WSTĘP DO ZASTOSOWAŃ ANALIZY FALKOWEJ
LISTA ZADAŃ 3

15.4.2019

(1) Oblicz transformatę Laplace'a następujących funkcji: (a) $f(t) = t$, (b) $f(t) = t^2$, (c) $f(t) = e^{3t+1}$, (d) $f(t) = \cos t$, (e) $f(t) = \sinh t$, (f) $f(t) = \sin^2 t$, (g) $f(t) = \sqrt{t} + 3t$, (h) $f(t) = t^{3/2} + e^{-10t}$, (i) $f(t) = te^t$.
Można korzystać z funkcji

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-s} s^{t-1}\, ds$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & : t < 0 \\ 1 & : t \geq 0. \end{cases}.$$

(2) Oblicz odwrotną transformatę Laplace'a funkcji: (a) $F(s) = s^{-3/2}$, (b) $F(s) = \frac{1}{s+5}$, (c) $F(s) = \frac{9+s}{4-s^2}$.

(3) Funkcja schodkowa określona jest następująco: $f(x) = [x+1],\ x \geq 0$ i $f(x) = 0,\ x < 0$. Oblicz transformatę Laplace'a funkcji f.

(4) Fala prostokątna to funkcja określona następująco: $f(x) = 1,\ x \in [2n, 2n+1),\ f(x) = 0,\ x \in [2n+1, 2n),\ n = 0, 1, 2, \ldots$ i $f(x) = 0,\ x < 0$. Oblicz transformatę Laplace'a funkcji f.

(5) Użyj transformaty Laplace'a do rozwiązania następujących zagadnień początkowych:
(a) $x'' + 3x' + 2x = t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2$
(b) $x'' + 4x = \cos 3t,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0$
(c) $x'' + 9x = 0,\ x(0) = 3,\ x'(0) = 4$.

(6) Rozwiń w szereg Fouriera następujące funkcje okresowe, o okresie 2π: (a) $f(x) = x,\ -\pi \leq x \leq \pi$, (b)$f(x) = |x|,\ -\pi \leq x \leq \pi$, (c) $f(x) = x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$, (d) $f(x) = |\sin x|,\ -\pi \leq x \leq \pi$, (e) $f(x) = \cos^2 x,\ -\pi \leq x \leq \pi$, (f) $f(x) = 0,\ -\pi \leq x \leq 0,\ f(x) = \sin x,\ 0 \leq x \leq \pi$.

(7) Udowodnij, że jeżeli funkcja jest różniczkowalna i ma ciągłą pochodną, to jej szereg Fouriera jest zbieżny absolutnie w każdym punkcie.

(8) Dla funkcji $f(x) = \cos x$ znajdź rozwinięcie w szereg sinusów na przedziale $[0, \pi]$.

(9) Dla funkcji $f(x) = \sin x$ znajdź rozwinięcie w szereg cosinusów na przedziale $[0, \pi]$.

(10) Niech funkcja f będzie nieparzysta wokół punktu $\pi/2$ (czyli $f(\pi/2 - x) = -f(\pi/2 + x)$). Pokaż, że parzyste współczynniki rozwinięcia f w szereg cosinusów są wszystkie zerami.