

## ANALIZA MATEMATYCZNA B3

### LISTA ZADAŃ 10

29.01.2017

- (1) Znajdź równanie płaszczyzny stycznej powierzchni w podanym punkcie  $(x_0, y_0, z_0)$  i zbadaj gładkość:

(a)  $x = 2u, y = u^2 + v, z = v^2$ , w punkcie  $(0, 1, 1)$ ,

(b)  $x = u^2 - v^2, y = u + v, z = u^2 + 4v$ , w punkcie  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2)$ ,

(c)  $x = u^2, y = u \sin e^v, z = \frac{1}{3}u \cos e^v$ , w punkcie  $(\frac{1}{3}, -2, 1)$ .

- (2) Znajdź wzór na wektor normalny do powierzchni:

(a)  $x = 3 \sin \varphi \cos \psi, y = 2 \sin \varphi \sin \psi, z = \cos \varphi$ , dla  $\varphi \in [0, \pi]$  i  $\psi \in [0, 2\pi]$ ,

(b)  $x = \sin v, y = u, z = \cos v$  dla  $u \in [-1, 3]$  i  $v \in [0, 2\pi]$ ,

(c)  $x = (2 - \cos v) \cos u, y = (2 - \cos v) \sin u, z = \sin v$ , dla  $u, v \in [-\pi, \pi]$ .

- (3) Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni w podanym punkcie:

(a)  $x = u^2, y = v^2, z = u^2 + v^2$ , w punkcie  $u = v = 1$ ,

(b)  $z = 3x^2 + 8xy$ , w punkcie  $x = 1, y = 0$ ,

(c)  $x^3 + 3xy + z^2 = 2$ , w punkcie  $x = 1, y = \frac{1}{3}, z = 0$ .

- (4) Korzystając z twierdzenia Stokesa oblicz całki powierzchniowe

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot dS$$

(a)  $S$  jest półsferą  $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1, z \leq 0, F = (y, -x, zx^3y^2)$ ,

(b)  $S$  jest półsferą  $x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0, F = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2)$ ,

(c)  $S$  jest elipsoidą  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10, F = (\sin xy, e^x, -yz)$ .

- (5) Korzystając z twierdzenia Stokesa oblicz całki krzywoliniowe

$$\int_C F \cdot dS$$

(a)  $C$  jest okręgiem  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0, F = (y, z, x)$ ,

(b)  $C$  jest okręgiem  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0, F = (-y, z, x)$ ,

(c)  $C$  jest linią śrubową  $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = \theta h / 2\pi, F = (x^2 - yz, y^2 - xz, z - xy)$ .

(6) Korzystając z twierdzenia Gaussa oblicz całki powierzchniowe

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dS$$

(a)  $\Omega$  jest kulą jednostkową,  $F = (x^3, y^3, z^3)$ ,

(b)  $\Omega$  jest sześcianem  $[0, 1]^3$ ,

(i)  $F = (x, y, z)$ ,

(ii)  $F = (1, 1, 1)$ ,

(iii)  $F = (x^2 + y^2 + z^2)$ ,

(c)  $F = (y, z, xz)$ ,

(i)  $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ ,

(ii)  $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 1, x \geq 0\}$ ,

(iii)  $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 1, x \geq 0\}$ .

(d)  $F = (x - y, y - z, z - x)$ ,  $\Omega$  taka, jak w poprzednim punkcie.

(7) Pokaż, że pole wektorowe  $F = (P, Q) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)$  określone na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  bez  $(0, 0)$  spełnia  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  ale całka  $\int_C F \cdot ds$  jest różna od zera, gdzie  $C$  jest okręgiem jednostkowym. Czy istnieje funkcja  $V(x, y)$  taka, że  $\nabla V = F$  dla  $(x, y) \neq (0, 0)$ ?

(8) Pokaż, że pole wektorowe  $F = (P, Q) = \frac{1}{x^2+y^2}(x, y)$  określone na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  bez  $(0, 0)$  spełnia  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  i całka  $\int_C F \cdot ds$  jest równa zeru, gdzie  $C$  jest okręgiem jednostkowym. Czy istnieje funkcja  $V(x, y)$  taka, że  $\nabla V = F$  dla  $(x, y) \neq (0, 0)$ ?

(9) Znajdź funkcje  $V(x, y)$  takie, że  $\nabla V(x, y)$  jest równe:

(a)  $(x^2, y^2)$ ,

(b)  $4(x^2 - y^2)(x, -y)$ ,

(c)  $\frac{1}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}(xy, x^2 + \sqrt{x^2+y^2})$ ,

(d)  $(2x \cos y - y^2 \sin x, 2y \cos x - x^2 \sin y)$ ,

(e)  $\frac{1}{(x+y)^3}(3y-x, y-3x)$ .