

ANALIZA MATEMATYCZNA B3
LISTA ZADAŃ 1

3.10.2016

(1) Sprawdź, które z podanych zbiorów są: ograniczone, otwarte, domknięte, są obszarami:

- (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2\}$,
- (ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$,
- (iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$.

(2) Wyznacz i naszkicuj dziedziny naturalne funkcji:

- (a) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$,
- (b) $g(x, y) = \log \frac{x^2 + y^2 - 4}{9 - x^2 - y^2}$,
- (c) $h(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2}$,
- (d) $k(x, y, z) = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$.

(3) Znajdź poziomice wykresów podanych funkcji, i na tej podstawie naszkicuj ich wykresy:

- (a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- (b) $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$,
- (c) $h(x, y) = \sin y$,
- (d) $p(x, y) = e^{x-y}$.

(4) zbadaj, czy podane ciągi są zbieżne, i znajdź ich ewentualne granice:

- (a) $(x_n, y_n) = ((-1)^n, \sin \frac{\pi}{xy})$,
- (b) $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{n^2}{n^2 + 1}, \sqrt[n]{2}, 3\right)$.

(5) Oblicz, jeżeli istnieją, podane granice funkcji:

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$,
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$,
- (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x + y - 2}{x^2 + y^2 - 2}$,
- (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi,0)} \frac{\sin^2 x}{y^2}$,
- (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \log(x^2 + y^2)$,
- (f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$,
- (g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y}$,
- (h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

(6) Znajdź zbiory ciągłości podanych funkcji:

- (a) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{dla } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$
- (b) $f(x, y) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } y \geq 0 \text{ oraz } x \in \mathbb{R}, \\ 1 & \text{dla } y < 0 \text{ oraz } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

(7) Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 1 podanych funkcji:

- (a) $f(x, y) = \arctan \frac{1 - xy}{x + y}$,
- (b) $f(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$,
- (c) $f(x, y) = e^{\sin \frac{y}{x}}$,
- (d) $f(x, y, z) = \sin(x \cos(y \sin z))$.

- (8) Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego podanych funkcji w podanych punktach:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } xy = 0, \\ 1 & \text{dla } xy \neq 0, \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (0, 0),$$

$$(b) f(x, y, z) = \sqrt[5]{xy(z-1)}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1),$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} x & \text{dla } y = 0, \\ y^2 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (0, 0).$$

- (9) Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu podanych funkcji i sprawdź, czy pochodne mieszane są równe:

$$(a) f(x, y) = \sin(x^2 + y^2), \quad (b) f(x, y) = xe^{xy},$$

$$(c) f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (d) f(x, y, z) = \log(x^2 + y^4 + z^6 + 1).$$

- (10) Zbadaj, czy pochodne mieszane w punkcie $(0, 0)$ są równe dla funkcji:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 - 8y^3}.$$

- (11) Oblicz wskazane pochodne cząstkowe dla podanych funkcji:

$$(a) \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad f(x, y) = \sin xy, \quad (b) \frac{\partial^4 f}{\partial^2 y \partial x \partial y}, \quad f(x, y) = \frac{x+y}{x-y},$$

$$(c) \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}, \quad f(x, y, z) = \frac{x^2 y^3}{z}, \quad (d) \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}, \quad f(x, y, z) = e^{xy+z}.$$