). Wykazać, że wówczas

$$b + d < a + c + e.$$

- (93) Wykazać, że dla sześciokąta o bokach a, b, c, d, e, f (z zachowaniem kolejności) równość

$$a + c + e = b + d + f$$

jest warunkiem (koniecznym/dostatecznym) (niepotrzebne skreślić) na to, aby w sześciokąt można było wpisać okrąg. Pokazać na przykładzie, że nie jest to warunek (konieczny/dostateczny).

- (94) Podać 4 przykłady parami niepodobnych trójkątów równoramiennych, z których każdy można podzielić na dwa trójkąty równoramienne.
- (95) Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ poniższe zdanie jest prawdziwe
- (a) Dowolny n -kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.
 - (b) Dowolny n -kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.
 - (c) Dowolny n -kąt opisany na okręgu i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.
 - (d) Dowolny n -kąt opisany na okręgu i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.
- (96) Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC . Ile co najwyżej może istnieć takich punktów D różnych od C , że proste AB i CD są prostopadłe, a przy tym

$$\angle ACB = \angle ADB?$$

- (97) Dla której liczby naturalnej n w dowolnym n -kącie wypukłym liczba przekątnych jest k razy większa od liczby boków, jeżeli
- (a) $k = 2$
 - (b) $k = 3$
 - (c) $k = 5$
 - (d) $k = 10$
- (98) Dla których liczb naturalnych n istnieje n -kąt wypukły, którego każdy kąt wewnętrzny ma miarę 60° lub 160° ?
- (99) Dziewięciokąt $A_1A_2A_3 \dots A_9$ jest foremny. Wyznaczyć miary kątów trójkąta
- (a) $A_1A_3A_7$
 - (b) $A_2A_3A_8$
 - (c) $A_3A_4A_5$
- (100) Dany jest dwunastokąt foremny $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$. Dla podanych dwóch przekątnych wskazać trzecią przekątną przechodzącą przez ich punkt przecięcia.
- (a) A_1A_7, A_3A_9
 - (b) A_1A_5, A_2A_8
 - (c) A_1A_5, A_3A_7
 - (d) A_1A_6, A_4A_9
- (101) Dany jest jedenastokąt foremny $A_1A_2A_3 \dots A_{11}$. Połączyć podane czworokąty w pary czworokątów przystających
- (a) $A_1A_2A_4A_9$
 - (b) $A_1A_3A_7A_{11}$
 - (c) $A_1A_4A_{10}A_{11}$
 - (d) $A_1A_6A_9A_{10}$

- (e) $A_1A_4A_6A_{11}$
 - (f) $A_1A_2A_3A_9$
 - (g) $A_1A_6A_8A_{11}$
 - (h) $A_1A_3A_4A_8$
 - (i) Które czworokąty mają równe pola?
- (102) Dany jest 13-kąt foremny $A_1A_2A_3 \dots A_{13}$. Dla podanych i, j wskazać taką liczbę k , że trójkąt $A_iA_jA_k$ jest trójkątem równoramiennym ostrokątnym
- (a) $i = 1, j = 2$
 - (b) $i = 1, j = 5$
 - (c) $i = 1, j = 6$
 - (d) $i = 1, j = 7$
- (103) Który punkt wewnątrz trójkąta równobocznego ma najmniejszą sumę odległości od jego boków?
- (104) Który punkt wewnątrz trójkąta równobocznego ma najmniejszą sumę odległości od jego wierzchołków?
- (105) Który punkt wewnątrz kwadratu ma najmniejszą sumę odległości od jego boków?
- (106) Który punkt wewnątrz kwadratu ma najmniejszą sumę odległości od jego wierzchołków?
- (107) W wierzchołkach kwadratu o boku 1 km znajdują się 4 domy. Czy można zbudować sieć dróg o łącznej długości mniejszej od $2\sqrt{2}$ km, umożliwiającą dojście z każdego domu do każdego innego?
- (108) Obliczyć pole sześciokąta foremnego o boku 1.
- (109) Obliczyć pole dwunastokąta foremnego o boku 1.
- (110) W 101-kącie foremnym pomalowano na czerwono dowolne 52 wierzchołki. Dowieść, że istnieje trójkąt równoramienny, którego wszystkie wierzchołki są czerwone.