

ANALIZA MATEMATYCZNA B3

LISTA ZADAŃ 2

10.10.2016

(1) Oblicz następujące granice, jeżeli istnieją:

- | | |
|---|--|
| (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2},$ | (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2},$ |
| (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2},$ | (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy}{x^2 + y^2},$ |
| (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} (x-3)(\log y - \log 4),$ | (f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \frac{\log y - \log 4}{x-3},$ |
| (g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \frac{e^{(x-3)^2 + (y-4)^2} - 1}{(x-3)^2 + (y-4)^2},$ | (h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{y-x^2},$ |
| (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} e^{y/x^2},$ | (j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} e^{y^2/x},$ |
| (k) $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y \leq x^2}} \frac{xy}{x^4 + y^4},$ | (l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \log(x^2 + y^2),$ |
| (m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2},$ | (n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0^+)} \frac{\sin x}{y},$ |
| (o) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, 0^+)} x^\alpha y^\beta.$ | |

(2) Znajdź punkty ciągłości i nieciągłości następujących funkcji:

- | | |
|---|---|
| (a) $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x + y),$ | (b) $f(x, y) = y \operatorname{sgn}(x),$ |
| (c) $f(x, y) = [x] + [y + 0, 5],$ | (d) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & : x \geq y, \\ x - y & : x < y, \end{cases}$ |
| (e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x} & : x \neq 0, \\ y & : x = 0, \end{cases}$ | (f) $f(x, y) = \begin{cases} x + y & : x^2 + y^2 \leq 1, \\ x - y & : x^2 + y^2 > 1, \end{cases}$ |
| (g) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & : x \geq 0, \\ 0 & : x < 0, \end{cases}$ | (h) $f(x, y) = \begin{cases} x & : y \geq x^2, \\ x & : y = x^2, \\ y & : y < x^2, \end{cases}$ |
| (i) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & : x + y \leq 1, \\ 0 & : x + y > 1, \end{cases}$ | (j) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 & : \max\{ x , y \} \leq 1, \\ 0 & : \max\{ x , y \} > 1. \end{cases}$ |

(3) Dla jakich wartości parametru p podana funkcja jest ciągła?

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & : (x, y) \neq 0, \\ p & : (x, y) = (0, 0), \end{cases} & \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & : (x, y) \neq 0, \\ p & : (x, y) = (0, 0), \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2} & : (x, y) \neq 0, \\ p & : (x, y) = (0, 0), \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & : (x, y) \neq 0, \\ p & : (x, y) = (0, 0), \end{cases} \\
 \text{(e)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\cos(x^2y^2)}{x^2+y^2} & : (x, y) \neq 0, \\ p & : (x, y) = (0, 0), \end{cases} & \text{(f)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\tan(x^2y^2)}{x^2+y^2} & : (x, y) \neq 0, \\ p & : (x, y) = (0, 0), \end{cases}
 \end{aligned}$$

(4) Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x, y) &= \frac{x^{10}y^{20}}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0, & \text{(b)} \quad f(x, y) &= \frac{e^{xy} - 1}{x}, \quad f(0, y) = y, \\
 \text{(c)} \quad f(x, y) &= \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad f(0, 0) = 0, & \text{(d)} \quad f(x, y) &= x^7y^9 + xe^{xy}, \\
 \text{(e)} \quad f(x, y) &= \sin(x^2 + y^3), & \text{(f)} \quad f(x, y) &= x^{y^x}, \\
 \text{(g)} \quad f(x, y) &= \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0, & \text{(h)} \quad f(x, y) &= \frac{\sin(xy)}{x}, \quad f(0, y) = y, \\
 \text{(i)} \quad f(x, y) &= \frac{\cos(xy)}{xy - \pi/2}, \quad f(x, \pi/2x) = -1
 \end{aligned}$$

(5) Oblicz gradient podanej funkcji:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x, y) &= x^2 + y^2, & \text{(b)} \quad f(x, y) &= x^2 + 3 \sin y, \\
 \text{(c)} \quad f(x, y) &= 1 - x^2 - 4y^2, & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\
 \text{(e)} \quad f(x, y) &= x + 2y + 3, & \text{(f)} \quad f(x, y, z) &= xy^2z^3, \\
 \text{(g)} \quad f(x, y, z) &= x + 2y + 3z, & \text{(h)} \quad f(x, y) &= (x^2 + y^2)^z.
 \end{aligned}$$

(6) Oblicz pochodną kierunkową funkcji w podanym punkcie i kierunku:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x, y) &= x^8y^4 + e^{x^2y} \text{ w punkcie } (0, 5) \text{ w kierunku } (-1, 2), \\
 \text{(b)} \quad f(x, y) &= \sin^2(x^2y^2) \text{ w punkcie } (\pi, 1/\pi) \text{ w kierunku } (3, 7), \\
 \text{(c)} \quad f(x, y) &= \frac{1}{x^2 + y^2} \text{ w punkcie } (1, 1) \text{ w kierunku } (5, 12), \\
 \text{(d)} \quad f(x, y) &= 2xy + x^2y^2 \text{ w punkcie } (0, 5) \text{ w kierunku } (1, -1), \\
 \text{(e)} \quad f(x, y) &= x(x + y)^{20} \text{ w punkcie } (0, 5) \text{ w kierunku } (5, 12), \\
 \text{(f)} \quad f(x, y) &= x^{y+1} \text{ w punkcie } (2, 2) \text{ w kierunku } (1, 1), \\
 \text{(g)} \quad f(x, y) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \text{ w punkcie } (1, 2) \text{ w kierunku } (3, -4), \\
 \text{(h)} \quad f(x, y) &= \sin x + y^2x \text{ w punkcie } (1, 1) \text{ w kierunku } (-1, 1), \\
 \text{(i)} \quad f(x, y) &= e^{xy} + x^8 \text{ w punkcie } (3, -4) \text{ w kierunku } (1, -1).
 \end{aligned}$$