

Analiza matematyczna 3B
Notatki z wykładu

Maciej Paluszyński

4 stycznia 2017

Spis treści

1	Funkcje wielu zmiennych o wartościach wektorowych	1
2	Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych	2
3	Definicja pochodnej	3
4	Reguła łańcuchowa	4
5	Gradient funkcji	5
6	Wzór Taylora	6
7	Ekstrema funkcji wielu zmiennych	7
8	Funkcje zadane w sposób uwikłany	8
9	Ekstrema warunkowe	9
10	Całka wielokrotna	10
11	Całka krzywoliniowa	23

Rozdział 1

Funkcje wielu zmiennych o wartościach wektorowych

Tu będzie 1 rozdział

Rozdział 2

Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych

Tu będzie 2 rozdział

Rozdział 3

Definicja pochodnej

Tu będzie 3 rozdział

Rozdział 4

Reguła łańcuchowa

Tu będzie 4 rozdział

Rozdział 5

Gradient funkcji

Tu będzie 5 rozdział

Rozdział 6

Wzór Taylora

Tu będzie 6 rozdział

Rozdział 7

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Tu będzie 7 rozdział

Rozdział 8

Funkcje zadane w sposób uwikłany

Tu będzie 8 rozdział

Rozdział 9

Ekstrema warunkowe

Tu będzie 9 rozdział

Rozdział 10

Całka wielokrotna

Całka podwójna

Przedstawimy konstrukcję podwójnej całki Riemanna. Konstrukcja jest analogiczna do pojedynczej całki Riemanna funkcji jednej zmiennej. Załóżmy, że f jest ograniczoną funkcją 2 zmiennych, określoną na prostokącie $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P} = [a, b] \times [c, d]$. Niech

$$\mathbb{P} = \bigcup_{i=1}^n p_i$$

będzie rozkładem prostokąta $\mathbb{P}$ na małe prostokąciki. Zakładamy, że prostokąciki p_i mogą przylegać do siebie, ale nie mogą zachodzić na siebie. Definiujemy następujące wielkości:

$$m_i = \inf\{f(x); x \in p_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x); x \in p_i\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

i podobnie

$$m = \inf\{f(x); x \in \mathbb{P}\}, \quad M = \sup\{f(x); x \in \mathbb{P}\}.$$

Oczywiście, dla dowolnego $i = 1, \dots, n$

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M.$$

Utwórzmy sumy, dolną i górną:

$$L(f, \{p_i\}) = \sum_{i=1}^n m_i |p_i|, \quad U(f, \{p_i\}) = \sum_{i=1}^n M_i |p_i|.$$

W powyższym $|\cdot|$ oznacza pole. Podobnie jak w przypadku zwykłej całki Riemanna na prostej mamy

$$m|\mathbb{P}| \leq L(f, \{p_i\}) \leq U(f, \{p_i\}) \leq M|\mathbb{P}|.$$

Tworzymy całki dolną:

$$\underline{\int\int_{\mathbb{P}}} f(x, y) dx dy = \sup\{L(f, \{p_i\}); \{p_i\} - \text{dowolny podział } \mathbb{P} \text{ na prostokąciiki}\}$$

i górną:

$$\overline{\int\int_{\mathbb{P}}} f(x, y) dx dy = \inf\{L(f, \{p_i\}); \{p_i\} - \text{dowolny podział } \mathbb{P} \text{ na prostokąciiki}\}.$$

Dla dowolnego podziału $\{p_i\}$ mamy oczywiście

$$L(f, \{p_i\}) \leq \underline{\int\int_{\mathbb{P}}} f(x, y) dx dy \leq \overline{\int\int_{\mathbb{P}}} f(x, y) dx dy \leq U(f, \{p_i\}).$$

Definicja. Jeżeli całki górna i dolna są sobie równe, to mówimy, że funkcja f jest całkowalna na prostokącie $\mathbb{P}$, i wspólną wartość całek dolnej i górnej nazywamy całką podwójną f , i oznaczamy:

$$\int\int_{\mathbb{P}} f(x, y) dx dy.$$

Uwagi: (i) Funkcja ciągła na prostokącie jest na nim całkowalna. Dowód tego wygląda podobnie jak w przypadku całki pojedynczej. Można powiedzieć dokładniej: funkcja ograniczona na prostokącie jest na nim całkowalna, jeżeli zbiór jej punktów nieciągłości można przykryć skończoną liczbą prostokąciików (o bokach równoległych do osi współrzędnych) o dowolnie małym łącznym polu. Fakt ten jest intuicyjnie oczywisty, można go też łatwo udowodnić, a dowód pozostawiamy jako zadanie domowe amatorom takich dowodów.

