WSTĘP DO ZASTOSOWAŃ ANALIZY FALKOWEJ
LISTA ZADAŃ 2

30.3.2019

(1) Niech $u_0(x) = \chi_[0,1](x)$ (funkcja charakterystyczna odcinka $[0,1]$. Ciąg u_n zdefiniowany jest rekurencyjnie:

$$u_{n+1}(x) = u_n(x)(u_n(3x) + u_n(3x-2)).$$

Pokaż, że średnica nośnika diam supp $u_n = 1$, chociaż miara nośnika $|\text{supp } u_n| = (2/3)^n$. Pokaż, że diam supp $u_n * u_n = |\text{supp } u_n * u_n| = 2$

(2) Niech

$$\Delta x(u) = \inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \left(\frac{\|(\cdot - x_0)\, u\|}{\|u\|} \right),$$
$$\Delta \xi(u) = \inf_{\xi_0 \in \mathbb{R}} \left(\frac{\|(\cdot - \xi_0)\, \hat{u}\|}{\|\hat{u}\|} \right).$$

Wielkości te są miarą lokalizacji u i $\hat{u}$. Pierwsza wielkość jest czasem nazywana *niepewnością pozycji* a druga *niepewnością momentu.* Udowodnij, że $\Delta x(u) \cdot \Delta \xi(u)$ nie zmieni się, jeżeli funkcję u zastąpimy funkcją v, gdzie

(a) $v(x) = s^{-1/2} u(x/s)$ dla dowolnego $s > 0$,
(b) $v(x) = e^{itx} u(x)$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$,
(c) $v(x) = u(x-p)$ dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$.

(3) Oblicz $\Delta x(u)$ i $\Delta \xi(u)$ dla $u(x) = e^{-\pi x^2/2}$.
Wsk.: $\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx = 1$.

(4) Jeżeli $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ i $\Delta x(\psi)$ jest skończone, to ψ jest całkowalna.
Wsk.: Zastosuj nierówność Schwarza do $\int \frac{\sqrt{1+x^2}\psi(x)}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

(5) Udowodnij, że minima w definicji Δx i $\Delta \xi$ są osiągnięte w punktach

$$x_0 = \frac{1}{\|u\|^2} \int_{\mathbb{R}} x |u(x)|^2 \, dx, \qquad \xi_0 = \frac{1}{\|\hat{u}\|^2} \int_{\mathbb{R}} \xi |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

(6) Używając Transformaty Fouriera udowodnij, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} \, dx = \frac{3\pi}{4}.$$

Wsk.: Całkowana funkcja jest iloczynem transformat znanej funkcji.