

ANALIZA MATEMATYCZNA B3

LISTA ZADAŃ 8

9.01.2017

(1) Oblicz całki krzywoliniowe zorientowane:

- (a) $\int_{\gamma} x dx + y dy + z dz$, gdzie $\gamma(t) = (t^2, 3t, 2t^3)$, $-1 \leq t \leq 2$,
- (b) $\int_{\gamma} x dy - y dx$, gdzie $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
- (c) $\int_{\gamma} x dx + y dy$, gdzie $\gamma(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$, $0 \leq t \leq 2$,
- (d) $\int_{\gamma} yz dx + xz dy + xy dz$, gdzie γ składa się z odcinków łączących punkt $(1, 0, 0)$ z $(0, 1, 0)$ i dalej z $(0, 0, 1)$,
- (e) $\int_{\gamma} x^2 dx - xy dy + dz$, gdzie γ jest fragmentem paraboli $(x, 0, x^2)$ od $(-1, 0, 1)$ do $(1, 0, 1)$.

(2) Oblicz całki krzywoliniowe nieorientowane $\int_{\gamma} f ds$:

- (a) $f(x, y, z) = y$, gdzie $\gamma(t) = (0, 0, t)$, $0 \leq t \leq 1$,
- (b) $f(x, y, z) = x + y + z$, gdzie $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
- (c) $f(x, y, z) = \cos z$, gdzie $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
- (d) $f(x, y, z) = x \cdot \cos z$, gdzie $\gamma(t) = (t, t^2, 0)$, $0 \leq t \leq 1$,
- (e) $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z}}$, gdzie $\gamma(t) = (1, 2, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$,
- (f) $f(x, y, z) = y \cdot z$, gdzie $\gamma(t) = (t, 3t, 2t)$, $1 \leq t \leq 3$,
- (g) $f(x, y, z) = \frac{x+y}{y+z}$, gdzie $\gamma(t) = (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t)$, $1 \leq t \leq 2$,
- (h) $f(x, y, z) = y - 3$, gdzie $\gamma(t) = (\log t, t, 2)$, $1 \leq t \leq e$.

(3) Pokaż, że całka krzywoliniowa nieorientowana z funkcji f wzdłuż krzywej γ zadanej we współrzędnych biegunowych $r = r(\varphi)$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ jest równa

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi.$$

Oblicz długość krzywej $r(\varphi) = 1 + \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

(4) Niech $f(x, y) = 2x - y$ i $\gamma(t) = (t^4, t^4)$, $-1 \leq t \leq 1$. Oblicz całkę $\int_{\gamma} f ds$. Zinterpretuj odpowiedź geometrycznie. Oblicz długość krzywej γ . Oblicz długość odcinka krzywej dla $-1 \leq t \leq t_0$ gdzie $t_0 \leq 1$.

- (5) Przewód ułożony jest na przecięciu sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i płaszczyzny $x + y + z = 0$. Oblicz masę przewodu, jeżeli gęstość masy w punkcie (x, y, z) wynosi $(x, y, z) = x^2$ gramów na jednostkę długości przewodu.
- (6) Oblicz $\int_{\gamma} f \, ds$ dla $f(x, y, z) = z$ i $\gamma(t) = (t \cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq t_0$.
- (7) Pole sił F działających na obiekt ma postać $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Oblicz pracę wykonaną przy przesunięciu obiektu wzdłuż paraboli $(x, x^2, 0)$ od $x = -1$ do $x = 2$.
- (8) Niech γ będzie krzywą gładką w $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$.
- (a) Załóżmy, że wektor F jest prostopadły do wektora stycznego $\gamma'(t)$ w punkcie $\gamma(t)$. Pokaż, że $\int_{\gamma} F \cdot ds = 0$
- (b) Załóżmy, że wektor F jest współliniowy z wektorem stycznym $\gamma'(t)$ w punkcie $\gamma(t)$, czyli $F(\gamma(t)) = \lambda(t)\gamma'(t)$, dla pewnej funkcji $\lambda(t) > 0$. Pokaż, że $\int_{\gamma} F \cdot ds = \int_{\gamma} \|F\| \, ds$, gdzie $\|F\|$ jest długością wektora F .
- (9) Niech $T(\gamma(t))$ oznacza jednostkowy wektor styczny do krzywej γ . Ile wynosi $\int_{\gamma} T \cdot ds$?
- (10) Niech $F(x, y, z) = (z^3 + 2xy, x^2, 3xz^2)$. Pokaż, że całka krzywoliniowa $\int_{\gamma} F \cdot ds$ wokół obwodu kwadratu jednostkowego jest równa 0.