(ii) Wprost z definicji można udowodnić następujące własności całki:

$$\begin{aligned} \int\int_{\mathbb{P}} (f(x, y) + g(x, y)) dx dy &= \int\int_{\mathbb{P}} f(x, y) dx dy + \int\int_{\mathbb{P}} g(x, y) dx dy, \\ \int\int_{\mathbb{P}} c \cdot f(x, y) dx dy &= c \cdot \int\int_{\mathbb{P}} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

(iii) Podobnie jak w przypadku całki pojedynczej, w praktyce nigdy nie liczymy całek z definicji. Zawsze korzystamy z odpowiednich twierdzeń. W przypadku całki podwójnej praktycznie zawsze całkę liczymy używając całek iterowanych, czyli sprowadzamy całkę podwójną do dwóch kolejno obliczanych zwykłych całek pojedynczych.

Całki iterowane

Mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Jeżeli f jest ciągła na $\mathbb{P} = [a, b] \times [c, d]$, to całka podwójna jest równa tak zwanym całkom iterowanym:*

$$\iint_{\mathbb{P}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Dowód. Weźmy dowolne podziały odcinków $[a, b]$ i $[c, d]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, oraz $c = y_0 < y_1 < \dots < y_k = d$. W ten sposób dostajemy podział prostokąta $\mathbb{P}$ na prostokąciiki $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Niech, tak jak w definicji całki

$$m_{i,j} = \inf\{f(x, y); (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\},$$
$$M_{i,j} = \sup\{f(x, y); (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\}.$$

Dodatkowo, dla każdego $i = 1, \dots, n$ wybieramy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, i wprowadzamy oznaczenie

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y, dy).$$

Rozkładając powyższą całkę na sumę całek po podprzedziałach, otrzymujemy

$$\varphi(\xi_i) = \int_c^d f(x, y, dy) = \sum_{j=1}^k \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy.$$

Mamy też, oczywiście

$$m_{i,j} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{i,j}, \quad y \in [y_{j-1}, y_j],$$

czyli

$$\sum_{j=1}^k m_{i,j}(y_j - y_{j-1}) \leq \varphi(\xi_i) \leq \sum_{j=1}^k M_{i,j}(y_j - y_{j-1}).$$

Mnożąc powyższe stronami przez $(x_i - x_{i-1})$ i sumując po $i = 1, \dots, n$, otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Jeżeli będziemy teraz zagęszczać podziały $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, oraz $c = y_0 < y_1 < \dots < y_k = d$ w ten sposób, że $\max\{(x_i - x_{i-1}), (y_j - y_{j-1}) : i, j\}$ dąży do 0, to skrajne sumy będą dążyły do całki podwójnej, natomiast suma w środku będzie dążyła do całki

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Powyższe obserwacje można uzasadnić podobnie jak w przypadku całki pojedynczej, intuicyjnie są jasne. Pokazaliśmy, że całka podwójna jest równa całce iterowanej wziętej w kolejności „najpierw po y , potem po x ”. Podobnie pokazujemy równość dla całki iterowanej obliczonej w odwrotnej kolejności. $\square$

Przypomnijmy, że całkę podwójną zdefiniowaliśmy po prostokącie $[a, b] \times [c, d]$. Obecnie uogólnimy całkę podwójną na dowolne zbiory ograniczone w $\mathbb{R}^2$. Weźmy dowolny taki zbiór ograniczony $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$. Niech $\mathbb{P}$ będzie prostokątem zawierającym $\mathcal{R}$. Mając funkcję f , ograniczoną na $\mathcal{R}$ rozszerzamy ją do funkcji $\tilde{f}$, określonej i ograniczonej na $\mathbb{P}$:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & : (x, y) \in \mathcal{R}, \\ 0 & : (x, y) \notin \mathcal{R}. \end{cases}$$

Mówimy, że f jest całkowalna na $\mathcal{R}$, jeżeli $\tilde{f}$ jest całkowalna na $\mathbb{P}$, i w takim przypadku całkę po $\mathcal{R}$ definiujemy jako

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{P}} \tilde{f}(x, y) dx dy.$$

Uwaga: (i) Zauważmy, że powyższa definicja nie zależy od konkretnego prostokąta $\mathbb{P}$ zawierającego $\mathcal{R}$.

