

Wstęp do analizy falkowej  
z zastosowaniami  
w matematyce finansowej

Maciej Paluszyński

27 marca 2019

# Spis treści

1	Wstęp	3
2	Funkcje o wartościach zespolonych	6
3	Przestrzeń Hilberta	10
4	Transformata Fouriera	48
5	Analiza Wielorozdzielcza	82
6	Algorytmy Numeryczne	127
7	Zastosowania falek	144
8	Materiały na laboratorium	147
9	Dodatek	177

# Rozdział 1

## Wstęp

Skrypt ten przeznaczony jest dla studentów matematyki, ale do zrozumienia materiału nie jest wymagana duża wiedza. Główne narzędzia są omówione na poziomie elementarnym. Szczególny nacisk jest na powtórzenie tematów, które co prawda pojawiają się na wczesnych latach studiów, ale są często przez studentów zapominane. Podstawowymi pojęciami są przestrzeń Hilberta, baza w takiej przestrzeni oraz transformata Fouriera. Analiza falkowa to pewna ogólna technika analizy sygnałów (czyli funkcji), która pojawiła się z grubsza w latach 80 ubiegłego stulecia, i zdobyła sobie znaczną popularność. Początkowo analiza falkowa stosowana była do analizy i kompresji dźwięków i obrazów, ale jest to metoda zupełnie ogólna, więc stosuje się ją z powodzeniem na przykład w poszukiwaniach ropy naftowej, czy, ostatnio, w matematyce finansowej.

Podstawową techniką w analizie sygnału jest rozkład tego sygnału na składowe, które są obiektem zainteresowania. Jedną z takich metod jest rozkład na składowe częstotliwościowe. Jeżeli sygnał jest okresowy to wiemy, że rozkłada się na dyskretne „spektrum” składowych częstotliwościowych, o okresach będących całkowitą wielokrotnością okresu całego sygnału. To jest tak zwane rozwinięcie sygnału w szereg Fouriera. Jeżeli sygnał nie jest okresowy, to wciąż rozkłada się na składowe częstotliwościowe, tylko w tym wypadku te składowe mają wszelkie możliwe okresy, i sygnał wyjściowy średnią – całką tych wszystkich składowych. To jest tak zwana transformata Fouriera. Ten sposób reprezentacji sygnału nazywa się analizą częstotliwościową, i ma szerokie zastosowanie.

Innym rodzajem analizy jest tak zwana analiza czasowo-częstotliwościowa, zwana także analizą Gabora lub lokalną transformatą Fouriera. Analiza ta polega na rozkładzie sygnału na składowe „w określonym miejscu” i „określonej częstotliwości”. Sygnał w dziedzinie czasu dzielony jest na kolejno po sobie następujące segmenty, tak zwane okienka. Dzielenie to sprowadza się

do mnożenia sygnału przez specjalną „funkcję okna”, czyli funkcję, której wartości są 0 poza pewnym przedziałem, a wewnątrz tego przedziału są dodatnie. Takie okno przesuwa się wzdłuż sygnału, tworząc rodzinę sygnałów o skończonym czasie trwania, a następnie dokonywana jest analiza częstotliwościowa wyciętych fragmentów.

Analiza falkowa również sprowadza się do rozkładu sygnału na składowe, w tym przypadku składowymi są funkcje o określonej lokalizacji w czasie i określonej skali. Analizę falkową nazywa się więc też analizą „czasowo-skalową”. Różnica pomiędzy analizą „czasowo-częstotliwościową” (lokalną transformatą Fouriera) a analizą falkową polega na tym, że w analizie falkowej elementy składowe o wysokich częstotliwościach mają jednocześnie krótki czas trwania i odwrotnie, elementy składowe o niskich częstotliwościach trwają długo.

Oba rodzaje analizy, czasowo-częstotliwościowa i czasowo-skalowa mają charakter „lokalny”, to znaczy zmiana sygnału tylko w jakimś ograniczonym przedziale czasowym daje zmianę tylko części składowych, tych „odpowiedzialnych” za dany przedział czasowy. To jest podstawowa różnica tych dwóch analiz w porównaniu z klasyczną analizą częstotliwościową. W przypadku analizy częstotliwościowej, czyli transformaty Fouriera „lokalna” zmiana sygnału powoduje „globalną” zmianę transformaty. Oba rodzaje analizy, falkowa i lokalna transformata Fouriera są szeroko stosowane w praktyce, i obie mają swoje zastosowania. W każdej sytuacji warto porównać wyniki stosowania obu. Każda z tych analiz stanowi podstawę wielu różnych algorytmów. Są stosowane do usuwania szumów z sygnałów dźwiękowych lub obrazów, kompresji (algorytmy MP3, JPEG, JPEG2000, MPEG2, MPEG4), rozpoznawania mowy czy kształtów, wykrywania krawędzi. W ostatnim czasie analizę falkową z powodzeniem stosuje się do analizy danych ekonomicznych.

Analiza falkowa występuje w dwóch postaciach, ciągłej i dyskretniej. W każdym przypadku podstawą analizy jest wybór „falki” czyli funkcji, której kształt ma być modelem składowych na które chcemy rozbić sygnał. Falka powinna odpowiadać z grubsza charakterowi sygnału i jego cechom, które chcemy uwypuklić. Generalnie powinna być dobrze zlokalizowana zarówno w czasie jak i w częstotliwości, oraz powinna być „prawie ortogonalna” do swoich przesunięć i przeskalowań. Analiza ciągła to transformata

$$W_\psi(f)(t, a) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(ax - t)dx, \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

Transformata ta jest odwracalna, ale jej głównym zadaniem jest rozdzielenie sygnału na składowe o lokalizacji  $t$  i skali  $a$ . Analiza dyskretna to rozkład

sygnału w bazie falkowej

$$a_{j,k} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) 2^{\frac{jn}{2}} \psi(2^j x - k) dx, \quad k \in \mathbb{Z}^n, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Jedną z przyczyn powodzenia analizy falkowej w zastosowaniach jest szybki algorytm numeryczny, tak zwany algorytm Mallata, który pozwala obliczać współczynniki bazowe  $a_{j,k}$ .

## Rozdział 2

# Funkcje o wartościach zespolonych i całkowanie

Zakładamy, że czytelnik zna liczby zespolone, wie, co to są funkcje o wartościach zespolonych, i potrafi je całkować. Krótko tylko przypomnimy najważniejsze związane z tym fakty. Powiemy też parę słów o całce Lebesgue'a.

Funkcja o wartościach zespolonych to, po prostu, funkcja przyjmująca wartości w ciele liczb zespolonych.

$$f : E \rightarrow \mathbb{C}.$$

Na naszym wykładzie dziedziną  $E$  będzie jakiś podzbiór zbioru liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  lub płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$ . Rozdzielając część rzeczywistą i urojoną wartości funkcji  $f$  możemy ją zapisać w postaci

$$f = f_1 + i f_2,$$

gdzie  $f_1$  i  $f_2$  są funkcjami o wartościach rzeczywistych.  $f_1$  nazywamy częścią rzeczywistą  $f$  a  $f_2$  częścią urojoną  $f$ :

$$f_1 = \Re f, \quad f_2 = \Im f.$$

Podstawowe pojęcia analizy takie jak ciągłość czy różniczkowalność przenoszą się łatwo na przypadek funkcji o wartościach zespolonych. Mówimy, że funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $x_0$  jeżeli obie części  $f_1$  i  $f_2$  są w tym punkcie ciągłe. Mówimy, że funkcja  $f$  jest różniczkowalna w  $x_0$  jeżeli  $f_1$  i  $f_2$  są różniczkowalne w  $x_0$ , oraz

$$f'(x_0) = f_1'(x_0) + i f_2'(x_0).$$

Pochodna  $f'$  też jest funkcją o wartościach zespolonych. Podobnie możemy określić funkcję pierwotną: mówimy, że funkcja  $F$  jest funkcją pierwotną

funkcji  $f$  jeżeli dla każdego  $x$  z dziedziny  $f$  mamy

$$F'(x) = f(x).$$

Zauważmy, że funkcja pierwotna funkcji  $f$  jest określona z dokładnością do stałej - oczywiście zespolonej (jeżeli dziedzina  $f$  składa się z kilku oddzielnych przedziałów to stałe oczywiście mogą być różne na poszczególnych częściach). Podobnie postępujemy z całkowaniem. Dowolną funkcję pierwotną funkcji  $f$  nazywamy jej całką nieoznaczoną. Mówimy też, że funkcja  $f$  jest całkowalna w sensie Riemanna (lub Lebesgue'a) na odcinku  $[a, b]$  jeżeli obie jej części  $f_1$  i  $f_2$  są całkowalne na  $[a, b]$ , i piszemy

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + i \int_a^b f_2(x) dx$$

Zasadnicze twierdzenie analizy też otrzymujemy natychmiast z elementarnej teorii: Jeżeli funkcja  $F$  jest dowolną funkcją pierwotną funkcji  $f$  na przedziale  $[a, b]$ , to

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Podkreślmy – powyższy wzór napisaliśmy dla przypadku funkcji o wartościach zespolonych, ale wynika on wprost, i w łatwy sposób, z analogicznego wzoru dla funkcji o wartościach rzeczywistych. Nie będziemy już pisać szczegółów, ale wszystkie twierdzenia znane z analizy funkcji o wartościach rzeczywistych przenoszą się natychmiast na funkcje o wartościach zespolonych. Odnosi się to do różniczkowania iloczynu, różniczkowania funkcji złożonej (oczywiście, kiedy takie złożenie ma sens, czyli pierwsza nakładana funkcja musi mieć wartości rzeczywiste), całkowania przez części czy całkowania przez podstawienie. Na przykład, niech funkcje  $f$  i  $g$  będą dwoma różniczkowalnymi funkcjami o wartościach zespolonych, a  $f_1, f_2, g_1$  i  $g_2$  ich częściami rzeczywistymi i urojonymi.

$$f = f_1 + i f_2, \quad g = g_1 + i g_2.$$

Obliczymy pochodną iloczynu w jakimś punkcie  $x$  dziedziny.

