

## ANALIZA MATEMATYCZNA B3

### LISTA ZADAŃ 3

24.10.2016

- (1) Udowodnij, że wyrażenie

$$u = \frac{x+y}{x-y}$$

może przy  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  dążyć do dowolnej granicy (albo w ogóle nie być zbieżnym), w zależności od tego, w jaki sposób zbiegają do 0  $x$  i  $y$ . Podaj przykłady takich zmiennych  $x$  i  $y$ , żeby  $u$  miało granicę: (a) 1, (b) 2.

- (2) Znajdź punkty nieciągłości następujących funkcji:

$$(a) \quad f(x, y) = \frac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}, \quad (b) \quad f(x, y) = \frac{1}{x-y},$$

$$(c) \quad f(x, y) = \frac{1}{\sin \pi x} + \frac{1}{\sin \pi y}, \quad (d) \quad f(x, y) = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$$

- (3) Odległość punktu  $(x, y)$  na płaszczyźnie od ustalonego punktu  $(x_0, y_0)$  jest funkcją 2 zmiennych  $x, y$ . Znajdź równania i naszkicuj poziomice tej funkcji dla poziomów 1, 2, 3, 4.

- (4) Znajdź równania poziomicy i naszkicuj je, dla kilku poziomów z przedziału  $[-5, 5]$  dla następujących funkcji:

$$(a) \quad f(x, y) = xy, \quad (b) \quad f(x, y) = x^2y + x,$$

$$(c) \quad f(x, y) = y(x^2 + 1), \quad (d) \quad f(x, y) = \frac{xy - 1}{x^2},$$

- (5) Znajdź pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y) = 3x^4 + xy + y^3$  w punkcie  $(1, 2)$  w kierunku tworzącym z osią  $OX$  kąt  $3/4\pi$ .

- (6) Znajdź pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3x^2y + 1$  w punkcie  $(3, 1)$  w kierunku idącym od tego punktu do punktu  $(6, 5)$ .

- (7) Znajdź pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y) = \arctan xy$  w punkcie  $(1, 1)$  w kierunku dwusiecznej kąta pierwszej ćwiartki układu współrzędnych.

- (8) Znajdź pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y) = xy^2 + z^3 - xyz$  w punkcie  $(1, , 12)$  w kierunku tworzącym z osiami współrzędnych  $OX, OY, OZ$  kąty  $1/3\pi, 1/4\pi, 1/3\pi$  odpowiednio.

- (9) Znajdź pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y) = xyz$  w punkcie  $(5, 1, 2)$  w kierunku od tego punktu do punktu  $(9, 4, 14)$ .

- (10) Znajdź pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y) = \log(e^x + e^y)$  w początku układu współrzędnych w kierunku  $(\alpha, \beta)$ .

- (11) Znajdź pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y) = \log(x + y)$  w punkcie  $(1, 2)$  na paraboli  $y^2 = 4x$  w kierunku tej paraboli.

- (12) Znajdź pochodną kierunkową funkcji  $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$  w punkcie  $(1/2, \sqrt{3}/2)$  na okręgu  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  w kierunku tego okręgu.