(ii) Całkowalność f na $\mathbb{P}$ zależy od tego, jak duży jest zbiór punktów nieciągłości $\tilde{f}$. Podzielmy $\mathbb{P}$ na 3 podzbiory: *wnętrze* $\mathcal{R}$, czyli największy zbiór otwarty zawarty w $\mathcal{R}$, *brzeg* $\mathcal{R}$, czyli różnicę między domknięciem $\mathcal{R}$ i jego wnętrzem, oraz całą resztę. Zauważmy, że na wnętrzu $\mathcal{R}$ zbiór punktów nieciągłości $\tilde{f}$ jest taki sam, jak zbiór punktów nieciągłości wyjściowej funkcji f . Poza domknięciem $\mathcal{R}$, czyli na trzecim podzbiorze $\mathbb{P}$ funkcja $\tilde{f}$ jest stale równa 0, więc jest ciągła automatycznie. Natomiast na brzegu może być różnie, w zależności od zachowania się konkretnej funkcji f w jego pobliżu.

Dlatego wygodnie będzie ograniczyć się do takich zbiorów $\mathcal{R}$, których brzeg jest, w sensie całkowalności, zaniedbywalny. Stąd poniższa definicja. Przypomnijmy, że obszar to zbiór otwarty spójny, czyli taki, którego nie da się rozłożyć na rozłączne, otwarte podzbiory (intuicyjnie, jest jednym kawałkiem).

Definicja. Obszar ograniczony $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^2$ nazywa się regularnym, jeżeli jego brzeg można podzielić na skończoną ilość krzywych postaci $y = f(x)$ lub $x = f(y)$, dla pewnych ciągłych f .

Uwaga: Można łatwo zauważyć, że wykres funkcji ciągłej można pokryć skończoną ilością prostokątów o dowolnie małym łącznym polu.

Wniosek. Funkcja f , ciągła i ograniczona na obszarze regularnym $\mathcal{R}$ jest na nim całkowalna.

Dowód. Funkcja $\tilde{f}$ jest ciągła na wnętrzu $\mathcal{R}$, oraz poza domknięciem $\mathcal{R}$, a w pozostałych punktach, czyli na brzegu $\mathcal{R}$, jej ciągłość nie wpływa na całkowalność. $\square$

Zróbmy jeszcze jedną obserwację, która będzie się przydawała.

Fakt. Jeżeli $D = D_1 \cup D_2$, gdzie suma jest rozłączna i wszystkie zbiory są obszarami regularnymi, to

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Powyższe należy rozumieć tak, że jeżeli całki po jednej stronie istnieją, to istnieją także całki po drugiej stronie i zachodzi równość.

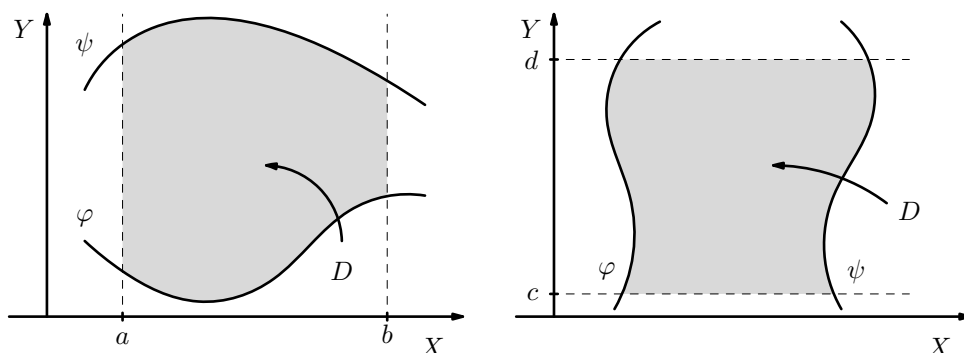
Obszary po których będziemy całkować najczęściej będą tak zwanymi obszarami normalnymi (to jest szczególnie prosty przykład obszarów regularnych).

