

# ANALIZA MATEMATYCZNA

## LISTA ZADAŃ 3

15.10.2018

(1) Wyznacz dziedziny naturalne następujących funkcji:

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$ ,	(b) $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ ,
(c) $f(x) = \sqrt{3x-x^3}$ ,	(d) $f(x) = \log(x^2-4)$ ,
(e) $f(x) = \log(1-2\cos x)$ ,	(f) $f(x) = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$ .

(2) Zapisz wzorem  $y = f(x)$  złożenie następujących funkcji, i wyznacz dziedzinę naturalną złożenia:

(a)  $t = 2^x, z = \sqrt[3]{t+1}, y = z^2$ ,      (b)  $t = \sin x, z = \log t, y = \sqrt{1+z^2}$ .

(3) Narysuj wykres funkcji danej wzorem ([...] oznacza część całkowitą, a {...} oznacza część ułamkową):

(a) $f(x) =  x+1  +  x-1 $ ,	(b) $f(x) =  x-3  - 2 x+1  + 2 x  - x + 1$ ,
(c) $f(x) = x^3 + 3x^2$ ,	(d) $f(x) = -x^3 + 2x - 2$ ,
(e) $f(x) = 1 - \sin x$ ,	(f) $f(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ,
(g) $f(x) =  \sin x $ ,	(h) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ,
(i) $f(x) =  x^2-1  -  x^2-4 $ ,	(j) $f(x) =  x^2-8x+15 $ ,
(k) $f(x) = x^2 + x + 2 -  x^2 - x - 2 $ ,	(l) $f(x) = \{\cos x\}$ ,
(m) $f(x) = \left[\frac{4}{\pi} \arctan x\right]$ ,	(n) $f(x) = 2\{\sin x\} - \{2 \sin x\}$ .

(4) Znajdź funkcje odwrotne do:

(a) $f(x) = 1 - 3x$ ,	(b) $f(x) = \frac{1}{1-x}, x \neq 1$ ,
(c) $f(x) = x^2 - 2x, x \geq 1$ ,	(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}, x \geq 0$ ,

(5) Ciąg Fibonacciego określony jest rekurencyjnie w sposób następujący:  $F_1 = F_2 = 1$ , a następnie  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Znajdź wyrazy ciągu Fibonacciego o numerach od 3 do 12. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  prawdziwa jest równość:  $F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ .

(6) Udowodnij, **korzystając jedynie z definicji**, zbieżność ciągów, znajdując ich granice:

(a) $a_n = \frac{1}{n^2}$ ,	(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,
(c) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ,	(d) $a_n = \frac{n+2}{n-1}, n \geq 2$ ,
(e) $a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ ,	(f) $a_n = \frac{3n^3 - 2n^2 - 7n + 5}{4n^3 + n - 6}$ .

(7) Udowodnij, że jeśli  $x$  jest liczbą rzeczywistą o rozwinięciu dziesiętnym

$$\beta, \alpha_1 \alpha_2 \dots,$$

to ciąg określony wzorem

$$a_n = \beta, \alpha_1 \dots \alpha_n$$

jest zbieżny do  $x$  ( , jest punktem dziesiętnym, a  $\beta \in \mathbf{Z}$ ).

(8) Udowodnij, że granica sumy (różnicy, ilorazu) ciągów zbieżnych jest sumą (różnicą, ilorazem) ich granic. Oczywiście w przypadku ilorazu zakładamy, że ciąg w mianowniku ma wyrazy różne od zera, i że jego granica jest różna od zera.

(9) Zbadaj monotoniczność następujących ciągów:

$$(a) \quad a_n = n + \frac{1}{n}, \quad (b) \quad a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2,$$

$$(c) \quad a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{2^n}, \quad (d) \quad a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

$$(e) \quad a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad (f) \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}.$$

(10) Oblicz granice (być może niewłaściwe) ciągów:

$$(a) \quad a_n = \frac{7n + (\sqrt[3]{n}\sqrt[6]{n})^5\sqrt{9n+1}}{11n^3 + 7n + 3}, \quad (b) \quad a_n = \sqrt{n^2 + n} - n,$$

$$(c) \quad a_n = \frac{\sin n}{n}, \quad (d) \quad a_n = r^n, \quad r > 1,$$

$$(e) \quad a_n = \sqrt[n]{r}, \quad 0 < r < 1, \quad (f) \quad a_n = 2^n - \frac{1}{n},$$

$$(g) \quad a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2 + n}}{n + 2}, \quad (h) \quad a_n = \frac{1 + 2 + 4 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 9 + \dots + 3^n},$$

$$(i) \quad a_n = \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 2n}{\sqrt{n^2 + 2}}, \quad (j) \quad a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2},$$

$$(k) \quad a_n = \frac{1 + 3 + 9 + \dots + 3^n}{3^n}, \quad (l) \quad a_n = \sqrt{3^n + 2^n}\sqrt{3^n + 1},$$

$$(m) \quad a_n = \sqrt[n^2]{n}, \quad (n) \quad a_n = \sqrt[n]{n^2},$$

$$(o) \quad a_n = n(\sqrt{n^2 + 7} - n), \quad (p) \quad a_n = \frac{n^2 + n + 1}{(n + \sin n)^2},$$

$$(q) \quad a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1} + \frac{n^2 + 2}{n^3 + 2} + \frac{n^2 + 3}{n^3 + 3} + \dots + \frac{n^2 + n}{n^3 + n},$$

$$(r) \quad a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{(n + 1)^2},$$

$$(s) \quad a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+7} - \sqrt{n}}, \quad (t) \quad a_n = r^n, \quad -1 < r < 1.$$

(11) Wypisz wzorem ciąg, dla którego  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = \frac{1}{2}$ , i każdy z wyrazów jest średnią harmoniczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right), \quad n \geq 2.$$

(12) Wypisz wzorem ciąg, dla którego  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ , i każdy z wyrazów jest średnią geometryczną dwóch wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$