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)'(x) &= ((f_1 + i f_2) \cdot (g_1 + i g_2))'(x) \\
 &= (f_1 \cdot g_1 + f_1 \cdot i g_2 + i f_2 \cdot g_1 - f_2 \cdot g_2)'(x) \\
 &= ((f_1 \cdot g_1 - f_2 \cdot g_2) + i(f_1 \cdot g_2 + f_2 \cdot g_1))'(x) \\
 &= (f_1 \cdot g_1 - f_2 \cdot g_2)'(x) + i(f_1 \cdot g_2 + f_2 \cdot g_1)'(x) \\
 &= f_1'(x)g_1(x) + f_1(x)g_1'(x) - f_2'(x)g_2(x) - f_2(x)g_2'(x) + \\
 &\quad + i(f_1'(x)g_2(x) + f_1(x)g_2'(x) + f_2'(x)g_1(x) + f_2(x)g_1'(x)) \\
 &= (f_1'(x) + i f_2'(x))g_1(x) + i(f_1'(x) + i f_2(x))g_2(x) + \\
 &\quad + f_1(x)(g_1'(x) + i g_2'(x)) + i f_2(x)(g_1'(x) + i g_2(x)) \\
 &= f'(x)(g_1(x) + i g_2(x)) + (f_1(x) + i f_2(x))g'(x) \\
 &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
 \end{aligned}$$

**Uwaga:** Ciągłość, różniczkowalność czy całkowalność to pojęcia zdefiniowane przy pomocy pojęcia zbieżności. Zbiór liczb zespolonych ma naturalną metrykę, więc bez problemu moglibyśmy zdefiniować powyższe pojęcia nie odwołując się do teorii funkcji o wartościach rzeczywistych, czyli bez rozdzielania części rzeczywistej i urojonej. Otrzymalibyśmy, oczywiście, to samo. Nie ma tu więc żadnych problemów.

**Przykład:** Funkcją, która stale będzie się przewijać, jest funkcja wykładnicza

$$f(x) = e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}.$$

Dla  $x$  rzeczywistego mamy wzory

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

a więc częścią rzeczywistą funkcji  $e^{ix}$  jest  $\cos x$  a częścią urojoną  $\sin x$ . Widzimy więc, że  $e^{ix}$  jest okresowa o okresie  $2\pi$ , oraz

$$\begin{aligned}
 (e^{ix})' &= (\cos x)' + i(\sin x)' \\
 &= -\sin x + i \cos x \\
 &= i(\cos x + i \sin x) \\
 &= i e^{ix}.
 \end{aligned}$$

Funkcję tę łatwo więc różniczkować i całkować.



## Całka Lebesgue'a

Całka Lebesgue'a (z której korzystamy na tym wykładzie) nie różni się bardzo od całki Riemanna. Funkcja ciągła na przedziale skończonym jest całkowalna i w sensie Riemanna i w sensie Lebesgue'a i całki są sobie równe. W obu przypadkach całka reprezentuje pole obszary zawartego pomiędzy wykresem a osią  $OX$  (jeżeli myślimy o całce funkcji o wartościach rzeczywistych), wzięte ze znakiem  $+$  jeżeli wykres jest powyżej osi  $OX$  i ze znakiem  $-$  jeżeli wykres jest poniżej osi  $OX$ . Obie całki różnią się sposobem obliczenia tego pola. W przypadku całki Riemanna dzielimy dziedzinę funkcji i obszar pod wykresem przybliżamy przez pionowe prostokąty zbudowane na tak podzielonej dziedzinie. W przypadku całki Lebesgue'a dzielimy zbiór wartości funkcji, i obszar pod wykresem przybliżamy przez poziome „paski” w nim zawarte. Oczywiście, dla wystarczająco regularnych funkcji obie konstrukcje prowadzą do tego samego. Wyliczymy obecnie kilka faktów dotyczących całki Lebesgue'a. Nie będziemy wnikać w szczegóły teorii tej całki, chcemy tylko przypomnieć fakty z których będziemy korzystali.

- Funkcja  $f$  jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy całkowalna jest funkcja  $|f|$ . Jest więc inaczej niż w przypadku całki Riemanna, dla której funkcja  $|f|$  może być całkowalna, a  $f$  nie.
- Jeżeli funkcja  $f$  nie jest całkowalna w sensie Lebesgue'a, to w zasadzie oznacza to, że pole obszaru pod wykresem  $|f|$  jest nieskończone. Bardzo rzadkie są przypadki funkcji, które mogłyby być niecałkowalne w sensie Lebesgue'a z przyczyn „strukturalnych”. Jest to istotna różnica z całką Riemanna, gdzie łatwo może się zdarzyć, że funkcja ograniczona jest niecałkowalna – wystarczy że ma dużo punktów nieciągłości.
- Jeżeli  $f_n \rightarrow f$  w każdym punkcie zbioru  $E$ , oraz wszystkie funkcje  $f_n$  są wspólnie ograniczone przez jakąś funkcję całkowalną  $g$ , czyli

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \text{oraz} \quad \int_E g(x) dx < \infty,$$

to

$$\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx.$$

Jest to tak zwane twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej. Będziemy z niego często korzystać.

# Rozdział 3

## Przestrzeń Hilberta

### Przestrzeń liniowa

Przestrzeń liniowa to zbiór, którego elementy (na które zwyczajowo mówmy „wektory”) można dodawać, odejmować i mnożyć przez liczby (skalary). Skalary mogą być liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi, i czasem podkreśla się, że przestrzeń liniowa o której mowa jest rzeczywista (skalarami są liczby rzeczywiste) lub zespolona (skalarami są liczby zespolone). My najczęściej rozważać będziemy przestrzenie liniowe zespolone, gdyż z punktu widzenia teorii matematycznej tak jest najwygodniej. Działania na wektorach muszą spełniać zwykłe warunki związane z liczbami, takie jak przemienność, łączność rozdzielczość mnożenia względem dodawania i temu podobne. Podzbiór przestrzeni liniowej, który sam w sobie też jest przestrzenią liniową (to znaczy jest zamknięty ze względu na dodawanie i odejmowanie wektorów, oraz mnożenie przez skalary) nazywamy podprzestrzenią liniową.

**Przykład:** Rozważmy zbiór  $\mathbb{X}$  wszystkich funkcji

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C},$$

czyli funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach zespolonych. Dodawanie, odejmowanie funkcji i mnożenie przez skalar określamy zwyczajnie, punktowo. Na przykład  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ . Z tak określonymi działaniami zbiór  $\mathbb{X}$  jest zespoloną przestrzenią liniową (jest także, oczywiście, rzeczywistą przestrzenią liniową). Niech  $\mathbb{H}$  będzie podzbiorem  $\mathbb{X}$  składającym się z funkcji parzystych, czyli takich, że

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x).$$

Nietrudno zauważyć, że  $\mathbb{H}$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $E\mathbb{X}$ .

## Przestrzeń metryczna

Przestrzenie liniowe które będziemy rozważać będą jednocześnie przestrzeniami metrycznymi. Przypomnijmy więc krótko pojęcie przestrzeni metrycznej. Przestrzeń metryczna to zbiór  $\mathbb{X}$  w którym zdefiniowana jest funkcja odległości (tak zwana metryka), czyli funkcja dwóch zmiennych

$$d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R},$$

o następujących własnościach:

- (i)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- (ii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , (nierówność trójkąta),
- (iii)  $d(x, y) \geq 0$ , oraz  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

Metryka pozwala wprowadzić w przestrzeni topologię, czyli można mówić o zbiorach otwartych, ciągach zbieżnych czy funkcjach ciągłych. Mówimy, że ciąg  $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$  jest zbieżny do elementu  $x \in \mathbb{X}$ , jeżeli

$$d(x, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

## Przestrzeń metryczna zupełna

Ważną własnością przestrzeni metrycznych jest tak zwana zupełność (w sensie topologicznym). W przestrzeniach zupełnych ciągi spełniające warunek Cauchy'ego są zbieżne. Przypomnijmy ten warunek. Niech będzie dany ciąg  $x_1, x_2, \dots$  przestrzeni metrycznej  $\mathbb{X}$ . Ciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego, jeżeli

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad d(x_m, x_n) < \epsilon. \quad (3.1)$$

Przestrzeń metryczna  $\mathbb{X}$  jest zupełna (w sensie topologicznym), jeżeli każdy ciąg  $\{x_n\}$  w  $\mathbb{X}$  spełniający warunek (3.1) ma w  $\mathbb{X}$  granicę. Jako matematycy musimy wspomnieć o tym warunku, ale na tym wykładzie nie będziemy go roztrząsać. Wszystkie przestrzenie z którymi będziemy mieli do czynienia są zupełne. Nie będziemy tego dowodzić. Podkreślmy jeszcze raz: własność przestrzeni metrycznych mówiąca, że ciągi spełniające warunek Cauchy'ego (3.1) są zbieżne to tak zwana zupełność (w sensie topologicznym). Kiedy przejdziemy do pojęcia bazy przestrzeni liniowej będziemy też mówić o zupełności w sensie algebraicznym. Trzeba pamiętać, że to **zupełnie** inne pojęcia.

## Przestrzeń Banacha

Wśród przestrzeni liniowych z metryką ważną klasą są przestrzenie z normą. Norma w przestrzeni liniowej to funkcja

$$\| \cdot \| : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

o następujących własnościach:

- (i)  $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$  ( $\alpha$  - skalar),
- (ii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (nierówność trójkąta).
- (iii)  $\|x\| \geq 0$ , oraz  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,

Intuicyjnie norma wektora to jego długość. Z normą związana jest metryka:  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Wymagane własności metryki wynikają z własności normy. Przestrzeń liniowa unormowana jest więc szczególnym przykładem przestrzeni liniowej metrycznej. Jeżeli jest zupełna, to nazywa się przestrzenią Banacha.

