

Elementarna statystyka

Alexander Bendikov

26 marca 2017

Klasyczny model: eksperyment o jednakowo prawdopodobnych wynikach

Założenia:

- 1 Przestrzeń próbek S ma skończenie wiele wyników $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$,
- 2 Wszystkie wyniki $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ są jednakowo prawdopodobne:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n).$$

Twierdzenie

Dla każdego zdarzenia $A \subset S$ mamy

$$P(A) = \frac{\#\{A\}}{\#\{S\}} = \frac{\text{ilość wyników w } A}{\text{ilość wszystkich wyników w } S}.$$

Przykłady: (a) Rzucamy trzema kostkami. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, znajdziemy $P(\text{suma} = 7)$. Mamy

- $n = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$,
- oznaczmy Σ - suma wszystkich oczek, Σ' - suma oczek z kostek 2 i 3, k_1 - ilość oczek na pierwszej kostce. Mamy $(\Sigma = 7) = (k_1 = 1, \Sigma' = 6) + (k_1 = 2, \Sigma' = 5) + (k_1 = 3, \Sigma' = 4) + (k_1 = 4, \Sigma' = 3) + (k_1 = 5, \Sigma' = 2)$. Wszystkie te zdarzenia są parami rozłączne. Liczymy ilość wyników w każdym z tych zdarzeń. $(\Sigma' = 6)$ ma 5 wyników: $(1, 5), \dots, (5, 1)$. Podobnie liczymy ilość wyników w pozostałych zdarzeniach. Otrzymujemy

$$\#\{\Sigma = 7\} = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.$$

Otrzymujemy więc

$$P(\Sigma = 7) = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}.$$

(b) Z grupy 10 małżeństw (małżeństw tradycyjnych, 1 mężczyzna i 1 kobieta :-)) wybrana zostanie 1 kobieta K i 1 mężczyzna M . Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana para jest małżeństwem $\{K \heartsuit M\}$?

- Łatwo zauważyć, że $n = 10 \cdot 10$,
- $\#\{K \heartsuit M\} = 10$,
- mamy więc $P(K \heartsuit M) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność

Interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzenia w sytuacji, gdy pewna informacja o wyniku (zwykle niepełna) jest dostępna. Tworzymy więc nowy eksperyment: rozważamy tylko te wyniki, przy których zaszło pewne zdarzenie A i definiujemy nowe prawdopodobieństwo

$$\tilde{P}(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

To nowe prawdopodobieństwo nazywamy *prawdopodobieństwem warunkowym*, i oznaczamy $P(B|A)$. Prawdopodobieństwo warunkowe rozumiemy tak: jest to prawdopodobieństwo B w sytuacji, gdy wiadomo, że zaszło A .

Przykład: W pojemniku jest 10 białych, 5 żółtych i 10 czarnych kul. Wyciągnięto losowo jedną kulę, i spostrzeżono, że nie była czarna (zdarzenie $\overline{C}$). Jakie jest prawdopodobieństwo, że była żółta (zdarzenie $\dot{Z}$)? Możemy popatrzeć się na to na 2 sposoby:

- 1 Mamy znaleźć prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(\dot{Z}|\overline{C}) = \frac{P(\dot{Z} \cdot \overline{C})}{P(\overline{C})}.$$

Mamy $\dot{Z} \cdot \overline{C} = \dot{Z}$ i w takim razie $P(\dot{Z}|\overline{C}) = \frac{\frac{5}{25}}{\frac{15}{25}} = \frac{1}{3}$.

Zauważmy, że $P(\dot{Z}) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} \neq P(\dot{Z}|\overline{C})$.

