ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 14

22.01.18

(1) Zbadaj zbieżność podanych wzorami ciągów funkcyjnych, oraz zbieżność jednostajną na podanych zbiorach:

(a) $f_n(x) = \sqrt{x^4 + \frac{x^2}{n}}$, $(-\infty, \infty)$,

(b) $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$, $(-\infty, \infty)$,

(c) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $[0, 1]$,

(d) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $[0, \pi]$,

(e) $f_n(x) = \sin^n(x)$, $(-\infty, \infty)$,

(f) $f_n(x) = \frac{1}{1 + x + n}$, $[0, \infty)$,

(g) $f_n(x) = \frac{1}{1 + (x + n)^2}$, $(-\infty, \infty)$,

(h) $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, $(0, 1]$,

(i) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2}$, $[-1, 1]$,

(j) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$, $[-1, 1]$,

(k) $f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $[-1, 1]$,

(l) $f_n(x) = nx^{-nx^2}$, $[-1, 1]$.

(2) Wyznacz zbiór, na którym zbieżny jest podany szereg funkcyjny, oraz sprawdź, czy zbieżność jest jednostajna:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nx^2}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{1 + nx}}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,x)}{10^n}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-nx}$,

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, x^n}$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + x^2}}$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, x^n}{n^2}$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\, x^n$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\, x^n}{n}$,

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} n\big(\sqrt{x\,(1 - x)}\big)^n$,

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$,

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$,

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$,

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$.

(3) Udowodnij, że następujące szeregi funkcyjne są jednostajnie zbieżne na całej prostej $(-\infty, \infty)$:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{10^n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n^2}$.

(4) Udowodnij, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{1 + nx}}$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $[0, \infty)$.

(5) Udowodnij, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n\,x^n}$ jest zbieżny punktowo, ale nie jednostajnie na zbiorze $[1,\infty)$, oraz że jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $[2,\infty)$.

(6) Znajdź pochodną f' oraz całkę nieoznaczoną $\int f(x)\,dx$ następujących funkcji:

(a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, x^n$, (b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}\, x^n$,

(c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, x^n$, (d) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

(7) „Zwiń” następujące szeregi potęgowe, to znaczy znajdź wzór na sumę, i określ dziedzinę tak powstałej funkcji:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{2n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, x^{2n}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n\, x^n$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)\, x^n$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)\,(n+2)\, x^n$.