## Przestrzeń Hilberta

Przestrzenią unitarną nazywamy przestrzeń liniową  $\mathbb{H}$  w której zdefiniowany jest iloczyn skalarny, czyli funkcja dwóch zmiennych

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C},$$

spełniająca następujące warunki

- (i)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  (iloczyn skalarny jest antysymetryczny),
- (ii)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ,  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$  (iloczyn skalarny jest liniowy względem pierwszej zmiennej),
- (iii)  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ ,  $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$  (iloczyn skalarny jest antyliniowy względem drugiej zmiennej),
- (iv)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  oraz  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

( $x, y, z$  to dowolne wektory z przestrzeni  $\mathbb{H}$ ,  $\alpha$  to dowolna liczba zespolona, a kreska  $\overline{\cdots}$  oznacza sprzężenie zespolone). Istnienie iloczynu skalarnego pozwala nam mówić o tak zwanej geometrii. Można zdefiniować pojęcie prostokątności wektorów, kąta między wektorami i innych geometrycznych pojęć. Z iloczynem skalarnym związana jest norma:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Własności (i) oraz (iii) normy wynikają natychmiast z własności iloczynu skalarnego, natomiast nierówność trójkąta wynika z następującej nierówności Schwarza:

**Twierdzenie 3.1** (Nierówność Schwarza). *Dla dowolnych  $x, y$  przestrzeni unitarnej  $\mathbb{H}$  mamy*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad (3.2)$$

*Równość zachodzi tylko w przypadku gdy elementy  $x$  i  $y$  są współliniowe, to znaczy  $x = \alpha y$  albo  $\alpha x = y$  dla pewnej liczby zespolonej  $\alpha$ .*

*Dowód.* Niech  $\lambda$  będzie dowolną liczbą rzeczywistą,  $x, y \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} \|x + \lambda y\|^2 &= \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\Re\langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle \\ &= \lambda^2 \|y\|^2 + \lambda 2\Re\langle x, y \rangle + \|x\|^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

Otrzymaliśmy funkcję kwadratową, która jest zawsze nieujemna, więc jej wyróżnik musi być ujemny:

$$(2\Re\langle x, y \rangle)^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 \leq 0,$$

czyli

$$(\Re\langle x, y \rangle)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2.$$

W przypadku, gdy  $\langle x, y \rangle$  jest liczbą rzeczywistą dowód jest więc zakończony. Jeżeli nie jest liczbą rzeczywistą, to możemy przemnożyć  $x$  lub  $y$  przez odpowiednią liczbę postaci  $e^{i\theta}$ , żeby iloczyn był rzeczywisty. Takie pomnożenie nie wpływa na normę. Zwróćmy jeszcze uwagę, kiedy może zachodzić równość. Równość oznacza, że wyróżnik funkcji kwadratowej (3.3) jest zerem, więc funkcja ma pierwiastek. Istnieje więc liczba  $\lambda$ , dla której  $x + \lambda y = 0$ . Ta liczba nie musi być rzeczywista, bo „po drodze”  $x$  lub  $y$  pomnożyliśmy przez  $e^{i\theta}$ .  $\square$

Możemy teraz udowodnić nierówność trójkąta dla normy związanej z iloczynem skalarnym. Weźmy dowolne  $x, y \in \mathbb{H}$ .

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\Re\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Po drodze skorzystaliśmy z tego, że dla dowolnej liczby zespolonej  $z$  zachodzi  $\Re z \leq |z|$ , oraz z nierówności Schwarz'a.

Przestrzeń unitarna (liniowa z iloczynem skalarnym) posiada więc metrykę i topologię. Jeżeli jest przestrzenią zupełną, to mówimy, że jest przestrzenią Hilberta. Przestrzeń Hilberta jest więc szczególnym przypadkiem przestrzeni Banacha.

**Uwaga:** Jest jeszcze jeden techniczny warunek: przestrzeń Hilberta musi być „ośrodkowa”, to znaczy musi zawierać gęsty podzbiór przeliczalny. Wszystkie przestrzenie które spotykamy „w życiu codziennym” są ośrodkowe, i nie będziemy się tym warunkiem dalej zajmować.

### Ciągłość iloczynu skalarnego

W przestrzeni metrycznej metryka jest funkcją ciągłą dwóch zmiennych:

$$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y).$$

Podobnie w przestrzeni unormowanej norma jest funkcją ciągłą:

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x\|.$$

Oba te fakty wynikają natychmiast z nierówności trójkąta. Podobnie w przestrzeni unitarnej iloczyn skalarny jest funkcją ciągłą dwóch zmiennych:

$$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle. \quad (3.4)$$

Wynika to z nierówności Schwarz'a:

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\|. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że ciąg zbieżny jest ograniczony ( $\|x_n\| \leq C$ ), więc prawa strona dąży do 0 gdy  $n \rightarrow \infty$ . Z tej ciągłości będziemy wielokrotnie korzystać.

### Równość równoległoboku

Norma związana z iloczynem skalarnym ma następującą własność, którą łatwo sprawdzić. Jest to tak zwana równość równoległoboku:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad x, y \in \mathbb{H}. \quad (3.5)$$

Tylko norma związana z iloczynem skalarnym spełnia tę równość. Jeżeli norma w przestrzeni Banacha spełnia ją, to można w niej wprowadzić iloczyn skalarny, i przestrzeń jest przestrzenią Hilberta.

## Podprzestrzeń Hilberta

Jeżeli podzbiór  $\mathbb{G} \subset \mathbb{H}$  jest podprzestrzenią liniową, i jest domknięty (czyli jeżeli ciąg należy do  $\mathbb{G}$  i jest zbieżny, to jego granica też należy do  $\mathbb{G}$ ), to nazywa się podprzestrzenią Hilberta przestrzeni Hilberta  $\mathbb{H}$ . Podprzestrzeń  $\mathbb{G}$  też jest przestrzenią Hilberta, z tym samym iloczynem skalarnym co  $\mathbb{H}$ .

### Przykłady:

(a)  $L^2(\mathbb{R}^n)$  Rozważmy przestrzeń liniową funkcji na  $\mathbb{R}^n$  całkowalnych z kwadratem, to znaczy takich, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Przestrzeń tą oznaczamy  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Iloczyn skalarny zadajemy całką

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (3.6)$$

Z nierówności  $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$  wynika, że całka (3.6) istnieje, jeżeli  $f$  i  $g$  są całkowalne z kwadratem. Własności iloczynu skalarnego są łatwe do sprawdzenia. Jak z tego wynika

$$\|f\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx}, \quad (3.7)$$

a odległość dwóch funkcji

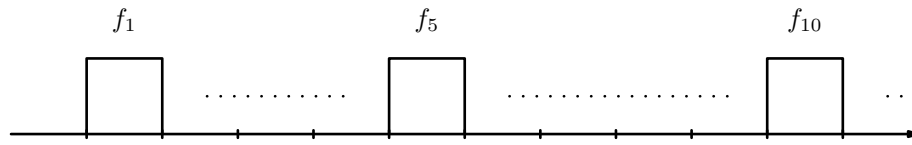
$$d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|^2 dx}.$$

Zbieżność ciągu funkcji w przestrzeni Hilberta  $L^2(\mathbb{R}^n)$  to nie jest to samo, co zbieżność punktowa w każdym punkcie. Ciąg funkcji może być zbieżny do swojej granicy w każdym punkcie, ale nie zbieżny do niej w  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Rozważmy następujący przykład

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & : x \in [n, n+1], \\ 0 & : \text{poza tym.} \end{cases}$$

Jak łatwo zauważyć,

$$f_n(x) \rightarrow 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$



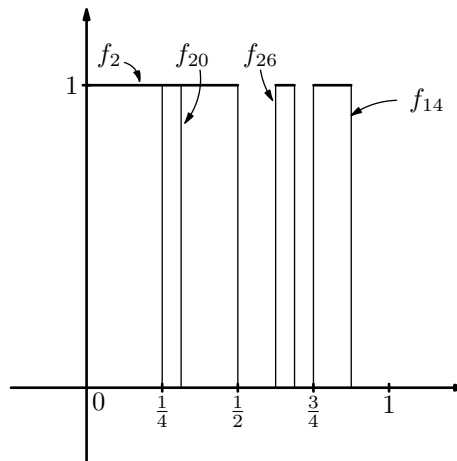
Rysunek 3.1: Ciąg funkcji zbieżny w każdym punkcie, ale nie w  $L^2(\mathbb{R})$ .

czyli  $\{f_n\}$  jest zbieżny w każdym punkcie do funkcji stałe równej 0. Z drugiej strony, dla dowolnego  $n$

$$\|f_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 dx = \int_n^{n+1} dx = 1.$$

Ciąg nie jest więc zbieżny do 0 w  $L^2(\mathbb{R})$ , odległość jego elementów od funkcji stałe równej zero wynosi 1, niezależnie od  $n$ . Można też podać przykład ciągu zbieżnego w przestrzeni Hilberta  $L^2(\mathbb{R})$ , ale nie zbieżnego punktowo. Niech  $n$  będzie liczbą naturalną, i niech  $n = 2^k + l$ , dla pewnego  $k = 0, 1, 2, \dots$  i  $l = 0, \dots, 2^k - 1$ . Liczby  $k$  i  $l$  wyznaczone są jednoznacznie przez  $n$ , co więcej gdy  $n \rightarrow \infty$  to także  $k \rightarrow \infty$ . Mając taki rozkład  $n$  określamy

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & : x \in [2^{-k}l, 2^{-k}(l+1)), \\ 0 & : x \notin [2^{-k}l, 2^{-k}(l+1)). \end{cases}$$



Rysunek 3.2: Ciąg funkcji zbieżny w  $L^2(\mathbb{R})$ , ale nie zbieżny punktowo.

Zauważmy, że ciąg  $\{f_n\}$  nie jest zbieżny w żadnym punkcie  $x \in [0, 1)$ . Wynika to z faktu, że każdy punkt  $x \in [0, 1)$  należy do nieskończenie wielu



przedziałów postaci  $[2^{-k}l, 2^{-k}(l+1))$  ale także nie należy do nieskończenie wielu przedziałów tej postaci. Z drugiej strony

$$\|f_n\|^2 = \int_{2^{-kl}}^{2^{-k}(l+1)} dx = 2^{-k}.$$

Skoro  $k \rightarrow \infty$  gdy  $n \rightarrow \infty$ , więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = 0,$$

ciąg  $\{f_n\}$  zbiega więc do 0 w przestrzeni Hilberta  $L^2(\mathbb{R})$ .

Dla całkowitej ścisłości trzeba zrobić następującą uwagę, która odnosi się do wszystkich rozważanych przez nas przestrzeni, w których iloczyn skalarny określony jest przy pomocy całki. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x = 0, \\ 0 & : x \neq 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

$f$  nie jest funkcją zerową, ale  $\|f\| = 0$ . Iloczyn skalarny wprowadzony wzorem (3.6) nie spełnia warunku (d) definicji dla pewnej grupy specyficznych funkcji takich jak (3.8). Definicję przestrzeni  $L^2(\mathbb{R}^n)$  moglibyśmy uściślić, posługując się pojęciem klasy abstrakcji. W przypadku tego kursu aż taka ścisłość nie jest potrzebna. Wystarczy pamiętać, że jeżeli dwie funkcje różnią się na niewielkim zbiorze, na przykład na zbiorze skończonym, to traktujemy je jako tę samą funkcję. Uwagi te nie dotyczą funkcji ciągłych. Jeżeli  $f$  i  $g$  są ciągłe, oraz

$$\|f - g\| = 0,$$

to  $f = g$  wszędzie.