Definicja. Obszar $\mathcal{D}$ nazywa się normalnym względem osi OX , jeżeli jest postaci

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \varphi, \psi \text{ ciągłe na } [a, b]\}. \quad (10.1)$$

Podobnie definiujemy obszar normalny względem osi OY .

Zauważmy, że obszar normalny względem którejkolwiek osi jest regularny: jego brzeg można podzielić na 4 wykresy. W przypadku obszaru normalnego względem osi OX , danego przez (10.1) te wykresy to $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$, $y = \psi(x)$, $x \in [a, b]$, $x = a$, $y \in [\varphi(a), \psi(a)]$ i $x = b$, $y \in [\varphi(b), \psi(b)]$.



Rysunek 10.1: Obszary normalne względem osi OX i OY

Fakt. Jeżeli obszar $\mathcal{D}$ jest normalny względem osi OX , ma postać (10.1), a f jest ograniczona i ciągła na $\mathcal{D}$ to

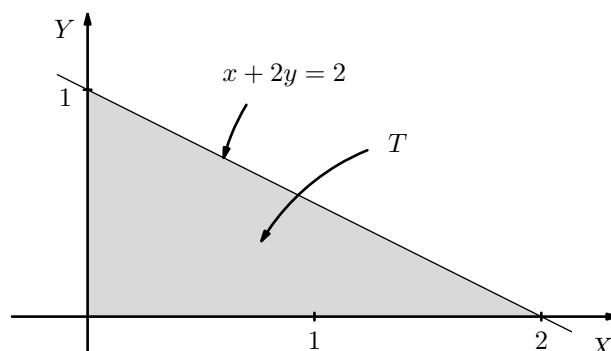
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Podobnie, jeżeli $\mathcal{D}$ jest normalny względem osi OY i ma postać $\mathcal{D} = \{(x, y); \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), y \in [c, d]\}$, to

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Przykład: Niech obszar $\mathcal{T}$ będzie ograniczony osiami współrzędnych i prostą $x + 2y = 2$, a funkcja f dana będzie wzorem $f(x, y) = 5x^2 - 2xy$. Jest to obszar normalny względem osi OX , z funkcjami $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = -x/2 + 1$, więc

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{T}} (5x^2 - 2xy) dx dy &= \int_0^2 \left(\int_0^{1-x/2} (5x^2 - 2xy) dy \right) dy \\ &= \int_0^2 (5x^2 y - xy^2) \Big|_0^{1-x/2} dx \\ &= \int_0^2 \left(5x^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) - x \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{11}{4}x^3 + 6x^2 - x \right) dx \\ &= \left(-\frac{11}{16}x^4 + 2x^3 - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 \end{aligned}$$



Rysunek 10.2: Obszar $\mathcal{T}$ z Przykładu

$$\begin{aligned}
 &= -11 + 16 - 2 \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

Interpretacja geometryczna

Dokładnie tak, jak całka pojedyncza reprezentuje pole obszaru pod wykresem dodatniej funkcji, całka podwójna reprezentuje objętość bryły pod wykresem dodatniej funkcji 2 zmiennych. Wynika to wprost z definicji, objętość jest jedyną liczbą leżącą pomiędzy wszystkimi sumami dolnymi i wszystkimi górnymi, a więc leżącą pomiędzy całką dolną i górną. Jeżeli funkcja (dodatnia) jest całkowna na jakimś obszarze, to dokładnie znaczy, że objętość bryły pod wykresem ma sens (nie wszystkie podzbiory $\mathbb{R}^3$ są „mieralne”), i jest równa całce. Możemy to sformułować trochę ogólniej: jeżeli V jest bryłą daną przez

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{D}, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\},$$

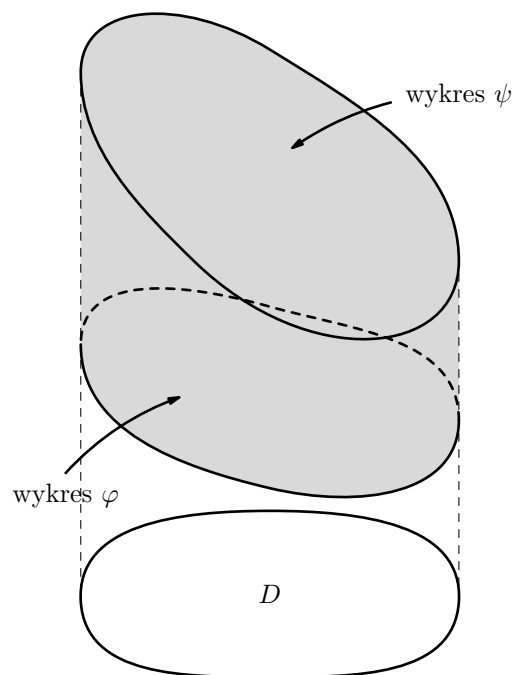
gdzie obszar $\mathcal{D}$ jest regularny, a φ i ψ ciągłe, to objętość bryły V dana jest wzorem

$$|V| = \iint_{\mathcal{D}} (\psi(x, y) - \varphi(x, y)) \, dx \, dy.$$

Przykłady: (i) Obliczymy objętość elipsoidy

$$\left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \, a, b, c > 0 \right\}.$$

Zauważmy, że jedyne możliwe (x, y) które mogą „wchodzić w skład” elipsoidy spełniają $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, i dla takich (x, y) pasujące z wyznaczone są nierów-



Rysunek 10.3: Objętość bryły między wykresami φ i ψ

nościami:

$$-c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \leq z \leq c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Elipsoida jest więc bryłą pomiędzy dwoma wykresami, gdzie $\mathcal{D} = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, oraz

$$\varphi(x, y) = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad \psi(x, y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

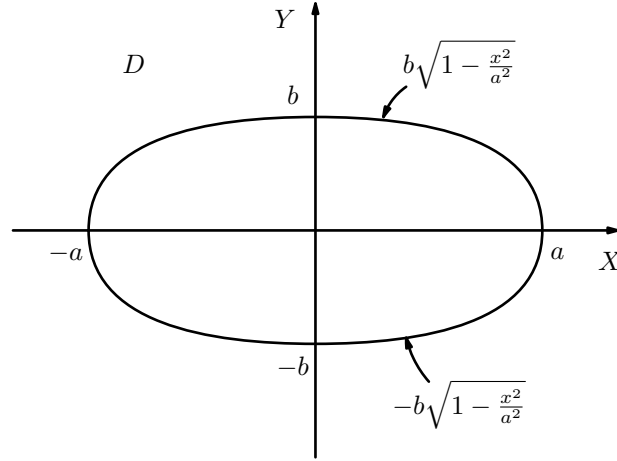
Mamy więc:

$$\begin{aligned} |V| &= \iint_{\mathcal{D}} \left(c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \left(-c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) \right) dx dy \\ &= 2c \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy. \end{aligned}$$

$\mathcal{D}$ jest obszarem normalnym względem osi OX , więc liczymy całkę. Dla ułatwienia wprowadźmy oznaczenie:

$$\Phi(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Mamy więc:



Rysunek 10.4: Obszar $\mathcal{D}$ z Przykładu (i)

$$\begin{aligned}
 |V| &= 2c \int_{-a}^a \left(\int_{-\Phi(x)}^{\Phi(x)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy \right) dx \\
 &= 2c \int_{-a}^a \left(\int_{-\Phi(x)}^{\Phi(x)} \sqrt{\frac{\Phi(x)^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy \right) dx \\
 &= \frac{2c}{b} \int_{-a}^a \left(\int_{-\Phi(x)}^{\Phi(x)} \Phi(x) \sqrt{1 - \left(\frac{y}{\Phi(x)} \right)^2} dy \right) dx \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{\Phi(x)} = t \\ dy = \Phi(x) dt \end{array} \right\} \\
 &= \frac{2c}{b} \int_{-a}^a \Phi^2(x) \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt \right) dx \\
 &= \frac{2c}{b} \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{\pi}{2} dx \\
 &= a b c \pi \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{dx}{a} \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} = s \\ \frac{dx}{a} = ds \end{array} \right\} \\
 &= a b c \pi \int_{-1}^1 (1 - s^2) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a b c \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 \\
&= \frac{4}{3} \pi a b c.
\end{aligned}$$

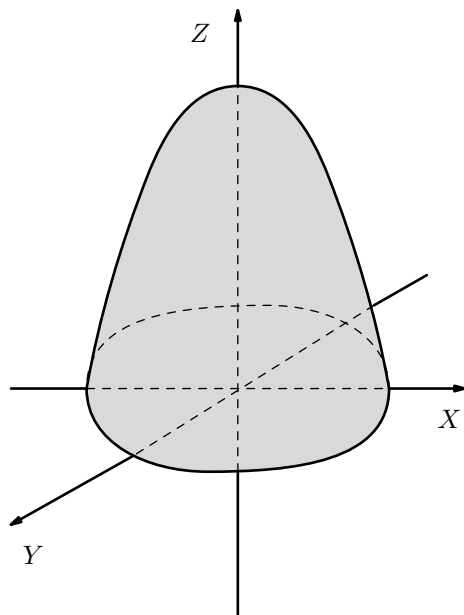
(ii) Znajdziemy objętość bryły ograniczonej od góry paraboloidą $z = 4 - x^2 - y^2$ i od dołu przez płaszczyznę OXY . Najpierw musimy wyznaczyć obszar $\mathcal{D}$ po którym będziemy liczyli całkę. Zauważmy, że paraboloida leży powyżej płaszczyzny OXY dla punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniających $x^2 + y^2 \leq 4$, czyli powyżej koła o środku w $(0, 0)$ i o promieniu 2. Mamy więc nasz obszar $\mathcal{D} = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$, i obie funkcje, których wykresy ograniczają bryłę:

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 4 - x^2 - y^2.$$

Obszar $\mathcal{D}$ jest normalny na płaszczyźnie względem osi OX , mamy

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}.$$

W takim razie



Rysunek 10.5: Bryła z Przykładu (ii)

$$|V| = \iint_{\mathcal{D}} (4 - x^2 - y^2) dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - y^2) dy \right) dx \\
&= \int_{-2}^2 \left((4 - x^2) \cdot 2 \cdot \sqrt{4 - x^2} - \frac{y^3}{3} \Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \right) dx \\
&= \frac{4}{3} \int_{-2}^2 (4 - x^2)^{3/2} dx \\
&= \frac{64}{3} \int_1^1 (1 - t^2)^{3/2} dt.
\end{aligned}$$

W ostatniej linii zrobiliśmy proste podstawienie $t = x/2$. Ostatnia całka to zwykła, prosta całka pojedyncza, ale policzmy ją „dla sportu”. Narzuca się podstawienie $t = \sin \varphi$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$, wtedy $dt = \cos \varphi d\varphi$, więc

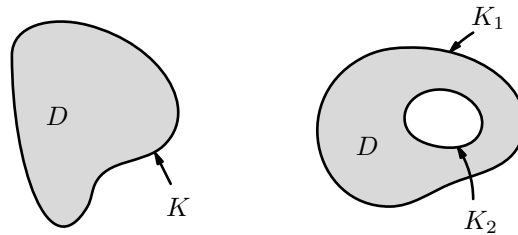
$$\begin{aligned}
\int_1^1 (1 - t^2)^{3/2} dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\cos 2\varphi + 1}{2} \right)^2 d\varphi \\
&= \frac{1}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 2\varphi + 2 \cos 2\varphi + 1) 2 d\varphi \\
&= \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi + 1) d\varphi \\
&= \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} d\varphi + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{16} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2\varphi + 1) d\varphi + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Po drodze opuściliśmy kilka całek z cosinusa po okresie, wiedząc, że te całki są zerami. Ostatecznie,

$$|V| = \frac{64}{3} \frac{3\pi}{8} = 8\pi.$$

Pole płata powierzchniowego

Niech $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem regularnym, ograniczonym jedną krzywą zamkniętą, kawałkami gładką. Oznacza to, że obszar „nie zawiera dziur”, a jego brzeg można rozłożyć na wykresy funkcji różniczkowalnych, o ciągłych

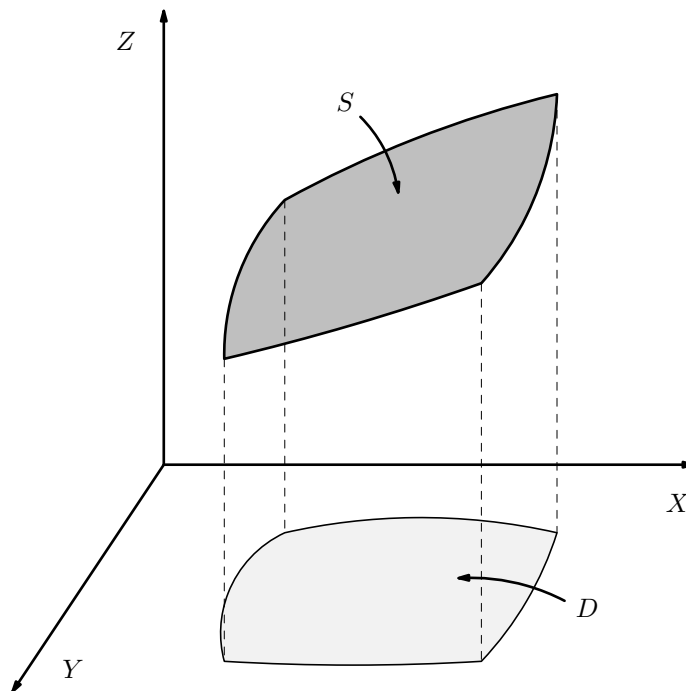


Rysunek 10.6: Obszar ograniczony 1 krzywą zamkniętą i obszar „z dziurą”

po pochodnych („gładkich”). Niech f będzie funkcją klasy C^1 na $\mathcal{D}$ (to znaczy ma pochodne cząstkowe 1 rzędu i są one ciągłe) i niech pochodne cząstkowe mają skończone granice w punktach brzegu $\mathcal{K}$ obszaru $\mathcal{D}$. Powierzchnię

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{D}\} \subset \mathbb{R}^3$$

nazywamy gładkim płatem powierzchniowym. Obszar $\mathcal{D}$ czasem nazywamy



Rysunek 10.7: Gładki płat powierzchniowy

obszarem parametryzacji płata, a funkcję $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ jego parametryzacją. Tak zdefiniowany gładki płat powierzchniowy jest więc po prostu wykresem gładkiej funkcji 2 zmiennych. Wyprowadzimy wzór na pole powierzchni płata $\mathcal{S}$. Niech $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}$, gdzie $\mathbb{P}$ jest prostokątem, oraz niech $p_1, \dots, p_n$ będzie podziałem $\mathbb{P}$ na prostokąciki. W każdym p_i wybieramy punkt $(\xi_i, \eta_j) \in p_i$. Równanie płaszczyzny stycznej do $\mathcal{S}$ w punkcie $(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))$ ma postać

$$z - f(\xi_i, \eta_i) = f_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i). \quad (10.2)$$

Niech σ_i będzie fragmentem tej płaszczyzny (równoległobokiem), leżącym nad prostokącikiem p_i . Pole tego równoległoboku jest w przybliżeniu równe polu fragmentu płata s_i leżącego nad p_i , i to przybliżenie jest tym dokładniejsze, im drobniejszy jest podział: $|\sigma_i| \approx |s_i|$. Nietrudno zauważyć, że pole $|\sigma_i|$ jest związane z polem $|p_i|$ przez cosinus kąta γ_i nachylenia płaszczyzny stycznej do płaszczyzny OXY :

$$|p_i| = |\sigma_i| \cdot \cos \gamma_i.$$

Kąt pomiędzy płaszczyznami to kąt pomiędzy wektorami normalnymi do nich. Jednostkowy wektor normalny do płaszczyzny OXY to $(0, 0, 1)$, a wektor normalny do naszej płaszczyzny (10.2) to $(-f_x, -f_y, 1)$, a po normalizacji $\frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}(-f_x, -f_y, 1)$. Iloczyn skalarny tych wektorów, czyli właśnie cosinus kąta między nimi to $\frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$. Mamy więc

$$|\sigma_i| = \sqrt{f_x(\xi_i, \eta_i)^2 + f_y(\xi_i, \eta_i)^2 + 1} |p_i|.$$

Mamy więc

$$\sum_{i=1}^n |\sigma_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{f_x(\xi_i, \eta_i)^2 + f_y(\xi_i, \eta_i)^2 + 1} |p_i|.$$

Lewa strona jest coraz dokładniejszym przybliżeniem pola płata $\mathcal{S}$, a prawa strona coraz dokładniejszym przybliżeniem całki

$$\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} dx dy.$$

Powyższa całka jest więc równa polu płata.

Przykład: Obliczymy pole części półsfery

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

leżącej poza cylindrami

$$x^2 + y^2 = Rx, \quad x^2 + y^2 = -Rx.$$

Rozdział 11

Całka krzywoliniowa

Tu będzie 11 rozdział