- 2 **Zredukowana przestrzeń próbek:** Mamy nową przestrzeń próbek $\tilde{S} = \{\dot{Z} + B\}$ (B - biała) z wszystkimi wynikami równo prawdopodobnymi. W tej sytuacji $\tilde{P}(\dot{Z}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Formuła produktowa:

$$P(B \cdot A) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Przykład: Losowo wybrano 2 ludzi z grupy 4 kobiet i 6 mężczyzn. Odpowiemy na dwa pytania: 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta dwójka to kobiety? 2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana dwójka to osoby przeciwnej płci?

- ❶ Oznaczmy: K_1 - pierwsza wybrana osoba to kobieta, K_2 - druga wybrana osoba to kobieta. Mamy

$$P(K_1 \cdot K_2) = P(K_1) \cdot P(K_2|K_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}.$$

- ❷ Oznaczamy dodatkowo: M_1 - pierwsza wybrana osoba to mężczyzna, i M_2 - druga wybrana osoba to mężczyzna.

$$\begin{aligned} \text{Liczymy: } P(K_1 \cdot M_2 + M_1 \cdot K_2) &= P(K_1 \cdot M_2) + P(M_1 \cdot K_2) = \\ &= P(K_1) \cdot P(M_2|K_1) + P(M_1) \cdot P(K_2|M_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Hipotezy: Załóżmy, że mamy dwa zdarzenia H_1, H_2 takie, że $H_1 \cdot H_2 = \emptyset$ oraz $H_1 + H_2 = S$. Wtedy, dla dowolnego zdarzenia $A \subset S$

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2).$$

Zdarzenia H_1, H_2 to tak zwane hipotezy, i powyższy wzór możemy rozumieć tak, że prawdopodobieństwa zdarzeń możemy obliczać przy założeniu hipotez. W ten sposób odpowiedzieliśmy na pytanie 2 w powyższym przykładzie.

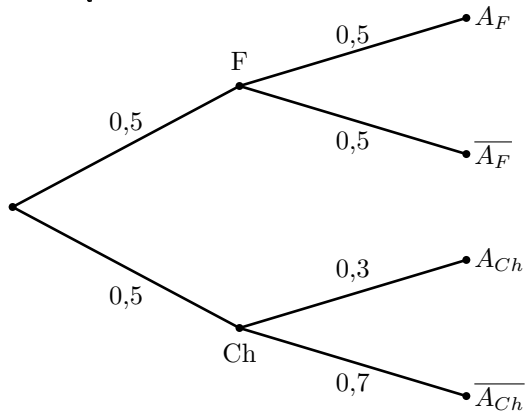
Jeżeli hipotez jest więcej niż 2, otrzymujemy analogiczny wzór:

$$P(A) = \sum P(A|H_k) \cdot P(H_k).$$

Drzewa prawdopodobieństw

Przykład: Student X nie może się zdecydować, czy zapisać się na zajęcia z francuskiego, czy na zajęcia z chemii. X ocenia, że jego szansa na 5 z francuskiego wynosi 0,5, natomiast szansa na 5 z chemii tylko 0,3. X postanawia zdecydować o tym, na które zajęcia się zapisać rzucając monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dostanie 5 z chemii? A jakie jest prawdopodobieństwo, że dostanie 5?

Rozwiązanie:



F - zapisuje się na francuski,
Ch - zapisuje się na chemię,
 A_F - prawd. 5 z francuskiego,
 A_{Ch} - prawd. 5 z chemii,
A - prawd. 5.

$$\begin{aligned}P(A_{Ch}) &= P(Ch) P(A|Ch) = \\&= 0,5 \cdot 0,3 = 0,15,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A_F) &= P(F) P(A|F) = \\&= 0,5 \cdot 0,5 = 0,25,\end{aligned}$$

$$P(A) = P(A_{Ch}) + P(A_F) = 0,4.$$

Zdarzenia niezależne

Definicja

Mówimy, że zdarzenie A jest niezależne od B , jeżeli

$$P(A|B) = P(A).$$

Uwaga: Ogólnie $P(A|B) \neq P(A)$. Rozważmy rzut dwoma kostkami, i niech, jak zwykle, Σ będzie sumą oczek.