(b)  $L^2(\mathbb{T}^n)$  To przestrzeń funkcji zdefiniowanych na podzbiorze  $\mathbb{T}^n = [-\pi, \pi]^n$  przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , całkowalnych z kwadratem. Możemy też myśleć o tych funkcjach jako o określonych na całym  $\mathbb{R}^n$ , okresowych o okresie  $2\pi$  względem każdej zmiennej, i całkowalnych z kwadratem po swoim okresie. Iloczyn skalarny wprowadzamy następująco

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Podobnie jak poprzednio, jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  są całkowalne z kwadratem, to powyższa całka istnieje.

(c)  $L^2(\mathbb{Z}^n)$  Jest to przestrzeń ciągów podwójnie nieskończonych,  $n$ -wymiarowych,

sumowalnych z kwadratem. Mając dwa ciągi z tej przestrzeni,  $f = \{f_m\}$  i  $g = \{g_m\}$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$  określamy iloczyn skalarny

$$\langle f, g \rangle = \sum_{m_1, \dots, m_n = -\infty}^{\infty} f_m \overline{g_m}.$$

Powyższa suma jest zbieżna absolutnie, i nie zależy od kolejności sumowania.

(d)  $L^2(\mathbb{Z}_p^n)$  Podobnie dla ciągów okresowych

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{p^n} \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{p-1} f_m \overline{g_m}.$$

W każdym z powyższych przypadków należy sprawdzić warunki (a)–(d) definicji przestrzeni Hilberta. Istotnym punktem do sprawdzenia pozostaje zupełność tak zdefiniowanych przestrzeni. W przypadku przestrzeni dyskretnych zupełność wynika z zupełności zbioru liczb rzeczywistych (każdy ciąg Cauchy’ego jest zbieżny). Do dowodu zupełności  $\mathbb{R}$  trzeba dokładnie przyjrzeć się definicji samych liczb rzeczywistych. W przypadku przestrzeni sygnałów ciągłych w dowodzie zupełności korzysta się z konstrukcji całki Lebesgue’a (przestrzenie zdefiniowane przy użyciu całki Riemanna nie są zupełne). Tak jak napisaliśmy wcześniej nie będziemy zajmować się tymi szczegółami technicznymi. W dalszej części kursu wystarczy (chciałoby się powiedzieć „w zupełności”) nam sama świadomość tego, że przestrzenie są zupełne.

### Zbiory liniowo niezależne

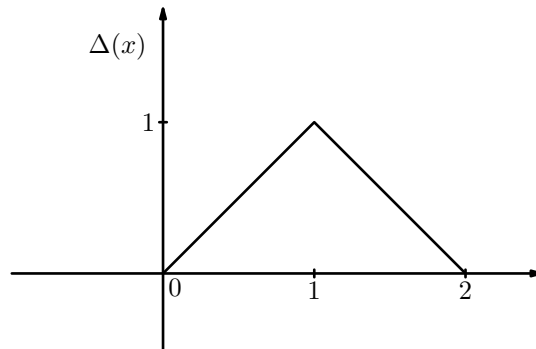
Zbiór elementów  $\{e_n\}_{n \in I}$  przestrzeni Hilberta  $E$  (skończony lub nieskończony) nazywa się liniowo niezależnym, jeżeli żaden jego element nie jest kombinacją liniową pozostałych. Można to zapisać następująco. Jeżeli dla jakichś liczb zespolonych  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  i indeksów  $n_1, \dots, n_k \in I$  zachodzi

$$\alpha_1 e_{n_1} + \dots + \alpha_k e_{n_k} = 0,$$

to  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ .

**Przykład:** Rozważmy zbiór funkcji  $\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  gdzie  $f_n(x) = \Delta(x-n)$  (przesunięcia całkowite jednej funkcji-matki  $\Delta$ ), oraz

$$\Delta(x) = \begin{cases} x & : x \in [0, 1], \\ 2-x & : x \in [1, 2], \\ 0 & : x \notin [0, 2]. \end{cases} \quad (3.9)$$



Rysunek 3.3:  $\Delta$  - splin podstawowy rzędu 1.

Pokażemy, że zbiór ten jest liniowo niezależny w  $L^2(\mathbb{R})$ .

Niech  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  będą liczbami zespolonymi, a  $n_1, \dots, n_k$  różnymi liczbami całkowitymi. Załóżmy, że kombinacja liniowa

$$\alpha_1 f_{n_1} + \dots + \alpha_k f_{n_k} \quad (3.10)$$

jest równa 0 w każdym punkcie. Zróbmy następującą obserwację. Funkcja-matka  $\Delta$  ma wartość 1 w punkcie 1 i wartość 0 w każdym innym punkcie całkowitym. W takim razie każda funkcja  $f_n$  ma wartość 1 w punkcie  $n+1$  i 0 w każdym innym punkcie całkowitym. W takim razie kombinacja liniowa (3.10) ma wartość  $\alpha_l$  w punkcie całkowitym  $n_l+1$ ,  $l=1, \dots, k$ . Jeżeli więc jest równa wszędzie 0, to  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ . Udowodniliśmy więc liniową niezależność zbioru funkcji  $\{f_n\} \subset L^2(\mathbb{R})$ .

Jeżeli jednak do tego zbioru dodamy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x & : x \in [0, 2], \\ 6 - 2x & : x \in [2, 3], \\ 0 & : x \notin [0, 3], \end{cases}$$

to powstały zbiór nie jest już liniowo niezależny, bo

$$f(x) = f_0(x) + 2f_1(x),$$

a więc

$$f(x) - f_0(x) - 2f_1(x) = 0$$

a współczynniki 1,  $-1$ ,  $-2$  nie są zerami.

Funkcje z  $L^2(\mathbb{R})$  które są ciągłe i liniowe pomiędzy sąsiednimi liczbami całkowitymi nazywają się splinami rzędu 1. Funkcje tego typu stale przewijają się i w zastosowaniach i w teorii. Funkcja  $\Delta$  nazywana jest czasem splinem podstawowym rzędu 1. Splin podstawowy oraz jego przesunięcia całkowite rozpinają (uściślimy to niedługo) przestrzeń splinów.

## Zbiory ortonormalne

Zbiór elementów  $\{e_n\}_{n \in I}$  przestrzeni Hilberta (znowu, skończony lub nie) nazywa się ortonormalnym jeżeli

$$\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & : n \neq m, \\ 1 & : n = m. \end{cases}$$

Zbiór ortonormalny składa się więc z elementów o normie 1, wzajemnie ortogonalnych. Zbiór ortonormalny jest automatycznie liniowo niezależny. Niech  $\{e_n\}$  będzie ortonormalny, niech  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  będą liczbami i niech  $n_1, \dots, n_k$  będą indeksami takimi, że

$$\alpha_1 e_{n_1} + \dots + \alpha_k e_{n_k} = 0.$$

Weźmy dowolne  $j = 1, \dots, k$  i obliczmy

$$\begin{aligned} 0 = \langle 0, e_{n_j} \rangle &= \langle \alpha_1 e_{n_1} + \dots + \alpha_k e_{n_k}, e_{n_j} \rangle \\ &= \alpha_1 \langle e_{n_1}, e_{n_j} \rangle + \dots + \alpha_k \langle e_{n_k}, e_{n_j} \rangle \\ &= \alpha_j. \end{aligned}$$

W takim razie  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ . Pokazaliśmy więc że, istotnie, zbiór ortonormalny jest liniowo niezależny.

**Przykład:** Zbiór funkcji  $e_n(x) = e^{inx}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  jest ortonormalny w  $L^2(\mathbb{T})$ . Niech  $n \in \mathbb{Z}$ , i obliczmy

$$\langle e_n, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1.$$

Pierwszy warunek jest spełniony, wszystkie funkcje  $e_n$  mają długość 1. Niech teraz  $n \neq m$

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

gdyż funkcja wykładnicza jest okresowa o okresie  $2\pi$ . Istotnie więc, funkcje  $e_n$  są wzajemnie ortogonalne.

## Zbiory Rieszsa

Zbiór  $\{e_n\}_{n \in I}$  nazywa się zbiorem Rieszsa, jeżeli istnieją stałe  $0 < A \leq B$  takie, że dla dowolnych współczynników  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  i indeksów  $n_1, \dots, n_k$  mamy następujące nierówności

$$A \sum_{l=1}^k |\alpha_l|^2 \leq \left\| \sum_{l=1}^k \alpha_l e_{n_l} \right\|^2 \leq B \sum_{l=1}^k |\alpha_l|^2. \quad (3.11)$$

Powyższa definicja może się wydawać dziwna, ale jak wkrótce zobaczymy jest bardzo naturalnym rozszerzeniem pojęcia zbioru ortonormalnego. Z punktu widzenia zastosowań zbiory Rieszsa są tak samo użyteczne jak zbiory ortonormalne. Zauważmy, że zbiór Rieszsa jest automatycznie liniowo niezależny: jeżeli kombinacja liniowa jest zerem, to tym bardziej jej norma jest zerem, a więc wstawiając to do (3.11) otrzymujemy, że wszystkie współczynniki kombinacji są zerami. Zauważmy też, że zbiór ortonormalny jest szczególnym przypadkiem zbioru Rieszsa, ze stałymi  $A = B = 1$ . Jeżeli  $\{e_n\}$  jest ortonormalny, to możemy obliczyć normę kombinacji w (3.11):

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l=1}^k \alpha_l e_{n_l} \right\|^2 &= \left\langle \sum_{l=1}^k \alpha_l e_{n_l}, \sum_{m=1}^k \alpha_m e_{n_m} \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^k \alpha_l \overline{\alpha_m} \langle e_{n_l}, e_{n_m} \rangle \\ &= \sum_{l=1}^k |\alpha_l|^2. \end{aligned}$$

