

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 2

10.10.2016

- (1) Znajdź potęgi naturalne liczby $\mathbf{i}$, czyli wyznacz liczby zespolone postaci $\mathbf{i}^n$ dla wszystkich liczb naturalnych n .
- (2) Kiedy kwadrat liczby $a + b\mathbf{i}$ jest liczbą: a) rzeczywistą, b) ujemną, c) urojoną?
- (3) Jakie muszą być argumenty liczb zespolonych z, w , różnych od zera, aby a) iloczyn zw , b) iloraz z/w były rzeczywiste?
- (4) Dla danych liczb zespolonych $z = a + b\mathbf{i}$ oraz $w = c + d\mathbf{i}$ wyznacz: $\Re(z + w)$, $\Im(z + w)$, $\Re(zw)$, $\Im(zw)$, w zależności od a, b, c, d .
- (5) Udowodnij następujące własności sprzężenia liczb zespolonych:
 - (a) $\overline{\overline{z}} = z$,
 - (b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
 - (c) $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$,
 - (d) $\Re(z) = (z + \overline{z})/2$, $\Im(z) = (z - \overline{z})/2\mathbf{i}$.
- (6) Znajdź moduły liczb zespolonych $z = -2 - 3\mathbf{i}$ oraz $z = 1 - \mathbf{i}$.
- (7) Udowodnij, że dla dowolnych liczb $z, w \in \mathbf{C}$ mamy następujące własności:
 - (a) $|z| \geq 0$ i $|z| = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $z = 0$,
 - (b) $|zw| = |z||w|$,
 - (c) $|z - w| \geq ||z| - |w||$.
- (8) Wyznacz geometrycznie (naskicuj na płaszczyźnie) zbiór $\{z \in \mathbf{C} : |z - 1 - \mathbf{i}| = 1\}$.
- (9) Naskicuj na płaszczyźnie zbiory liczb $z \in \mathbf{C}$ spełniających nierówności:
 - (a) $|z| < 2$,
 - (b) $|z + 3\mathbf{i}| < 1$,
 - (c) $|z + 4 - 2\mathbf{i}| \leq 3$.
- (10) Wyznacz postać trygonometryczną następujących liczb zespolonych:
 - (a) $-6 + 6\mathbf{i}$,
 - (b) $2\mathbf{i}$,
 - (c) $1 + \mathbf{i}$,
 - (d) $2\sqrt{2} + \mathbf{i}$.
- (11) Wykonaj działania:
 - (a) $\frac{1 + \mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}}$,
 - (b) $\frac{2\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}$,
 - (c) $\frac{4 - 3\mathbf{i}}{4 + 3\mathbf{i}}$.
- (12) Udowodnij, że dla $z = r(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi)$ oraz $w = s(\cos \psi + \mathbf{i} \sin \psi)$ zachodzi wzór

$$z \cdot w = r \cdot s (\cos(\varphi + \psi) + \mathbf{i} \sin(\varphi + \psi)).$$

Wynioskuj, że dla dowolnej liczby $k \in \mathbf{Z}$ mamy wzór

$$z^k = r^k (\cos(k\varphi) + \mathbf{i} \sin(k\varphi)).$$

- (13) Znajdź wszystkie wartości pierwiastków:
 - (a) $\sqrt[4]{1}$,
 - (b) $\sqrt[3]{-1}$,
 - (c) $\sqrt[4]{1 + \mathbf{i}}$,
 - (d) $\sqrt[3]{2 - 2\mathbf{i}}$,
 - (e) $\sqrt[6]{-27}$,
 - (f) $\sqrt{3 + 4\mathbf{i}}$,
 - (g) $\sqrt[3]{1}$,
 - (h) $\sqrt[3]{\mathbf{i}}$.Pokaż ich położenie na płaszczyźnie.
- (14) Udowodnij równość $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.
- (15) Niech $a, b, c \in \mathbf{C}$ będą dowolne, $a \neq 0$ i niech $d \in \mathbf{C}$ będzie jednym z pierwiastków $\sqrt{b^2 - 4ac}$. Udowodnij, że pierwiastki równania $az^2 + bz + c = 0$ są postaci

$$z = \frac{-b \pm d}{2a}.$$