

Kolokwium 2
16.12.16

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz całkę podwójną:

$$\iint_D [x + y] \, dx \, dy, \quad D = [0, 2] \times [0, 2], \quad [\cdot] - \text{część całkowita}.$$

Rozwiązanie: Funkcja przyjmuje całkowite wartości 0, 1, 2, 3 w ukośnych pasach $k \leq [x + y] < k + 1$. Można więc obliczyć całkę jako objętość bryły - podstawami bryłek są trójkąty lub trapezy, wysokość stała. Można też po prostu policzyć całki iterowane. Całkując na zewnątrz po x wygodnie jest podzielić przedział całkowania na $[0, 1]$ i $[1, 2]$:

$$\begin{aligned} \iint_D [x + y] \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 0 \, dy + \int_{1-x}^{2-x} 1 \, dy + \int_{2-x}^2 2 \, dy \right) dx + \\ &\quad + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} 1 \, dy + \int_{2-x}^{3-x} 2 \, dy + \int_{3-x}^2 3 \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (1 + 2x) \, dx + \int_1^2 (2 - x + 2 + (x - 1) \cdot 3) \, dx \\ &= (x + x^2) \Big|_0^1 + (x^2 + x) \Big|_1^2 \\ &= 6. \end{aligned}$$



Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz całkę podwójną:

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D : y \geq 0, \quad y \leq x^2 + y^2 \leq x.$$

Rozwiązanie: Łatwo rozpoznać obszar całkowania. To jest obszar *wewnątrz* koła o promieniu $\frac{1}{2}$ i środku w $(1, 0)$, na *zewnątrz* koła o promieniu $\frac{1}{2}$ i środku w $(0, 1)$, i powyżej osi OX . Wprowadzamy współrzędne biegunowe na płaszczyźnie, i odczytujemy opis obszaru D w tych współrzędnych:

$$r \sin \varphi \leq r^2 \leq r \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Zauważamy, że z nierówności $\sin \leq \cos$ i $\varphi \in [0, \pi]$ wynika $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Liczymy całkę we współrzędnych biegunowych:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin \varphi}^{\cos \varphi} r^2 \cdot r dr d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^4}{4} \Big|_{\sin \varphi}^{\cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 \varphi - \sin^4 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((1 - \sin^2 \varphi)^2 - \sin^4 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2 \sin^2 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \frac{\sin(2\varphi)}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{8} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

$$x^2 + y^2 - y = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0.$$

Rozwiązanie: $x^2 + y^2 - y = 0$ to wałek pionowy, a $z = x^2 + y^2$ to powierzchnia przecinająca go, podobnie jak $z = 0$ (niżej). Objętość wyraża się więc całką:

$$V = \iint_{x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Wprowadzamy współrzędne biegunowe, i zauważamy, że nasz obszar całkowania wyraża się w tych współrzędnych warunkiem $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq r \leq \sin \varphi$. Całkujemy:

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^\pi \int_0^{\sin \varphi} r^2 \cdot r dr d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^4 \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi r^4 \Big|_0^{\sin \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{16} \int_0^\pi (1 - 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{16} \int_0^\pi \left(1 - 2 \cos 2\varphi + \frac{\cos 4\varphi + 1}{2} \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{16} \int_0^\pi \frac{3}{2} d\varphi \\ &= \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{2} \cdot \pi \\ &= \frac{3\pi}{32}. \end{aligned}$$

Nie bawiliśmy się pod koniec w całkowanie cosinusów, bo wiemy, że ich całka po okresie wynosi 0.



Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz pole tej części powierzchni $2z = xy$, która leży wewnątrz walca $x^2 + y^2 = 4$.

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru na powierzchnię płata. Powierzchnia jest wykresem funkcji $f(x, y)$, więc obszarem parametrów jest $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Obliczamy pochodne cząstkowe:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}xy, \quad f_x(x, y) = \frac{y}{2}, \quad f_y(x, y) = \frac{x}{2}.$$

Wstawiamy do wzoru i liczymy, po drodze zamieniając zmienne na biegunowe:

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{1 + \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{4}} \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{r^2}{4}} \, r \, dr \, d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{r^2}{4}} \, r \, dr \\ &= \left\{ 1 + \frac{r^2}{4} = t \right\} \\ &\quad \left\{ r \, dr = 2 \, dt \right\} \\ &= 4\pi \int_1^2 \sqrt{t} \, dt \\ &= 4\pi \left. \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_1^2 \\ &= \frac{8\pi}{3}(\sqrt{8} - 1). \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}, \quad y^2 + z^2 = a^2.$$

Rozwiązanie: Bryła to przecięcie dwóch walców, pionowego $x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$ oraz poziomego, $y^2 + z^2 = a^2$, leżącego wzdłuż osi OX . Wstawiamy to do wzoru:

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}} (\sqrt{a^2 - y^2} - (-\sqrt{a^2 - y^2})) dx dy \\ &= \iint_{x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}} 2 \sqrt{a^2 - y^2} dx dy \\ &= 2 \int_{-a}^a \left(\int_{-\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{ay-y^2}} dx \right) \sqrt{a^2 - y^2} dy \\ &= 4 \int_0^a \sqrt{ay - y^2} \sqrt{a^2 - y^2} dy \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{y}{a} \\ a dt = dy \end{array} \right\} \\ &= 4 a^3 \int_0^1 \sqrt{t - t^2} \sqrt{1 - t^2} dt. \end{aligned}$$

Ta ostatnia całka wymaga podstawienia, które nie jest być może oczywiste. Dlatego, jeżeli ktoś zostawił to zadanie w tej postaci, to dostawał komplet punktów. Obliczenie tej całki do końca nie było konieczne. Można ją jednak policzyć następująco:

$$\begin{aligned} 4 a^3 \int_0^1 \sqrt{t - t^2} \sqrt{1 - t^2} dt &= 4 a^3 \int_0^1 \sqrt{t} \sqrt{1 - t} \sqrt{1 - t} \sqrt{1 + t} dt \\ &= 2 a^3 \int_0^1 (2 - 2t) \sqrt{t + t^2} dt \\ &= 2 a^3 \int_0^1 (3 - (2t + 1)) \sqrt{t + t^2} dt \\ &= 6 a^3 \int_0^1 \sqrt{t + t^2} dt - 2 a^3 \int_0^1 (2t + 1) \sqrt{t + t^2} dt. \end{aligned}$$

Drugą całkę obliczamy przez podstawienie $s = t^2 + t$ i łatwo otrzymujemy $-a^3\sqrt{8}/3$. Pierwszą całkę najpierw uporządkowujemy, a następnie robimy podstawienie hiperboliczne:

$$\begin{aligned} 6 a^3 \int_0^1 \sqrt{t + t^2} dt &= \frac{3}{2} a^3 \int_1^3 \sqrt{t^2 - 1} dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = \cosh s \\ dt = \sinh s ds \end{array} \right\} \quad \text{gdzie} \quad \cosh s = \frac{e^s + e^{-s}}{2}, \quad \sinh s = \frac{e^s - e^{-s}}{2} \\ &= \frac{3}{2} a^3 \int_{\operatorname{arccosh} 1}^{\operatorname{arccosh} 3} \sinh^2 s ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} a^3 \int_{\operatorname{arccosh} 1}^{\operatorname{arccosh} 3} \frac{e^{2s} - 2 + e^{-2s}}{4} ds \\
&= \frac{3}{8} a^3 \left(\frac{e^{2s}}{2} - 2s + \frac{e^{-2s}}{-2} \right) \Big|_0^{\log(3+\sqrt{8})} \\
&= \frac{3}{8} a^3 \left(\frac{(3+\sqrt{8})^2}{2} - 2\log(3+\sqrt{8}) - \frac{(3+\sqrt{8})^{-2}}{2} \right).
\end{aligned}$$

Po drodze, rozwiązując proste równanie kwadratowe otrzymaliśmy $\operatorname{arccosh} 1 = 0$ i $\operatorname{arccosh} 3 = \log(3+\sqrt{8})$. Jeszcze raz, powyższy rachunek nie był wymagany do zrobienia tego zadania.



Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

$$2z = x^2 + y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Rozwiązanie: Sprawdzamy gdzie powierzchnie się przecinają:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow r^2 = 2r \Leftrightarrow r = 0 \vee r = 2.$$

Widzimy, że dla $0 \leq r \leq 2$ powierzchnia $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (stożek) leży powyżej powierzchni $2z = x^2 + y^2$ (paraboloida), więc objętość wyraża się całką:

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dx dy &= \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(r - \frac{r}{2} \right) r dr d\varphi \\ &= 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{8} \right) \Big|_0^2 \\ &= 2\pi \left(\frac{8}{3} - \frac{16}{8} \right) \\ &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$