**Przykład:** Wróćmy jeszcze do przykładu splinów rzędu 1, czyli przesunięć całkowitych funkcji (3.9). Wiemy, że elementy  $f_n(x) = \Delta(x - n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  są liniowo niezależne, ale łatwo zauważyć, że nie tworzą zbioru ortonormalnego w  $L^2(\mathbb{R})$ . Pokażemy, że tworzą zbiór Rieszsa. Weźmy dowolne współczynniki

$\alpha_n$ ,  $n = N, \dots, M$ , gdzie  $N, M \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=N}^M \alpha_n f_n \right\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=N}^M \alpha_n f_n(x) \right|^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=N}^M \alpha_n \Delta(x-n) \overline{\sum_{k=N}^M \alpha_k \Delta(x-k)} dx \\
&= \sum_{n,k=N}^M \alpha_n \overline{\alpha_k} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x-n) \Delta(x-k) dx \\
&= \sum_{n,k=N}^M \alpha_n \overline{\alpha_k} \beta_{k-n},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\beta_l = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x) \Delta(x-l) dx = \begin{cases} \frac{2}{3} & : l = 0, \\ \frac{1}{6} & : l = \pm 1, \\ 0 & : |l| \geq 2. \end{cases}$$

Tak więc

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=N}^M \alpha_n f_n \right\|^2 &= \beta_0 \sum_{n=N}^M |\alpha_n|^2 + \beta_1 \sum_{n=N}^{M-1} \alpha_n \overline{\alpha_{n+1}} + \beta_{-1} \sum_{n=N+1}^M \alpha_n \overline{\alpha_{n-1}} \\
&= \frac{2}{3} \sum_{n=N}^M |\alpha_n|^2 + \frac{1}{3} \Re \left( \sum_{n=N}^{M-1} \alpha_n \overline{\alpha_{n+1}} \right).
\end{aligned}$$

Korzystając z nierówności Schwarz'a szacujemy ostatni składnik

$$\begin{aligned}
\left| \Re \left( \sum_{n=N}^{M-1} \alpha_n \overline{\alpha_{n+1}} \right) \right| &\leq \left| \sum_{n=N}^{M-1} \alpha_n \overline{\alpha_{n+1}} \right| \\
&\leq \left( \sum_{n=N}^{M-1} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=N}^{M-1} |\overline{\alpha_{n+1}}|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{n=N}^M |\alpha_n|^2.
\end{aligned}$$

Podsumowując powyższe otrzymujemy

$$(2/3 - 1/3) \sum_{n=N}^M |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=N}^M \alpha_n f_n \right\|^2 \leq (2/3 + 1/3) \sum_{n=N}^M |\alpha_n|^2.$$

Istotnie więc, funkcje  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tworzą układ Riesz ze stałymi  $A = 1$  i  $B = 1/3$ .

### Rozpięcia liniowe

Niech  $\{f_n\}_{n \in I}$  będzie podzbiorem przestrzeni Hilberta  $E$ . Rozpięciem liniowym zbioru  $\{f_n\}$  nazywamy zbiór wszystkich skończonych kombinacji liniowych elementów  $\{f_n\}$ . Rozpięcie liniowe oznaczamy

$$\text{Lin} \{f_n : n \in I\}.$$

Można to powiedzieć inaczej: rozpięcie liniowe zbioru  $\{f_n\}$  to najmniejsza podprzestrzeń liniowa przestrzeni  $E$ , zawierająca wszystkie elementy  $f_n$ ,  $n \in I$ . Domknięcie

$$\overline{\text{Lin} \{f_n : n \in I\}}$$

(czyli dołączenie granic zbieżnych ciągów) zbioru  $\text{Lin} \{f_n : n \in I\}$  nazywamy domkniętym rozpięciem liniowym. Domknięte rozpięcie liniowe jest najmniejszą podprzestrzenią Hilberta zawierającą wszystkie elementy  $f_n$ ,  $n \in I$ . Jeżeli zbiór  $I$  jest skończony, to

$$\overline{\text{Lin} \{f_n : n \in I\}} = \text{Lin} \{f_n : n \in I\}.$$

**Przykład:** Ponownie wróćmy do przykładu splinów rzędu 1, czyli zbioru funkcji  $f_n(x) = \Delta(x - n)$  dla  $n \in \mathbb{Z}$ , gdzie funkcja  $\Delta$  dana jest wzorem (3.9). Pokazaliśmy wcześniej, że zbiór  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  jest liniowo niezależny. Łatwo zauważyć, że  $\text{Lin} \{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$  to zbiór funkcji o następujących własnościach:

- są ciągłe,
- są liniowe pomiędzy sąsiednimi liczbami całkowitymi,
- są zerem poza jakimś skończonym przedziałem (mają nośnik zwarty).

Istotnie, każda z funkcji  $f_n$  ma powyższe własności, o raz własności te zachowują się przy tworzeniu skończonych kombinacji liniowych. Wszystkie skończone kombinacje liniowe, czyli wszystkie elementy rozpięcia  $\text{Lin} \{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$  mają powyższe własności. Pozostaje pytanie, czy każda funkcja  $f$  posiadająca powyższe trzy własności jest elementem rozpięcia liniowego. Niech będzie dana taka funkcja  $f$ . Utwórzmy skończoną kombinację liniową

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)f_n(x+1).$$

Jest to istotnie skończona kombinacja liniowa, gdyż ze względu na ostatni warunek tylko skończenie wiele współczynników  $f(n)$  jest niezerowych. Funkcja  $g$  należy więc do rozpięcia liniowego  $\text{Lin} \{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ . Zauważmy, że w każdym punkcie całkowitym funkcje  $f$  i  $g$  są sobie równe. Dodatkowo obie są ciągłe, i liniowe pomiędzy sąsiednimi liczbami całkowitymi. Muszą więc być równe wszędzie. Skoro  $f$  jest równa  $g$ , to jest elementem rozpięcia liniowego. Wspomnijmy jeszcze, że domknięte rozpięcie liniowe składa się z następujących funkcji

$$\overline{\text{Lin} \{f_n : n \in \mathbb{Z}\}} = \left\{ f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n f_n : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \right\}.$$

Dowód tego faktu odłożymy na później, kiedy będzie on zupełnie oczywisty.

### Zbiory zupełne

Jeżeli

$$\overline{\text{Lin} \{f_n : n \in I\}} = \mathbb{H},$$

to mówimy, że zbiór  $\{f_n\}_{n \in I}$  jest zupełny w przestrzeni Hilberta  $\mathbb{H}$ . Czasem mówimy też, że zbiór ten rozpinia  $\mathbb{H}$ , lub że jest liniowo gęsty w  $\mathbb{H}$ . Zupełność zbioru  $\{f_n\}_{n \in I}$  można też wyrazić następująco:

$$\forall x \in \mathbb{H} \forall \epsilon > 0 \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k, n_1, \dots, n_k \left\| x - \sum_{l=1}^k \alpha_l f_{n_l} \right\| < \epsilon.$$

Jak wspomnieliśmy już wcześniej, zupełność o której mówimy teraz nie ma nic wspólnego z zupełnością w sensie przestrzeni metrycznej (to znaczy że ciągi Cauchy'ego są zbieżne). Wygodnym kryterium zupełności zbioru jest następujący fakt. Dowód tego faktu odłożymy do momentu kiedy przypomnimy pojęcie rzutu ortogonalnego.

**Fakt 3.2.** *Zbiór  $\{e_n\}_{n \in I} \subset \mathbb{H}$  jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy jedynym elementem  $x \in \mathbb{H}$  ortogonalnym do wszystkich  $e_n$  jest 0.*

### Bazy i rozpięcia dokładne

Podzbiór  $\{e_n\}_{n \in I}$  przestrzeni Hilberta  $\mathbb{H}$  nazywamy:

- bazą, jeżeli jest liniowo niezależny i zupełny,
- bazą ortonormalną, jeżeli jest ortonormalny i zupełny,
- bazą Riesz, jeżeli jest zbiorem Riesz i jest zupełny,



- rozpięciem dokładnym, jeżeli dla każdego elementu  $x \in \mathbb{H}$  spełniony jest warunek

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in I} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

Można udowodnić, że rozpięcie dokładne musi być zbiorem zupełnym, ale nie musi być zbiorem liniowo niezależnym. Jeżeli rozpięcie dokładne jest zbiorem liniowo niezależnym, to automatycznie jest bazą ortonormalną.

**Uwagi:** (a) Każda przestrzeń Hilberta ma bazę. Można to udowodnić korzystając z Lematu Kuratowskiego-Zorna. Każda przestrzeń Hilberta ma bazę przeliczalną. To z kolei wynika z założenia, że przestrzeń Hilberta jest ośrodkowa. Każda przestrzeń Hilberta ma bazę ortonormalną. Taką bazę możemy skonstruować z dowolnej bazy stosując procedurę Grama-Schmidta, którą za moment opiszemy. Często w dowodach używa się bazy ortonormalnej, więc warto pamiętać, że istotnie taką bazę zawsze można znaleźć, dla całej przestrzeni i dla dowolnej domkniętej podprzestrzeni (która sama w sobie też jest przestrzenią Hilberta).

(b) Każdy zbiór liniowo niezależny (Riesza, ortonormalny) można uzupełnić do bazy (bazy Riesza, bazy ortonormalnej).

(c) Dowolne dwie bazy przestrzeni Hilberta są równoliczne. Liczba elementów bazy może być skończona lub nieskończona. Ilość elementów bazy nazywamy wymiarem przestrzeni. Będziemy rozważali zarówno skończenie jak i nieskończenie wymiarowe przestrzenie Hilberta. Skończenie wymiarowe rzeczywiste przestrzenie Hilberta nazywane są przestrzeniami euklidesowymi.

(d) W zastosowaniach istotne są konkretne własności baz. Na tym wykładzie będziemy właśnie konstruowali konkretne bazy o pewnych specyficznych własnościach, które szczególnie nadają się do analizy sygnałów z którymi inżynierowie spotykają się w praktyce.

(e) Powyższa definicja bazy różni się od pojęcia bazy przestrzeni liniowej wprowadzanego na wykładzie z algebry liniowej. W tamtej definicji każdy element przestrzeni można przedstawić jako kombinację liniową elementów bazy, natomiast w definicji bazy podanej powyżej wystarczy, żeby do każdego elementu przestrzeni można było dowolnie blisko „podejść” kombinacjami liniowymi elementów bazy. Dla uniknięcia zamieszania tamtą, algebraiczną bazę czasami nazywa się „bazą Hamela”, a tę „bazą topologiczną”. Na tym wykładzie będziemy korzystali tylko z baz topologicznych, i będziemy je po prostu nazywali bazami. W przypadku przestrzeni skończenie wymiarowych oba pojęcia baz są identyczne.

