

ANALIZA MATEMATYCZNA B3

LISTA ZADAŃ 7

12.12.2016

- (1) D jest obszarem wewnątrz krzywej $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \geq 0$ ale na zewnątrz krzywej $x^2 + y^2 = 2y$. Naskicuj ten obszar. Niech $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 + y^2 - 2y$. Naskicuj obszar D^* na płaszczyźnie Ouv , otrzymany z D w wyniku zmiany współrzędnych. Oblicz

$$\iint_D x e^y dx dy.$$

- (2) Określmy $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Niech D^* będzie zbiorem punktów (u, v) określonym warunkami $u^2 + v^2 \leq 1$, $u, v \geq 0$. Znajdź $D = T(D^*)$. Oblicz:

$$(a) \iint_D dx dy \quad (b) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

- (3) Niech D będzie obszarem $0 \leq y \leq x$ i $0 \leq x \leq 1$. Oblicz

$$\iint_D (x + y) dx dy$$

przez zamianę zmiennych $x = u + v$, $y = u - v$, oraz bezpośrednio, bez zamiany.

- (4) Niech D będzie kołem jednostkowym. Oblicz

$$\iint_D e^{x^2 + y^2} dx dy$$

przez zamianę zmiennych na współrzędne biegunowe.

- (5) Niech D^* będzie równoległobokiem o wierzchołkach w $(-1, 3)$, $(0, 0)$, $(2, -1)$ i $(1, 2)$. Niech $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Znajdź odwzorowanie T takie, że $T(D^*) = D$.

- (6) Odwzorowanie T jest określone na $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ wzorem $T(u, v) = (uv, u)$. Znajdź obraz zbioru D^* . Czy T jest różnowartościowe? Jeżeli nie, to czy można usunąć pewien podzbiór z D^* tak, aby na pozostałej części T było różnowartościowe?

- (7) D^* jest równoległobokiem ograniczonym prostymi $y = 3x - 4$, $y = 3x$, $y = \frac{x}{2}$ i $y = \frac{x+4}{2}$. Niech $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Znajdź odwzorowanie T takie, że $T(D^*) = D$.

- (8) Odwzorowanie T jest określone na $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ wzorem $T(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$. Znajdź $D = T(D^*)$. Czy T jest różnowartościowe?

- (9) Oblicz całki podwójne:

$$(a) \iint_D xy dx dy, \quad D : x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2,$$

$$(b) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D : y \geq 0, y \leq x^2 + y^2 \leq x,$$

$$(c) \iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad D : x \geq 0, (x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2).$$

(10) Oblicz wartości średnie funkcji:

$$(a) f(x, y) = \sin x \cos y, \text{ gdzie } D = [0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}],$$

$$(b) f(x, y) = x + y, \text{ gdzie } D : 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq x \leq \sin y.$$

(11) Oblicz pola obszarów ograniczonych przez krzywe:

$$(a) y^2 = 4x, x + y = 3, y = 0 (y \geq 0),$$

$$(b) x^2 + y^2 - 2y = 0, x^2 + y^2 - 4y = 0,$$

$$(c) x + y = 4, x + y = 8, x - 3y = 0, x - 3y = 5.$$

(12) Oblicz objętość bryły ograniczonej przez powierzchnie:

$$(a) x^2 + y^2 - 2y = 0, z = x^2 + y^2, z = 0,$$

$$(b) x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0,$$

$$(c) (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1, z = xy, z = 0,$$

$$(d) 2z = x^2 + y^2, x + z = 4.$$

(13) Oblicz pole płatów powierzchniowych:

$$(a) z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1,$$

$$(b) x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 - Rx \leq 0, z \geq 0,$$

$$(c) z = \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq z \leq 2.$$

(d) Satelita telekomunikacyjny jest umieszczony na orbicie geostacjonarnej położonej na wysokości $h = 400$ km nad powierzchnią Ziemi. Oblicz pole obszaru objętego zasięgiem satelity. Przyjmij, że Ziemia jest kulą o promieniu $R = 6400$ km.

(14) Oblicz całki potrójne podanych funkcji po podanych obszarach:

$$(a) f(x, y, z) = e^{x+y+z}, \text{ gdzie } D : x \leq 0, -x \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq -x,$$

$$(b) f(x, y, z) = \frac{1}{(3x + 2y + z + 1)^4}, \text{ gdzie } D : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1 - x - y,$$

$$(c) f(x, y, z) = x^2 + y^2, \text{ gdzie } D : x^2 + y^2 \leq 4, 1 - x \leq z \leq 2 - x.$$

(15) Używając współrzędnych walcowych oblicz podane całki potrójne po podanych obszarach:

$$(a) \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz, \text{ gdzie } D : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1,$$

$$(b) \iiint_D xyz dx dy dz, \text{ gdzie } D : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$$(c) \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz, \text{ gdzie } D : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz.$$

(16) Używając współrzędnych sferycznych oblicz podane całki potrójne po podanych obszarach:

(a) $\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, gdzie $D : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$,

(b) $\iiint_D (x^2 + y^2) dxdydz$, gdzie $D : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

(c) $\iiint_D x^2 dxdydz$, gdzie $D : x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$ ($R > 0$),

(d) $\iiint_D x^2 dxdydz$, gdzie $D : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4x$.

(17) Oblicz objętości obszarów D ograniczonych podanymi powierzchniami:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x + y + z = 1$, $x + y + z = 5$,

(b) $x = -1$, $x = 2$, $z = 4 - y^2$, $z = 2 + y^2$,

(c) $z = 11 + x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$.