

**Kolokwium 1**
18.11.16

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Napisz równanie stycznej do podanej krzywej w podanym punkcie:

$$x^3 + x - y^3 - y = 0, \quad (2, 2).$$

Rozwiązanie: Mamy krzywą zadaną równaniem $F(x, y) = x^3 + x - y^3 - y = 0$, więc

$$F_y(x, y) = -3y^2 - 1, \quad F_y(2, 2) = -13 \neq 0.$$

Krzywą w otoczeniu punktu $(2, 2)$ można więc przedstawić jako wykres funkcji $f(x)$, przy czym

$$f'(2) = -\frac{F_x(2, 2)}{F_y(2, 2)} = -\frac{13}{-13} = 1.$$

Równanie stycznej do wykresu $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

więc w punkcie $(2, 2)$ przybiera postać

$$y - 2 = 1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = x.$$

(Nietrudno zauważyć, że cała krzywa to prosta $y = x$.)

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Wyznacz ekstrema funkcji $y = f(x)$ zadanej w sposób niejawni równaniem

$$x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0.$$

Rozwiązanie: Mamy $F(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$. Wiemy, że w otoczeniu tych punktów (x_0, y_0) krzywej, w których $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ możemy ją przedstawić jako wykres $y = f(x)$, oraz

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Szukamy więc punktów krzywej $F(x, y) = 0$, w których spełnione są warunki $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ oraz $F_x(x_0, y_0) = 0$ (czyli punktów w których f istnieje i ma punkt krytyczny). Wstawiamy wzory i otrzymujemy punkty

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}} - 2\right), \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}} - 2\right).$$

Zastosujemy test 2 pochodnej dla ustalenia, czy mamy do czynienia z ekstremami i jakimi. Wiemy, że w punkcie krytycznym ($f'(x_0) = 0$) mamy wzór:

$$f''(x_0) = -\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Mamy $F_{xx} \equiv 2$, więc znak f'' jest wyznaczony przez znak F_y . Wstawiamy oba punkty do wzoru $F_y(x, y) = 2y - x + 4$, i dostajemy

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}} - 2\right) \quad - \text{maksimum}, \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}} - 2\right) \quad - \text{minimum}.$$

Uwaga: To zadanie możemy rozwiązać wprost, nie odwołując się do rachunku funkcji uwikłanych. Równanie zadające krzywą daje się jawnie rozwikłać, jako równanie kwadratowe:

$$f(x) = \frac{x}{2} - 2 \pm \sqrt{4 - \frac{3}{4}x^2}, \quad \text{dla } |x| \leq \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Pomiędzy punktami $-4/\sqrt{3}$ i $4/\sqrt{3}$ mamy dwie gałęzie rozwiązania, jedną powyżej, a drugą poniżej prostej $y = x/2 - 2$. Dolna gałąź ma minimum, a górna maksimum.



Nazwisko i imię:

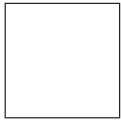
Zadanie 3. Znajdź wartość najmniejszą i największą podanej funkcji na podanym zbiorze:

$$f(x, y) = x^4 + y^4, \quad x^2 + y^2 \leq 9.$$

Rozwiązanie: Wartości największa i najmniejsza mogą być przyjęte wewnątrz obszaru, wtedy są to ekstrema lokalne, albo na brzegu, wtedy są to ekstrema warunkowe. Poszukajmy najpierw ekstremów lokalnych wewnątrz obszaru. Mamy $f_x(x, y) = 4x^3$, $f_y(x, y) = 4y^3$, czyli jedynym punktem krytycznym naszej funkcji jest punkt $(0, 0)$, w którym przyjmuje ona wartość 0, która jest wartością najmniejszą (globalnie). Wartość największa musi być przyjęta na brzegu obszaru, czyli musi być ekstremum warunkowym (warunek $x^2 + y^2 = 9$). Korzystamy z metody mnożników Lagrange'a.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9, \\ 4x^3 &= \lambda 2x, \\ 4y^3 &= \lambda 2y. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są punkty $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 3)$ i $(\pm 3/\sqrt{2}, \pm 3/\sqrt{2})$. W tych punktach funkcja przyjmuje wartości 81 i 81/2. Widzimy więc, że wartość największa to 81 (przyjęta w punktach $(\pm 3, 0)$ i $(0, \pm 3)$) a wartość najmniejsza to 0 (przyjęta w punkcie $(0, 0)$).



Pierwsza litera nazwiska

4

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Zbadaj, czy dla podanej funkcji istnieją pochodne cząstkowe w podanym punkcie:

$$f(x, y, z) = \sqrt[5]{xy(z-1)}, \quad (0, 0, 1),$$

Rozwiązanie: Mamy $f(x, 0, 1) \equiv 0$, więc pochodna cząstkowa po x istnieje w punktach $(x, 0, 1)$ (w szczególności w punkcie $(0, 0, 1)$), i wynosi 0 - to jest pochodna funkcji stałej. Podobnie, $f(0, y, 1) \equiv 0$, więc pochodna cząstkowa po y istnieje w punktach $(0, y, 1)$ i wynosi 0. Podobnie, $f(0, 0, z) \equiv 0$, więc pochodna cząstkowa po z istnieje we wszystkich punktach prostej $(0, 0, z)$ (w szczególności w punkcie $(0, 0, 1)$) i wynosi 0. Podsumowując, wszystkie pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie $(0, 0, 1)$ istnieją (i są równe 0).



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 1 podanej funkcji:

$$f(x, y, z) = \sin(x \cos(y \sin z)).$$

Rozwiązanie: Mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \cos(x \cos(y \sin z)) \cdot \cos(y \sin z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \cos(x \cos(y \sin z)) \cdot (-x \sin(y \sin z)) \cdot \sin z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \cos(x \cos(y \sin z)) \cdot (-x \sin(y \sin z)) \cdot y \cos z.$$



Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź następującą granicę, lub pokaż, że nie istnieje

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \log(x^2 + y^2).$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, a więc

$$|y \log(x^2 + y^2)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} |\log(x^2 + y^2)|.$$

Warunek $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ jest równoważny $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$, oraz dla $x^2 + y^2 \leq 1$ mamy $\log(x^2 + y^2) \leq 0$, więc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} |\log(x^2 + y^2)| = - \lim_{r \rightarrow 0} r \log r^2 \stackrel{\text{L'H}}{=} - 2 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^2}} = 2 \lim_{r \rightarrow 0} r = 0.$$

Mamy

$$-\sqrt{x^2 + y^2} |\log(x^2 + y^2)| \leq y \log(x^2 + y^2) \leq \sqrt{x^2 + y^2} |\log(x^2 + y^2)|,$$

a skrajne funkcje mają wspólną granicę 0, więc także

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \log(x^2 + y^2) = 0.$$