## Procedura Grama-Schmidta

Niech  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  będzie przeliczalnym zbiorem elementów przestrzeni Hilberta  $\mathbb{H}$ . Procedura Grama-Schmidta w sposób indukcyjny daje nam inny zbiór elementów  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ , który:

- jest ortonormalny,
- ma takie samo rozpięcie liniowe co  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\text{Lin} \{e_n : n = 1, 2, \dots\} = \text{Lin} \{f_n : n = 1, 2, \dots\}.$$

Procedura Grama-Schmidta „wyprodukuje” bazę ortonormalną z dowolnej bazy. Przyjrzyjmy się tej procedurze. Jeżeli wyjściowy ciąg  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  zawiera zera to odrzucmy je – nie wpłynie to na rozpięcie liniowe. Niech

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}.$$

Mamy więc początek procedury indukcyjnej. Zdefiniowaliśmy pierwszy element naszego zbioru ortonormalnego, który istotnie ma dwie wymagane własności: ma długość 1, i rozpiną tą samą jednowymiarową podprzestrzeń, co  $e_1$ . Teraz opiszemy krok indukcyjny procedury. Załóżmy, że utworzony już został zbiór ortonormalny  $\{f_1, \dots, f_k\}$  o następującej własności: istnieje  $n_k$  takie, że

$$\text{Lin} \{e_1, \dots, e_{n_k}\} = \text{Lin} \{f_1, \dots, f_k\}. \quad (3.12)$$

Nie zakładaliśmy, że wyjściowy zbiór  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  jest liniowo niezależny, więc wygenerowany zbiór  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  (który jest oczywiście liniowo niezależny) może mieć mniej elementów niż wyjściowy. Dlatego liczba  $n_k \geq k$ , i te dwie liczby nie muszą być równe. Zauważmy, że dopiero co zdefiniowany element  $f_1$  spełnia powyższe założenie, z  $n_k = k = 1$ . Żeby wykonać krok indukcyjny znajdziemy element ciągu  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ , który nie należy do powyższego rozpięcia (3.12). Jeżeli takiego elementu w ciągu nie znajdziemy, innymi słowy wszystkie pozostałe elementy  $e_{n_k+1}, e_{n_k+2}, \dots$  należą do rozpięcia (3.12), to procedura się kończy, i

$$\text{Lin} \{e_n; n = 1, 2, \dots\} = \text{Lin} \{f_1, \dots, f_k\}.$$

W tym wypadku procedura Grama-Schmidta jest zakończona, a powstały zbiór ortonormalny jest skończony. Jeżeli natomiast znajdziemy element  $e_{k_0}$ , który nie należy do rozpięcia (3.12) (niech to będzie pierwszy taki element,

oczywiście musi być  $k_0 > n_k$ ), to niech  $n_{k+1} = n_{k_0}$ , i definiujemy następująco  $f_{k+1}$

$$f_{k+1} = \frac{e_{n_{k+1}} - \sum_{l=1}^k \langle e_{n_{k+1}}, f_l \rangle f_l}{\left\| e_{n_{k+1}} - \sum_{l=1}^k \langle e_{n_{k+1}}, f_l \rangle f_l \right\|}.$$

Powyższy wzór jest zupełnie naturalny. Najpierw od elementu  $e_{n_{k+1}}$  odejmujemy jego rzut prostopadły na rozpięcie (3.12), tak aby wynik był do tego rozpięcia ortogonalny, a następnie całość normujemy, żeby miała długość 1. Pojęcie rzutu prostopadłego przypomnimy za moment. Wprost z powyższego wzoru wynika, że  $\|f_{k+1}\| = 1$ . Niech  $j = 1, \dots, k$  i zauważmy, że  $f_{k+1}$  i  $f_j$  są ortogonalne

$$\begin{aligned} \langle f_{k+1}, f_j \rangle &= \frac{1}{\|\dots\|} \left\langle \left( e_{n_{k+1}} - \sum_{l=1}^k \langle e_{n_{k+1}}, f_l \rangle f_l \right), f_j \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\dots\|} \left( \langle e_{n_{k+1}}, f_j \rangle - \sum_{l=1}^k \langle e_{n_{k+1}}, f_l \rangle \langle f_l, f_j \rangle \right) \\ &= \frac{1}{\|\dots\|} (\langle e_{n_{k+1}}, f_j \rangle - \langle e_{n_{k+1}}, f_j \rangle) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Rozszerzony zbiór  $\{f_1, \dots, f_{k+1}\}$  jest więc ortonormalny. Pozostaje zauważyć, że

$$\text{Lin} \{e_1, \dots, e_{n_{k+1}}\} = \text{Lin} \{f_1, \dots, f_{k+1}\},$$

co natychmiast wynika z założenia indukcyjnego i konstrukcji elementu  $f_{k+1}$ . Krok indukcyjny jest więc wykonany. Zdefiniowaliśmy więc indukcyjną procedurę która daje w wyniku skończony lub nieskończony zbiór ortonormalny  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  o rozpięciu liniowym równym  $\text{Lin} \{e_n : n = 1, 2, \dots\}$ . Zauważmy, że skoro rozpięcia liniowe są identyczne, to także domknięte rozpięcia liniowe są równe

$$\overline{\text{Lin} \{e_n\}} = \overline{\text{Lin} \{f_n\}}.$$

W szczególności, jeżeli zbiór wyjściowy  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  jest zupełny, to zbiór  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  stanowi bazę ortonormalną. Bazy ortonormalne są bardzo wygodne w użyciu, także w zastosowaniach. Procedura Grama-Schmidta co prawda daje nam bazę ortonormalną z dowolnego zbioru zupełnego, ale elementy, które dostajemy nawet z prostych elementów wyjściowych mogą mieć zawiłą postać. Na przykład spróbujmy zastosować procedurę Grama-Schmidta do naszych splinów  $f_n(x) = \Delta(x - n)$  ( $\Delta$  dana przez (3.9)). Funkcje, które otrzymamy, co prawda stanowią zbiór ortonormalny, ale mają skomplikowaną postać w porównaniu z prostymi przesunięciami jednej funkcji-matki  $\Delta$ .

**Przykład:** Na potrzeby tego przykładu niech nasza przestrzeń Hilberta  $\mathbb{H}$  będzie składała się z funkcji całkowalnych z kwadratem na przedziale  $[-1, 1]$ , z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Rozważmy następujący zbiór  $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$e_n(x) = x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Jest to zbiór liniowo niezależny. Skończone kombinacje liniowe elementów  $e_n$  to po prostu wielomiany. Jeżeli wielomian jest równy stale 0, to wszystkie jego współczynniki są równe 0. Jest to też zbiór zupełny, co wynika z własności całki Lebesgue'a. Łatwo się przekonać, że nie jest to jednak zbiór ortonormalny. Zastosujmy do niego procedurę Grama-Schmidta. Otrzymamy w ten sposób ortonormalną bazę przestrzeni  $\mathbb{H}$ , składającą się z wielomianów. Pierwszy element  $e_0(x) = 1$  ma normę  $\sqrt{2}$ , więc  $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Następnie

$$e_1(x) - \langle e_1, f_0 \rangle f_0(x) = x.$$

Norma tej funkcji to oczywiście 1, więc zgodnie z naszą procedurą, mamy

$$f_1(x) = x.$$

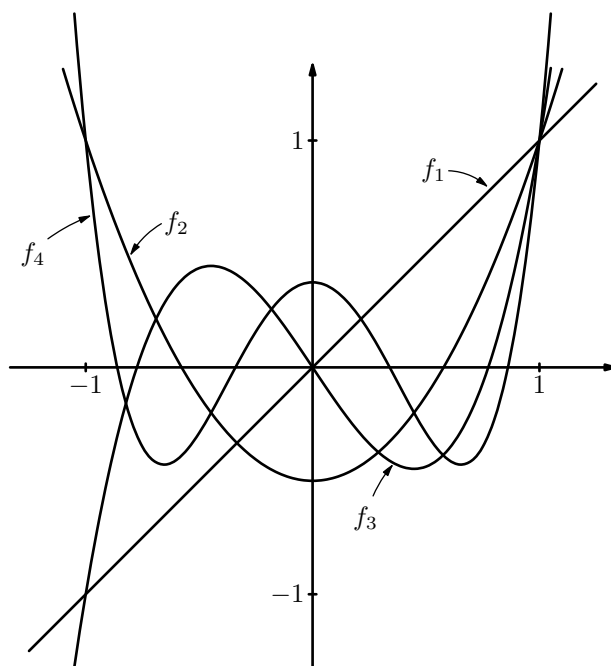
Następnie

$$\begin{aligned} e_2(x) - \langle e_2, f_0 \rangle f_0(x) - \langle e_2, f_1 \rangle f_1(x) &= \\ = x^2 - \int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{\sqrt{2}} dx \frac{1}{\sqrt{2}} - \int_{-1}^1 x^2 x dx x &= x^2 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Norma tej funkcji, co łatwo policzyć, jest równa  $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$ . Mamy więc

$$f_2(x) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left( x^2 - \frac{1}{3} \right).$$

Obliczenia komplikują się i kolejne elementy ciągu ortonormalnego  $f_n$  mają coraz bardziej zawiłą postać. Są to klasyczne wielomiany Legendre'a, które mają wiele zastosowań, na przykład do tak zwanych kwadratur Gaussa w analizie numerycznej. Mówiąc ściślej klasyczne wielomiany Legendre'a mają normalizację taką, że wartość każdego wielomianu w 1 jest równa 1. Nie mają norm równych 1. Różnią się więc od powyżej konstruowanych o stałą. Kilka wielomianów Legendre'a, z normalizacją  $f_n(1) = 1$  możemy zobaczyć na rysunku 3.4



Rysunek 3.4: Wielomiany Legendre'a.