- $P(\Sigma = 8) = \frac{5}{36} \neq \frac{1}{6} = P(\Sigma = 8 | \text{pierwsza} = 4),$
- Z drugiej strony $P(\Sigma = 7) = \frac{1}{6} = P(\Sigma = 7 | \text{pierwsza} = 4).$

Własność

Zdarzenia A i B są niezależne dokładnie wtedy, gdy

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Definicja

Zdarzenia $A, B, \dots, D$ nazywają się wzajemnie niezależnymi, jeżeli

$$P(A \cdot B \cdot \dots \cdot D) = P(A) \cdot P(B) \cdot \dots \cdot P(D).$$

Przykład: Rzucamy monetą wielokrotnie, aż wyrzucimy orła.
Zakładamy, że wyniki kolejnych rzutów są zdarzeniami wzajemnie niezależnymi, jakie jest prawdopodobieństwo, że będziemy musieli rzucać co najmniej 6 razy? A jakie, że będziemy musieli rzucać *dokładnie* 6 razy?

Rozwiązanie: Niech R_k oznacza zdarzenie, że w k -tym rzucie wypadła reszka, R oznacza zdarzenie, że musieliśmy rzucać przynajmniej 6 razy. Zauważmy, że H oznacza, że w pierwszych 5 rzutach wypadła reszka, czyli $H = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5$. Mamy więc:

$$P(H) = P(R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5) = P(R_1) \cdot P(R_2) \cdot P(R_3) \cdot P(R_4) \cdot P(R_5) = \frac{1}{32}.$$

Żeby odpowiedzieć na drugie pytanie, niech H' oznacza zdarzenie, że musieliśmy rzucać dokładnie 6 razy, czyli w pierwszych 5 rzutach wypadły reszki, a w 6 rzucie orzeł (O_6). Mamy więc $H' = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5 \cdot O_6$, czyli

$$\begin{aligned} P(H') &= P(R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5 \cdot O_6) = \\ &= P(R_1) \cdot P(R_2) \cdot P(R_3) \cdot P(R_4) \cdot P(R_5) \cdot P(O_6) = \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Zmienne losowe

Definicja

Wartości liczbowe, które są przypisane wynikom eksperymentów nazywają się zmiennymi losowymi

Przykłady: (a) Rzucamy dwoma kostkami. Wynikiem jest ilość wyrzuconych oczek (i, j) . Suma $\Sigma = i + j$ jest zmienną losową, przyjmuje ona możliwe wartości: $2, 3, \dots, 12$.

(b) Rzucamy monetą, dopóki nie wypadnie orzeł. Niech N oznacza ilość potrzebnych rzutów. N jest zmienną losową, która może przyjąć wartości $1, 2, \dots$.

(c) Mierzymy zawartość procentową X jakiegoś składnika w próbce o nieznanym składzie. X jest zmienną losową, i może przyjąć wartości w przedziale $[0, 100]$.

Dyskretne zmienne losowe

Definicja

Zmienna losowa X nazywa się dyskretną jeżeli wartości które może przyjąć można ustawić w ciąg (skończony lub nieskończony)

$x_1, x_2, \dots$

Przykłady: (a) Rzut dwoma kostkami. $\Sigma = i + j$ jest dyskretną zmienną losową.

(b) Rzucamy monetą do momentu wyrzucenia orła. Ilość potrzebnych rzutów N to dyskretna zmienna losowa.

(c) mierzymy procentową zawartość X składnika w nieznaney próbce. Możliwe wartości X to przedział $[0, 100]$, a więc X nie jest dyskretną zmienną losową.

