Pierwsza litera nazwiska

1

Kolokwium 1
3.11.17

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Niech A będzie zbiorem ograniczonym i $B = \{-x : x \in A\}$ (zbiór liczb o przeciwnym znaku). Pokaż, że $\sup B = -\inf A$

Rozwiązanie: Niech $\alpha = \inf A$. Z definicji inf mamy, że

$$\forall\, x \in A\ x \geq \alpha \Leftrightarrow -x \leq -\alpha \Rightarrow \forall\, x \in B\ x \leq -\alpha.$$

$-\alpha$ jest więc ograniczeniem B od góry. Pokażemy, że jest najmniejszym ograniczeniem od góry. Załóżmy, nie wprost, że $\beta < -\alpha$ i β też jest ograniczeniem B od góry. Mamy

$$\forall\, x \in B\ x \leq \beta \Rightarrow \forall\, x \in A\ -x \leq \beta \Rightarrow x \geq -\beta.$$

Wynika stąd, że $-\beta$ jest ograniczeniem A od dołu, ale $\beta < -\alpha \Rightarrow -\beta > \alpha$, co jest sprzeczne z założeniem, że α jest największym ograniczeniem A od dołu. Takie β nie może więc istnieć, więc $-\alpha$ jest najmniejszym ograniczeniem B od góry, czyli $-\alpha = \sup B$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} < 4^n.$$

Rozwiązanie: Dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ mamy $\binom{2}{1} = 2 < 4^1$, awięc prawda. Załóżmy $\binom{2n}{n} < 4^n$ dla pewnego n. Wtedy

$$\begin{aligned}
\binom{2(n+1)}{n+1} &= \frac{2(n+1)!}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} \\
&= \binom{2n}{n}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} \\
&\overset{\text{z. ind.}}{\leq} 4^n \frac{(2n+1)}{(n+1)} \cdot \frac{(2n+2)}{(n+1)} \\
&< 4^n \cdot 2 \cdot 2 \\
&= 4^{n+1}.
\end{aligned}$$

Mamy więc

$$\binom{2(n+1)}{n+1} < 4^{n+1},$$

czyli krok indukcyjny

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz wszystkie pierwiastki

$$\sqrt[3]{2-2\mathbf{i}}.$$

Rozwiązanie: Znajdujemy postać trygonometryczną $2-2\mathbf{i}$:

$$(2-2\mathbf{i}) = \sqrt{8}\Big(\frac{2}{\sqrt{8}} - \frac{2}{\sqrt{8}}\,\mathbf{i}\Big) = \sqrt{8}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i}\Big).$$

Wiemy, że

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mamy więc

$$(2-2\mathbf{i}) = \sqrt{8}\Big(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathbf{i}\,\sin\frac{7\pi}{4}\Big).$$

Wypisujemy więc komplet pierwiastków:

$$w_0 = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathbf{i}\,\sin\frac{7\pi}{12}\Big) \qquad (\sqrt{8} = \sqrt{2}^3)$$

$$w_1 = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{15\pi}{12} + \mathbf{i}\,\sin\frac{15\pi}{12}\Big)$$

$$w_2 = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{23\pi}{12} + \mathbf{i}\,\sin\frac{23\pi}{12}\Big).$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Rozwiąż nierówność

$$\left|\frac{2x-1}{x+2}\right| < 2.$$

Rozwiązanie: Dziedziną nierówności są liczby $x \neq -2$. Tylko takie rozważamy. Mnożąc przez dodatni mianownik dostajemy nierówność równoważną:

$$|2x-1| < 2|x+2|.$$

Rozważamy przypadki:

$$(I)\ x < -2 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow |2x-1| = 1-2x,\ |x+2| = -x-2,$$

$$1 - 2x < -2x - 4$$

$$1 < -4.$$

W tym przypadku nie ma rozwiązań.

$$(II)\ \ -2 < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |2x-1| = 1-2x,\ |x+2| = x+2,$$

$$1 - 2x < 2x + 4$$

$$-3 < 4x$$

$$-\frac{3}{4} < x.$$

W tym przypadku rozwiązaniem jest przedział $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}]$.

$$(III)\ x > \frac{1}{2} \Rightarrow |2x-1| = 2x-1,\ |x+2| = x+2,$$

$$2x - 1 < 2x + 4$$

$$-1 < 4.$$

W tym przypadku rozwiązaniem jest cały przedział $(\frac{1}{2}, \infty)$.

Łącząc rozwiązania z poszczególnych przypadków dostajemy przedział $(-\frac{3}{4}, \infty)$.

Inaczej: Nierówność $|2x-1| < 2|x+2|$ jest równoważna

$$(2x-1)^2 < 4(x+2)^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 < 4x^2 + 16x + 16$$

$$-15 < 20x$$

$$-\frac{3}{4} < x.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź granicę, być może niewłaściwą, ciągu

$$a_n = \frac{4^{n-1} - 5}{2^{2n} - 7}.$$

Rozwiązanie:

$$\frac{4^{n-1} - 5}{2^{2n} - 7} = \frac{4^{n-1} - 5}{4^n - 7} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{5}{4^n}}{1 - \frac{7}{4^n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź granicę, być może niewłaściwą, ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$

Rozwiązanie:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n < 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\frac{3}{4} < \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} < \sqrt[n]{2} \cdot \frac{3}{4}.$$

Wiemy, że $\sqrt[n]{2} \to 1$, więc z 3 ciągów

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{3}{4}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Znajdź granicę, być może niewłaściwą, ciągu

$$a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)} \\
&= \frac{n+\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\
&= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \\
&\longrightarrow \frac{2}{2} = 1.
\end{aligned}$$