### Bazy ortonormalne

Wspomnieliśmy, że bazy ortonormalne (w skrócie bazy o.n.) są szczególnie wygodne. Wyjaśnimy to teraz dokładniej. Przypomnijmy, że mając bazę, każdy element możemy w przybliżeniu zapisać przy pomocy skończonej kombinacji liniowej elementów bazy. Ale w jaki sposób znajdować te kombinacje liniowe? Znajdowanie reprezentacji sygnału w bazie, czyli współczynników przybliżających ten sygnał kombinacji liniowych to podstawowe zadanie w analizie sygnału. Zobaczymy teraz, jak to się robi w przypadku baz ortonormalnych, a następnie zobaczymy, że bazy Riesz i rozpięcia dokładne nie są w zastosowaniach wcale gorsze. W następujących twierdzeniach, dla uproszczenia oznaczeń, rozpatrujemy przypadek bazy nieskończonej  $e_1, e_2, \dots$ . Twierdzenia te równie dobrze stosują się do baz skończonych.

**Twierdzenie 3.3.** *Jeżeli  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  jest bazą o.n. przestrzeni  $\mathbb{H}$  to dla dowolnych liczb zespolonych  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  i dowolnego  $x \in \mathbb{H}$  zachodzi nierówność*

$$\left\| x - \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n \right\| \leq \left\| x - \sum_{n=1}^k \alpha_n e_n \right\|. \quad (3.13)$$

Równość może zachodzić tylko w szczególnym przypadku  $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$ ,  $n = 1, \dots, k$

*Dowód.*

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{n=1}^k \alpha_n e_n \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n + \sum_{n=1}^k (\langle x, e_n \rangle - \alpha_n) e_n \right\|^2 \\
&= \left\| x - \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 + \\
&\quad + 2\Re \left\langle x - \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n, \sum_{m=1}^k (\langle x, e_m \rangle - \alpha_m) e_m \right\rangle + \\
&\quad + \left\| \sum_{n=1}^k (\langle x, e_n \rangle - \alpha_n) e_n \right\|^2.
\end{aligned}$$

Powyższą równość otrzymaliśmy jak zwykle: normę sumy do kwadratu zapisaaliśmy jako iloczyn skalarny wyrażenia przez siebie, i skorzystaliśmy z liniowości iloczynu skalarnego. Ostatni składnik sumy po prawej stronie jest na pewno nieujemny, natomiast pierwszy składnik to dokładnie lewa strona nierówności (3.13). Rozważmy drugi składnik w uzyskanym wyrażeniu:

$$\begin{aligned}
\left\langle x - \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n, \sum_{m=1}^k (\langle x, e_m \rangle - \alpha_m) e_m \right\rangle &= \\
&= \sum_{m=1}^k \overline{(\langle x, e_m \rangle - \alpha_m)} \left\langle x - \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n, e_m \right\rangle = \\
&= \sum_{m=1}^k \overline{(\langle x, e_m \rangle - \alpha_m)} \left( \langle x, e_m \rangle - \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_m \rangle \right).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że ostatni nawias = 0, gdyż baza jest ortonormalna. Pokazaliśmy więc nierówność (3.13). Jeżeli zachodzi równość, to

$$\left\| \sum_{n=1}^k (\langle x, e_n \rangle - \alpha_n) e_n \right\| = 0.$$

Korzystając z własności normy kombinacja liniowa jest więc zerowa

$$\sum_{n=1}^k (\langle x, e_n \rangle - \alpha_n) e_n = 0.$$

Korzystając z liniowej niezależności elementów bazy otrzymujemy

$$\alpha_n = \langle x, e_n \rangle, \quad n = 1, \dots, k.$$

Udowodniliśmy więc ostatnią część twierdzenia. □

Przypomnijmy, że z definicji bazy wynika, że do każdego elementu przestrzeni można dowolnie blisko podejść *jakąś* kombinacją liniową elementów bazy. Powyższe twierdzenie mówi, że jeżeli baza jest ortonormalna, to najlepszymi kombinacjami liniowymi są kombinacje

$$\sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Mamy więc konkretny wzór na współczynniki tych „najefektywniejszych” kombinacji.

**Wniosek 3.4.** *Jeżeli  $\{e_n\}$  jest bazą o.n. przestrzeni  $\mathbb{H}$  to:*

(i) *dla dowolnego  $x \in \mathbb{H}$*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \quad (\text{rozkład } x \text{ względem bazy}).$$

*Dodatkowo, zbieżność powyższego szeregu jest bezwarunkowa (nie zależy od kolejności sumowania).*

(ii) *jeżeli dla jakiegoś ciągu współczynników  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  zachodzi*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

*to współczynniki muszą być iloczynami skalarnymi*

$$\alpha_n = \langle x, e_n \rangle \quad (\text{jednoznaczność rozkładu}),$$

(iii) *dla dowolnego  $x \in \mathbb{H}$*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \quad (\text{równość Plancherela}).$$

*Dowód.* (i) Korzystamy z poprzedniego twierdzenia. Niech  $l \geq k$  i niech  $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$  dla  $n = 1, \dots, k$  i  $\alpha_n = 0$  dla  $n = k + 1, \dots, l$ . Nierówność z poprzedniego twierdzenia wygląda więc następująco

$$\left\| x - \sum_{n=1}^l \langle x, e_n \rangle e_n \right\| \leq \left\| x - \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n \right\|.$$

Dalej, z definicji bazy wiemy, że dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieją współczynniki  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  takie, że

$$\left\| x - \sum_{n=1}^k \alpha_n e_n \right\| < \epsilon.$$

Z poprzedniego twierdzenia i poprzedniej uwagi wynika w takim razie, że dla tego  $\epsilon$  i tego  $k$ , oraz  $l \geq k$  mamy

$$\left\| x - \sum_{n=1}^l \langle x, e_n \rangle e_n \right\| \leq \left\| x - \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n \right\| \leq \left\| x - \sum_{n=1}^k \alpha_n e_n \right\| < \epsilon,$$

a więc szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n,$$

jest zbieżny do  $x$  w przestrzeni Hilberta  $\mathbb{H}$ . Jeżeli zmienimy numerację elementów bazy to argument nie zmienia się. Wynika z tego, że zbieżność powyższego szeregu jest bezwarunkowa. Nie musimy więc martwić się numeracją elementów bazy.

(ii) Jeżeli

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

to stosując iloczyn skalarny z  $e_n$  do obu stron i korzystając z ciągłości iloczynu skalarnego (można z iloczynem wejść pod znak sumy) mamy

$$\langle x, e_n \rangle = \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e_m, e_n \right\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \langle e_m, e_n \rangle = \alpha_n.$$

(iii) Ponownie korzystając z ciągłości iloczynu skalarnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_m \rangle e_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle x, e_m \rangle} \langle e_n, e_m \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2. \end{aligned}$$

□



**Uwagi:** (i) Z powyższego wniosku wynika, że jeżeli baza  $\{e_n\}$  jest ortonormalna, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg współczynników jest sumowalny z kwadratem

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty.$$

Łatwo to zauważyć, bo sumy częściowe obu szeregów spełniają warunek Cauchy'ego tylko równocześnie.

(ii) Równości w (i) i (ii) Wniosku są równościami w przestrzeni  $\mathbb{H}$  i, na przykład, równość w (i) oznacza

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n \right\| = 0.$$

Pamiętajmy, że elementy rozważanych przez nas przestrzeni są funkcjami, a zbieżność szeregu funkcyjnego w normie przestrzeni nie oznacza zbieżności w każdym punkcie.

(iii) Równość Plancherela

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

można rozumieć jako uogólnione (z przypadku 2-wymiarowego) twierdzenie Pitagorasa: kwadrat długości wektora jest sumą kwadratów jego składowych w kierunkach elementów bazy ortonormalnej.

### Dopełnienie ortogonalne

Jeżeli  $\mathbb{G} \subset \mathbb{H}$  jest podprzestrzenią liniową (nie zakładamy, że jest domknięta), to dopełnieniem ortogonalnym  $\mathbb{G}$  nazywamy podprzestrzeń

$$\mathbb{G}^\perp = \{x \in \mathbb{H} : \forall y \in \mathbb{G} \ x \perp y\}$$

( $x \perp y$  oznacza  $x$  jest ortogonalny do  $y$ , czyli  $\langle x, y \rangle = 0$ ). Tak zdefiniowana podprzestrzeń  $\mathbb{G}^\perp$  jest automatycznie domknięta - wynika to z ciągłości iloczynu skalarnego.

## Rzut prostopadły

Niech  $\mathbb{G} \subset \mathbb{H}$  będzie domkniętą podprzestrzenią. Rzutem prostopadłym (ortogonalnym) na  $\mathbb{G}$  nazywamy przekształcenie liniowe

$$P : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{G}$$

spełniające:

- (i)  $Px = x \quad \forall x \in \mathbb{G}$ ,
- (ii)  $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{H}$ .

**Uwaga:** Ogólnie rzutem nazywamy przekształcenie liniowe spełniające tylko (i). Rzut prostopadły dodatkowo spełnia (ii). Zauważmy, że (ii) (przy założeniu (i)) jest równoważne następującemu warunkowi prostopadłości (stąd nazwa „prostopadły”):

$$x - Px \perp \mathbb{G}, \quad \forall x \in \mathbb{H}. \quad (3.14)$$

Sprawdźmy tą równoważność. Załóżmy (ii), i niech  $x \in \mathbb{H}$ ,  $y \in \mathbb{G}$

$$\begin{aligned} \langle x - Px, y \rangle &= \langle x, y \rangle - \langle Px, y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \langle x, Py \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

gdyż  $Py = y$  ze względu na (i). W drugą stronę, załóżmy (3.14), i niech  $x, y \in \mathbb{H}$ . Mamy

$$\begin{aligned} \langle Px, y \rangle &= \langle Px, y - Py \rangle + \langle Px, Py \rangle \\ &= \langle Px, Py \rangle. \end{aligned}$$

gdyż  $Px \in \mathbb{G}$ . Podobnie  $\langle x, Py \rangle = \langle Px, Py \rangle$  i otrzymujemy (ii). Mamy następujący fakt:

**Fakt 3.5.** Warunki (i) i (ii) jednoznacznie wyznaczają przekształcenie liniowe.

*Dowód.* Załóżmy, że mamy dwa przekształcenia liniowe

$$P_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{G}, \quad i = 1, 2$$

spełniające (i) i (ii). Niech  $x \in \mathbb{H}$ .

$$\begin{aligned} \|(P_1 - P_2)x\|^2 &= \langle (P_1 - P_2)x, (P_1 - P_2)x \rangle \\ &= \langle (P_1 - P_2)^2 x, x \rangle \\ &= \langle P_1 P_1 x, x \rangle - \langle P_1 P_2 x, x \rangle - \langle P_2 P_1 x, x \rangle + \langle P_2 P_2 x, x \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

bo  $P_i P_j = P_j$ ,  $i, j = 1, 2$  (z (i)). □

Rzut prostopadły zawsze istnieje. Można go skonstruować geometrycznie, co często daje intuicję, albo analitycznie, przy pomocy bazy ortonormalnej, co przydaje się w rachunkach. Pokażemy obie te (proste) konstrukcje.

