

**Kolokwium 3**
20.01.17

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz całkę:

$$\iiint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

gdzie $\mathcal{D}$ określony jest nierównościami $z \geq 0$, $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$.**Rozwiązanie:** Wprowadzamy współrzędne sferyczne:

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta,$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = \rho \cos \theta,$$

$$\Rightarrow |J| = \rho^2 \sin \theta,$$

Obszar D we współrzędnych sferycznych ma postać:

$$\Delta = \{r \leq \rho \leq R\}.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_r^R \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_r^R \rho^4 d\rho \\ &= 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R^5 - r^5}{5} \\ &= \frac{8\pi(R^5 - r^5)}{15}. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

2

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Skorzystaj z Tw. Greena i oblicz następującą całkę krzywoliniową:

$$\int_C y \, dx - x \, dy,$$

gdzie C jest brzegiem kwadratu $[0, 3] \times [0, 3]$, obiegany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Rozwiązanie: Orientacja C jest dodatnia względem wnętrza kwadratu, więc

$$\int_C y \, dx - x \, dy = \iint_{[0,3] \times [0,3]} (-1 - 1) \, dx \, dy = -2 \iint_{[0,3] \times [0,3]} dx \, dy = -18,$$

gdyż całka z funkcji stale $\equiv 1$ jest równa polu obszaru.



Pierwsza litera nazwiska

3

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz całkę krzywoliniową zorientowaną:

$$\int_{\gamma} x \, dx + y \, dy + (x + y - 1) \, dz,$$

gdzie γ jest odcinkiem prostej od $(1, 1, 1)$ do $(2, 3, 4)$.

Rozwiązanie: Napiszmy parametryzację odcinka:

$$\gamma(t) = (1 + t, 1 + 2t, 1 + 3t), \quad t \in [0, 1].$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} x \, dx + y \, dy + (x + y - 1) \, dz &= \int_0^1 \left((1 + t) \cdot 1 + (1 + 2t) \cdot 2 + (1 + t + 1 + 2t - 1) \cdot 3 \right) dt \\ &= \int_0^1 (14t + 6) \, dt \\ &= (7t^2 + 6t) \Big|_0^1 \\ &= 7 + 6 \\ &= 13. \end{aligned}$$



Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Pole wektorowe sił działających na obiekt w $\mathbf{R}^2$ ma stałą wartość $\vec{F} = (F, 0)$. Oblicz pracę wykonaną przez pole, gdy obiekt przebiega łuk okręgu $x^2 + y^2 = R^2$ leżący w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych $(x, y \geq 0)$, od punktu $(R, 0)$ do $(0, R)$.

Rozwiązanie: Parametryzacja łuku:

$$x(t) = R \cos t, \quad y(t) = R \sin t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Praca jest równa całce zorientowanej:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot ds \\ &= \int_{\gamma} F dx + 0 dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F R (-\sin t) dt \\ &= F R \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -F R. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę krzywoliniową niezorientowaną:

$$\int_{\gamma} \frac{z}{x^2 + y^2} ds,$$

gdzie γ jest pierwszym zwojem linii śrubowej $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$.

Rozwiązanie: Pierwszy zwój oznacza zakres parametru: $t \in [0, 2\pi]$. Mamy, dla całki krzywoliniowej niezorientowanej

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z}{x^2 + y^2} ds &= \int_0^{2\pi} \frac{at}{a^2} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + a^2} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} t \sqrt{2a^2} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} t dt \\ &= \sqrt{2} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \sqrt{2} 2 \pi^2. \end{aligned}$$



Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź masę ćwiartki elipsy $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$ znajdującej się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych ($x, y \geq 0$), jeżeli gęstość w każdym punkcie krzywej jest równa y - współrzędnej tego punktu ($\rho(x, y) = y$).

Rozwiązanie: Masa wyraża się całką nieorientowaną. Zakres parametru to $[0, \frac{\pi}{2}]$ (pierwsza ćwiartka).

$$\begin{aligned} M &= \int_{\gamma} \rho(x, y) ds \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (\cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{4 - 3 \cos^2 t} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cos^2 t} dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \\ du = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t dt \end{array} \right\} \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - u^2} du \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = \sin t \\ du = \cos t \end{array} \right\} \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\cos t + 1) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sin t + t) \Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned}$$