Niech X będzie dyskretną zmienną losową, o wartościach $x_1, x_2, x_3, \dots$. Zapisujemy to krótko $X \in \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Niech

$$p_k = P(X = x_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Wartości x_k wraz z odpowiadającymi im prawdopodobieństwami p_k nazywamy *rozkładem* dyskretnej zmiennej losowej X . Rozkład często zapisujemy przy pomocy tabelki:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$

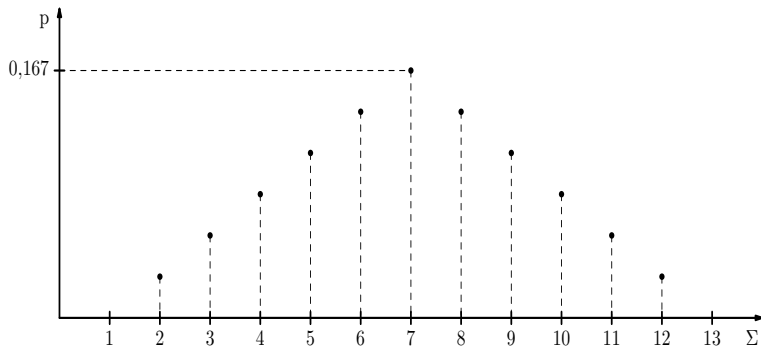
Mamy następujące oczywiste własności:

- 1 $p_k \geq 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$
- 2 $p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1.$

Przykłady: (a) Rzucamy dwukrotnie kostką, i rozważamy zmienną losową $\Sigma = i + j$.

Σ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

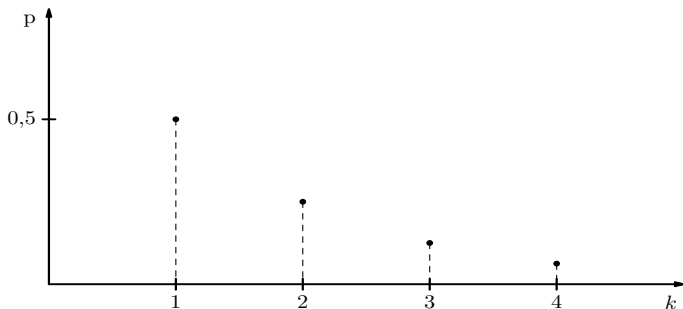
Rozkład możemy też zilustrować przy pomocy wykresu:



(b) Rzucamy monetą do momentu wyrzucenia orła, i rozważamy zmienną N - ilość rzutów.

N	1	2	...	k	...
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	...	$\frac{1}{2^k}$	...

Rozkład w postaci wykresu:



(c) X aplikuje o dwie posady w Instytucie Matematycznym

- A - otrzyma ofertę na 1 posadę, $P(A) = 0,5$
- B - otrzyma ofertę na 2 posadę, $P(B) = ?$
- $P(B|A) = 0,2$, $P(B|\bar{A}) = 0,4$
- Y - liczba ofert które X otrzymał, $Y = 0,1,2$

Mamy znaleźć rozkład zmiennej Y .

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} p_0 = P(Y = 0) &= P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A}) = \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B|\bar{A})) = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 = P(Y = 1) &= P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = \\ &= P(A)P(\bar{B}|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \\ &= P(A)(1 - P(B|A)) + (1 - P(A))P(B|\bar{A}) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,4 = 0,6 \end{aligned}$$

W końcu

$$p_2 = P(Y = 2) = 1 - p_0 - p_1 = 0,1$$

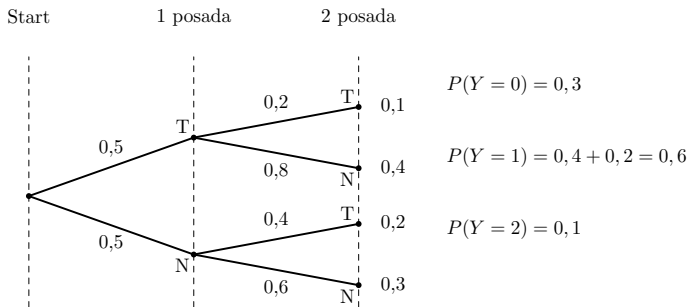
lub

$$p_2 = P(A \cdot B) = P(A)P(B|A) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$$

Rozkład zmiennej Y możemy zapisać w postaci tabelki:

Y	0	1	2
P	0,3	0,6	0,1

Rozkład zmiennej Y możemy też odczytać z drzewka prawdopodobieństw:



Możemy też zadać dodatkowe pytanie: jakie jest prawdopodobieństwo p , że X otrzyma co najmniej jedną ofertę? Znając rozkład zmiennej Y możemy łatwo odpowiedzieć: $p = p_1 + p_2 = 0,6 + 0,1 = 0,7$.

Wartość oczekiwana dyskretnej zmiennej losowej

Definicja

Niech X będzie dyskretną zmienną losową przyjmującą wartości $x_1, x_2, x_3, \dots$ z prawdopodobieństwami $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Wartością oczekiwaną zmiennej X , oznaczaną $E(X)$ nazywamy sumę

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots$$

Motywacja: Będziemy powtarzać doświadczenie, związane ze zmienną losową X . Niech X_1 będzie wynikiem za pierwszym razem, X_2 drugim wynikiem, i tak dalej.

Definicja

Wartością średnią $\bar{X}$ nazywamy zmienną losową

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Fakt

$$\bar{X} \rightarrow E(X) \quad \text{gdy} \quad n \rightarrow \infty.$$

Przykłady: (a) Rzucamy kostką, X to ilość oczek. Mamy $p_i = P(X = i) = \frac{1}{6}$, więc

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5.$$

(b) Wróćmy do przykładu naukowca X aplikującego o 2 pozycje, oraz Y to ilość ofert. Znaleźliśmy wcześniej rozkład zmiennej Y :

Y	0	1	2
P	0,3	0,6	0,1

W takim razie

$$E(Y) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,1 = 0,8.$$

(c) Rzucanie monetą, do momentu pierwszego orła, X jest ilością rzutów. Obliczyliśmy wcześniej, że $p_i = P(X = i) = \frac{1}{2^i}$, a więc

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 3 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots = 2.$$

(d) Rzucamy dwoma kostkami, Σ jest sumą $i + j$. Wyznaczyliśmy wcześniej rozkład Σ :

Σ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Mamy więc:

$$E(X) = \frac{1}{36}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 12) = 7$$

Własności $E(X)$

- ① $E(C) = C$,
- ② $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$,
- ③ $E(CX) = CE(X)$,
- ④ $E(X \cdot Y) \stackrel{?}{=} E(X)E(Y)$.

Ostatnia własność (4) może być spełniona lub nie. Zobaczmy przykłady.

Przykład: Rzucamy monetą i niech $Z = 0$ lub 1 w zależności od tego, czy wypadła reszka czy orzeł. Powtarzamy próbę dwukrotnie, i niech Z_1 będzie pierwszym wynikiem, a Z_2 drugim.

- ① $X = Z_1, Y = Z_2$. Wtedy $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$, czyli $E(X)E(Y) = \frac{1}{4}$.

XY	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

 $\Rightarrow E(X \cdot Y) = \frac{1}{4}.$

W tym przypadku własność (4) jest spełniona.

- ② $X = Z_1 + Z_2, Y = Z_1 \cdot Z_2$. Wtedy $E(X) = 1$ i $E(Y) = \frac{1}{4}$.
Mamy

$$X \cdot Y = Z_1 Z_2 (Z_1 + Z_2) = Z_1^2 Z_2 + Z_1 Z_2^2 = 2Z_1 Z_2 \quad (\text{bo } Z_i^2 = Z_i).$$

W tym przypadku własność (4) nie jest spełniona, bo

$$E(XY) = 2E(Z_1 Z_2) = 2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq E(X)E(Y) = \frac{1}{4}.$$

Definicja

Zmienne X i Y nazywają się niezależnymi, jeżeli dla dowolnych wartości x_i oraz y_j zdarzenia $\{X = x_i\}$ oraz $\{Y = y_j\}$ są niezależne.