**Fakt 3.6.** *Jeżeli  $\mathbb{G} \subset \mathbb{H}$  jest domkniętą podprzestrzenią, to  $\forall x \in \mathbb{H} \exists y_x \in \mathbb{G}$  realizujący minimum odległości  $x$  od  $\mathbb{G}$ . Taki element  $y_x \in \mathbb{G}$  jest dokładnie jeden, i przyporządkowanie*

$$Px = y_x$$

jest rzutem prostopadłym  $\mathbb{H}$  na  $\mathbb{G}$ .

*Dowód.* Ustalmy  $x \in \mathbb{H}$  i oznaczmy

$$d = \inf\{\|x - y\| : y \in \mathbb{G}\}.$$

Z definicji kresu istnieje ciąg  $\{y_n\} \subset \mathbb{G}$  taki, że  $\|x - y_n\| \rightarrow d$ . Napiszmy równość równoległoboku (3.5) dla  $x - y_n$  i  $x - y_m$ :

$$\|y_n - y_m\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}(y_n - y_m)\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2.$$

Ponieważ  $\frac{1}{2}(y_n - y_m) \in \mathbb{G}$  ( $\mathbb{G}$  jest podprzestrzenią liniową), więc otrzymujemy

$$0 \leq \|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4d^2,$$

więc ciąg  $\{y_n\}$  jest Cauchy'ego, więc zbieżny. Istnieje więc element  $y_x \in \mathbb{G}$  ( $\mathbb{G}$  jest domknięta) taki, że  $y_n \rightarrow y_x$ . Z ciągłości normy  $\|x - y_x\| = d$ . Infimum odległości jest więc realizowane. Pokażemy, że  $y_x$  jest jedynym elementem realizującym to infimum. Niech  $y_x, \bar{y}_x \in \mathbb{G}$  oba realizują infimum:

$$\|x - y_x\| = \|x - \bar{y}_x\| = d.$$

Stosując równość równoległoboku, mamy

$$\begin{aligned} \|y_x - \bar{y}_x\|^2 &= 2\|x - y_x\|^2 + 2\|x - \bar{y}_x\|^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(y_x - \bar{y}_x)\|^2 \\ &= 4d^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(y_x - \bar{y}_x)\|^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Mamy więc  $y_x = \bar{y}_x$ . Przyporządkowanie

$$Px = y_x$$

spełnia warunek (i) definicji rzutu, musimy jeszcze pokazać, że spełnia (ii), i że jest przekształceniem liniowym. Najpierw pokażemy (3.14). Ustalmy dowolne  $x \in \mathbb{H}$ ,  $y \in \mathbb{G}$ ,  $\|y\| = 1$  i  $\alpha \in \mathbb{C}$

$$d^2 \leq \|x - (Px + \alpha y)\|^2 = \|x - Px\|^2 - 2\Re\bar{\alpha}\langle x - Px, y \rangle + |\alpha|^2\|y\|^2.$$

Ustalmy teraz  $\alpha = \langle x - Px, y \rangle$ , i otrzymujemy

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|x - Px\|^2 - 2|\langle x - Px, y \rangle|^2 + |\langle x - Px, y \rangle|^2 \\ &= d^2 - |\langle x - Px, y \rangle|^2. \end{aligned}$$

Otrzymujemy  $\langle x - Px, y \rangle = 0$ , więc  $x - Px \perp \mathbb{G}$ . Wiemy, że przekształcenia liniowego jest to równoważne z (ii). Pokażemy teraz, że  $P$  jest liniowe. Wiemy, że  $\forall x \in \mathbb{H}$

$$x = Px + (x - Px) = Px + Qx,$$

gdzie  $Qx \perp \mathbb{G}$ . Weźmy dowolne  $x, y \in \mathbb{H}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y) &= \alpha x + \beta y = \alpha Px + \alpha Qx + \beta Py + \beta Qy \\ P(\alpha x + \beta y) - \alpha Px - \beta Py &= \alpha Qx + \beta Qy - Q(\alpha x + \beta y). \end{aligned}$$

Obie strony są ortogonalne do siebie, więc obie strony muszą być zerami. W szczególności

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha Px + \beta Py,$$

czyli  $P$  jest liniowe. □

Pokazaliśmy geometryczną konstrukcję rzutu prostopadłego. Teraz pokażemy konstrukcję bardziej analityczną, przy pomocy bazy o.n.

**Fakt 3.7.** *Niech  $\{e_n\}_{n \in I}$  będzie bazą o.n. domkniętej podprzestrzeni  $\mathbb{G} \subset \mathbb{H}$ . Niech*

$$Px = \sum_{n \in I} \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in \mathbb{H}. \quad (3.15)$$

*Tak zdefiniowane przekształcenie jest rzutem prostopadłym na podprzestrzeń  $\mathbb{G}$ .*

*Dowód.* Musimy pokazać, że suma (3.15) jest zbieżna, a następnie sprawdzić wszystkie warunki, które musi spełniać rzut, czyli liniowość, (i) i (ii). Zbiór  $\{e_n\}_{n \in I}$  jest ortonormalny, więc można go uzupełnić do bazy o.n. całej przestrzeni  $\mathbb{H}$ . Ciąg współczynników  $\{\langle x, e_n \rangle\}$  jest więc sumowalny z kwadratem. Suma w (3.15) jest więc zbieżna w  $\mathbb{G}$ . Z definicji określa przekształcenie liniowe, z obrazem w  $\mathbb{G}$ . Skoro  $\{e_n\}$  jest bazą o.n. w  $\mathbb{G}$ , to otrzymujemy (i),

na podstawie Wniosku 3.4 (i). Sprawdźmy teraz (ii) definicji rzutu prostopadłego. Niech  $x, y \in \mathbb{H}$ . Wtedy

$$\begin{aligned}
 \langle Px, y \rangle &= \left\langle \sum_{n \in I} \langle x, e_n \rangle e_n, y \right\rangle \\
 &= \sum_{n \in I} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle \\
 &= \sum_{n \in I} \langle x, \overline{\langle e_n, y \rangle} e_n \rangle \\
 &= \sum_{n \in I} \langle x, \langle y, e_n \rangle e_n \rangle \\
 &= \left\langle x, \sum_{n \in I} \langle y, e_n \rangle e_n \right\rangle \\
 &= \langle x, Py \rangle
 \end{aligned}$$

Pokazaliśmy więc (ii) □

### Bazy Riesz

Przypomnijmy, że bazą Riesz nazwaliśmy układ wektorów  $\{e_n\}$  liniowo gęsty spełniający

$$A \sum_{\text{skończ.}} |\alpha_i|^2 \leq \left\| \sum_{\text{skończ.}} \alpha_i e_{n_i} \right\|^2 \leq B \sum_{\text{skończ.}} |\alpha_i|^2. \quad (3.16)$$

Zauważmy, że podobnie jak w przypadku baz ortonormalnych szereg nieskończony  $\sum \alpha_i e_i$  jest zbieżny w  $\mathbb{H}$  wtedy i tylko wtedy, gdy szereg  $\sum |\alpha_i|^2$  jest zbieżny. Jest to dokładnie ten sam argument co w uwadze po Wniosku 3.4. Jeżeli szereg jest zbieżny, to jest zbieżnym bezwarunkowo. Mamy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 3.8.** *Jeżeli  $\{e_n\}$  jest bazą Riesz przestrzeni  $\mathbb{H}$  to istnieje baza o.n.  $\{f_n\}$  w  $\mathbb{H}$  oraz izomorfizm*

$$U : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

(izomorfizm czyli przekształcenie liniowe odwracalne, taki, że  $U$  i  $U^{-1}$  są ciągłe), takie, że

$$U(f_n) = e_n \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

*Dowód.* Wybieramy dowolną bazę o.n.  $\{f_n\} \subset \mathbb{H}$ . Przekształcenie  $U$  definiujemy najpierw na elementach bazy wzorem (3.17), a następnie rozszerzamy

liniowo na rozpięcie liniowe  $\{f_n\}$ :

$$U\left(\sum_{\text{skończ.}} \alpha_n f_n\right) = \sum_{\text{skończ.}} \alpha_n e_n.$$

Tak zdefiniowane przekształcenie  $U$  jest ograniczone (ciągłe):

$$\left\|U\left(\sum_{\text{skończ.}} \alpha_n f_n\right)\right\|^2 = \left\|\sum_{\text{skończ.}} \alpha_n e_n\right\|^2 \leq B \sum_{\text{skończ.}} |\alpha_n|^2 = B \left\|\sum_{\text{skończ.}} \alpha_n f_n\right\|^2.$$

Takie przekształcenie rozszerza się jednoznacznie na domknięcie  $\overline{\text{Lin}\{f_n\}}$ , czyli na całe  $\mathbb{H}$ . bez podnoszenia normy  $\sqrt{B}$ . Pozostaje pokazać, że operator jest odwracalny, i odwrotny też jest ograniczony. Napiszmy operator

$$V(e_n) = f_n \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Podobnie jak  $U$  ten operator rozszerza się liniowo na rozpięcie liniowe  $\text{Lin}\{e_n\}$  i jest tam ograniczony:

$$\left\|V\left(\sum_{\text{skończ.}} \alpha_n e_n\right)\right\|^2 = \left\|\sum_{\text{skończ.}} \alpha_n f_n\right\|^2 = \sum_{\text{skończ.}} |\alpha_n|^2 \leq \frac{1}{A} \left\|\sum_{\text{skończ.}} \alpha_n e_n\right\|^2.$$

Ponownie, taki operator rozszerza się jednoznacznie na całe  $\mathbb{H}$ , bez podnoszenia normy  $\frac{1}{\sqrt{A}}$ . Mamy

$$VU = