WSTĘP DO ZASTOSOWAŃ ANALIZY FALKOWEJ
LISTA ZADAŃ 1

1.3.2019

(1) Niech $\{\lambda_n\}$ będzie ciągiem liczb dodatnich. Na przestrzeni liniowej

$$X = \left\{ \{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |x_n|^2 < \infty \right\}$$

wprowadzamy iloczyn skalarny

$$< \{x_n\}, \{y_n\} >= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \overline{y_n}.$$

Pokaż, że X jest przestrzenią Hilberta, izometrycznie izomorficzną z ℓ^2_+:

$$\ell^2_+ = \left\{ \{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

(2) Jeżeli szereg $\sum x_n$ w przestrzeni Banacha jest zbieżny, to

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0.$$

(3) W przestrzeni $C[0,1]$ (funkcje ciągłe) wprowadzamy normę

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx}.$$

Pokaż, że powstała przestrzeń metryczna nie jest zupełna.

(4) Funkcja Haara dana jest wzorem

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 : & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 : & x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 : & x \notin [0,1). \end{cases}$$

Pokaż, że rodzina funkcji

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

jest liniowo niezależna.

(5) Wektory $\omega_j \in \mathbb{C}^n$, $j = 0, \ldots, n-1$ dane wzorem

$$\omega_j(k) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i\, jk}{n}}$$

tworzą bazę ortonormalną $\mathbb{C}^n$.

(6) Funkcje

$$\varphi_k(x) = \chi_{[0,1)}(nx - k), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

($n \in \mathbb{N}$) tworzą układ ortonormalny w $L^2([0,1])$. Pokaż, że nie jest to system zupełny.