Własność: Jeżeli X oraz Y są niezależne, to zachodzi własność (4):

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

Ogólniej, jeżeli $X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_k = a_k$ przyjmują wartości niezależnie, to

$$\begin{aligned} P(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_k = a_k) &= \\ &= P(X_1 = a_1) \cdot P(X_2 = a_2) \cdot \dots \cdot P(X_k = a_k), \end{aligned}$$

oraz

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \dots \cdot E(X_k).$$

Przykład: Przypuśćmy, że w pewnej fabryce zdarzają się wypadki, i że średnia liczba wypadków rocznie wynosi 2. Przypuśćmy też, że liczba robotników rannych w poszczególnych wypadkach to niezależne zmienne losowe o takim samym rozkładzie, z wartością oczekiwaną 2,5. Niech N będzie ilością robotników rannych w ciągu roku, i obliczmy wartość oczekiwaną N . Rozwiązanie: Niech A będzie liczbą wypadków, a $W_1, \dots, W_A$ będą liczbami poszkodowanych robotników w kolejnych wypadkach. Zmienna $N = W_1 + W_2 + \dots + W_A$. Mamy więc

$$\begin{aligned} E(N) &= \sum_k E(W_1 + \dots + W_k | A = k) P(A = k) \\ &= \sum_k E(W_1 + \dots + W_k) P(A = k) \\ &= \sum_k k \cdot E(W) P(A = k) \\ &= E(W) \cdot E(A) \\ &= 2 \cdot 2,5 = 5. \end{aligned}$$

Wariancja zmiennej losowej

Definicja

Wariancja $Var(X)$ zmiennej losowej X jest zdefiniowana następująco (używamy też określenia rozrzut):

$$Var(X) = E(X - E(X))^2.$$

Przydatny wzór: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Przykłady: (a) Zmienna losowa Bernoulliego (z niesymetryczną monetą)

X	0	1
P	q	p
X^2	0	1
P	q	p

- $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$
- $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = pq.$

(b) Aplikacja o 2 pozycje, X jest ilością uzyskanych:

X	0	1	2
P	0.3	0.6	0.1

X^2	0	1	4
P	0.3	0.6	0.1

- $E(X) = 0.8,$
- $E(X^2) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,1 = 1,$
- $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - 0,64 = 0,36.$

Własności wariancji

- 1 $X = \text{const} \Rightarrow \text{Var}(X) = 0,$
- 2 $\text{Var}(X + c) = \text{Var}(X),$
- 3 $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X),$
- 4 Jeżeli X, Y są niezależne, to

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

Przykłady: (a) Niech $X = Y$. Wtedy

- $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(2X) = 4\text{Var}(X),$
- $\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 2\text{Var}(X) \neq \text{Var}(X + Y).$

(b) Mała firma taksówkowa ma 10 taksówek. Każda taksówka dostaje w ciągu roku mandaty z takim samym prawdopodobieństwem: 0 mandatów z prawdopodobieństwem 0.3, 1 mandat z prawdopodobieństwem 0.5 i 2 mandaty z prawdopodobieństwem 0.2 (nie dostają więcej niż 2 mandaty, bo po drugim muszą już bardzo uważać). Zakładając, że ilości mandatów otrzymywanych przez poszczególne taksówki są zmiennymi niezależnymi, znajdź oczekiwaną rocznie ilość mandatów, oraz jej wariancję.

Rozwiązanie: $\#$ - ilość mandatów. $\# = \#_1 + \dots + \#_{10}$, $\{\#_i\}$ - zmienne niezależne.

$\#_i$	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

 $\Rightarrow E(\#_i) = 0,9, \text{ } Var(\#_i) = 0,49.$

W takim razie $E(\#) = 10E(\#_i)$, $Var(\#) = 10Var(\#_i) = 4,9$.