

Egzamin końcowy (2 termin)
21.02.17

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Znajdź ekstrema funkcji $f(x, y, z) = xyz$ pod warunkami $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

Rozwiązanie: Ponieważ warunki są 2, więc metoda Lagrange'a wygląda następująco, z 2 nieoznaczonymi parametrami;

$$\begin{aligned}yz &= \lambda 2x + \mu, \\xz &= \lambda 2y + \mu, \\xy &= \lambda 2z + \mu.\end{aligned}$$

Przy okazji zauważmy, że zadanie równie dobrze można by rozwiązać bez ekstremów warunkowych, eliminując zmienne z warunków, i znajdując ekstrema uzyskanej funkcji 1 zmiennej. Kontynuując z Lagrangem, odejmujemy pierwsze równanie od 2 pozostałych, i dostajemy

$$\begin{aligned}z(x - y) &= 2\lambda(y - x), \\y(x - z) &= 2\lambda(z - x).\end{aligned}$$

Są teraz 2 możliwości: albo zmienne x, y, z są wszystkie różne, albo niektóre są równe. Ze względu na warunki nie może być $x = y = z$, ale któreś 2 współrzędne mogą być równe. Ze względu na symetrię wystarczy rozpatrzeć przypadek $x = y$, równość innych zmiennych doprowadzi do tych samych ekstremów, tylko w innych punktach.

1. Wszystkie zmienne różne. Dzieląc otrzymane równania przez $(x - y)$ i $(x - z)$ otrzymujemy $z = -2\lambda = y$, czyli sprzeczność. Ten przypadek jest niemożliwy.

2. $x = y$. Wtedy $z \neq x$ i z drugiego równania $y = -2\lambda$, więc także $x = -2\lambda$, i z warunku $z = 4\lambda$. Podstawiając to do pozostałego warunku mamy

$$(-2\lambda)^2 + (-2\lambda)^2 + (4\lambda)^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{24} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

Mamy więc 2 komplety współrzędnych, w których mogą być ekstrema:

$$\pm \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

Wartości f w tych punktach to $\pm \frac{2}{6\sqrt{6}} = \pm \frac{1}{3\sqrt{6}}$. To są nasze ekstrema warunkowe: maksimum to $\frac{1}{3\sqrt{6}}$, a minimum to $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź objętość bryły ograniczonej powierzchniami

$$z^2 = xy, \quad x + y = a, \quad x + y = b, \quad 0 < a < b.$$

Rozwiązanie: Pierwsze równanie daje 2 powierzchnie $z = \pm\sqrt{xy}$, które „zawieszone są” powyżej i poniżej I i III ćwiartki układu OXY ($xy \geq 0$). Dwa pozostałe równania dają dwie pionowe płaszczyzny których przecięcie z poziomą płaszczyzną OXY to proste: $y = -x + a$, $y = -x + b$. Objętość bryły to

$$V = \iint_D (\sqrt{xy} - (-\sqrt{xy})) \, dx \, dy = 2 \iint_D \sqrt{xy} \, dx \, dy,$$

gdzie D jest trapezem o wierzchołkach $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(0, b)$, $(0, a)$ na płaszczyźnie OXY . Piszemy więc całkę iterowaną:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a \int_{a-x}^{b-x} 2\sqrt{xy} \, dy \, dx + \int_a^b \int_0^{b-x} 2\sqrt{xy} \, dx \, dy \\ &= \int_0^a \frac{4}{3} \sqrt{x} ((b-x)^{\frac{3}{2}} - (a-x)^{\frac{3}{2}}) \, dx + \int_a^b \frac{4}{3} \sqrt{x} (b-x)^{\frac{3}{2}} \, dx \\ &= \int_0^b \frac{4}{3} \sqrt{x} (b-x)^{\frac{3}{2}} \, dx - \int_0^a \frac{4}{3} \sqrt{x} (a-x)^{\frac{3}{2}} \, dx. \end{aligned}$$

W powyższych całkach robimy podstawienia $x = bt$ i $x = at$ odpowiednio, i dostajemy

$$V = \frac{4}{3} (b^3 - a^3) \int_0^1 \sqrt{t} (1-t)^{\frac{3}{2}} \, dt.$$

Ostatnią całkę można policzyć podstawiając $\sqrt{t} = \sin \varphi$, wychodzi $\frac{\pi}{16}$, ale jeżeli ktoś zostawi tę całkę w tej postaci, to też jest dobrze.

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz całkę powierzchniową

$$\iint_S z \, d\sigma,$$

gdzie S jest częścią powierzchni $x^2 + z^2 = 2az$, ($a > 0$) odcięta powierzchnią $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że powierzchnię tą można zapisać jako wykres funkcji $z = z(x, y)$. Znajdźmy rzut tej powierzchni na płaszczyznę OXY , to będzie obszar parametryzacji. Skoro

$$x^2 + (z - a)^2 = a^2,$$

więc $x \in [-a, a]$. Dla danego x mamy $z = a \pm \sqrt{a^2 - x^2}$. Powierzchnia wycinająca ma równanie $z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$ więc dla danego x zakres y w rzucie jest następujący:

$$y^2 \leq z^2 - x^2 = a^2 \pm 2a\sqrt{a^2 - x^2} + (a^2 - x^2) - x^2 = 2a^2 \pm 2a\sqrt{a^2 - x^2} - 2x^2.$$

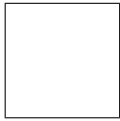
Łatwo zauważyć, że wybór – jest niemożliwy, prawa strona jest ujemna. Oznacza to, że stożek $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ przecina się tylko z górną częścią poziomej „rury” $x^2 + z^2 = 2az$. Otrzymujemy ograniczenie na y :

$$\pm \sqrt{2(a^2 + a\sqrt{a^2 - x^2} - x^2)} = \pm \varphi.$$

(Wprowadziliśmy tymczasowe oznaczenie.) Mamy opis obszaru: $D = \{(x, y) : x \in [-a, a], y \in [-\varphi, \varphi]\}$. Powierzchnia jest wykresem funkcji $z = a + \sqrt{a^2 - x^2}$ ponad D . Wstawiamy to do wzoru na całkę powierzchniową po wykresie:

$$\begin{aligned} \iint_S z \, d\sigma &= \iint_D z(x, y) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy \\ &= \iint_D \left(a + \sqrt{a^2 - x^2} \right) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx \, dy \\ &= \int_{-a}^a \int_{-\varphi}^{\varphi} \left(a + \sqrt{a^2 - x^2} \right) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx \, dy \\ &= \int_{-a}^a 2\varphi \left(a + \sqrt{a^2 - x^2} \right) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx \\ &= \sqrt{2}a^3 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2} - x^2} \left(1 + \sqrt{1 - x^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx. \end{aligned}$$

Ostatnią całkę można policzyć, jak zwykle stosując podstawienie trygonometryczne i następnie „zatopienie się w trygonometrycznej orgii”, ale jeżeli ktoś zostawił tę całkę w tej postaci, to też jest dobrze.



Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź masę krzywej $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, ($0 \leq t \leq 2\pi$), jeżeli gęstość liniowa w punkcie (x, y) wynosi $|y|$.

Rozwiązanie: Wiemy, że masa wyraża się przez całkę krzywoliniową niezorowaną z gęstości liniowej:

$$M = \int_{\gamma} |y| ds.$$

Mamy daną jawnie parametryzację $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, więc podstawiamy:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} |b \sin t| \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t} dt \\ &= 4ba \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{1 + \frac{b^2 - a^2}{a^2} \cos^2 t} dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} \cos t = s \\ -\sin t = \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} ds \end{array} \right\} \\ &= \frac{4ba^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \int_0^{\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}} \sqrt{1 + s^2} ds. \end{aligned}$$

Ostatnią całkę można policzyć używając podstawienia hiperbolicznego, ale jeżeli ktoś zostawił ją w takiej postaci, to też jest OK.



Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź pochodną cząstkową $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ w punkcie (x, y, z) funkcji $z = z(x, y)$ zadanej niejawnie równaniem

$$\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}.$$

Rozwiązanie: Mamy

$$F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \log \frac{z}{y} = 0.$$

Podstawiamy to do wzoru na pochodne cząstkowe funkcji uwikłanej $z = z(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{x}{z^2} - \frac{1}{z}} = \frac{z}{x+z}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\frac{\partial z}{\partial x}(x+z) - z\frac{\partial(x+z)}{\partial x}}{(x+z)^2} = \frac{\frac{z}{x+z}(x+z) - z(1 + \frac{z}{x+z})}{(x+z)^2} \\ &= \frac{z - \frac{xz+2z^2}{(x+z)}}{(x+z)^2} = \frac{z(x+z) - xz - 2z^2}{(x+z)^3} = -\frac{z^2}{(x+z)^3}. \end{aligned}$$



Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Udowodnij, że funkcja

$$f(x, y, z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

spełnia równanie Laplace'a:

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 0.$$

Rozwiązanie: Liczymy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} - x\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x \\ &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}.\end{aligned}$$

Pozostałe pochodne są takie same, ze względu na symetrię, trzeba tylko zamienić x na odpowiednią zmienną. Sumując, dostajemy:

$$\Delta f(x, y, z) = -3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} = 0.$$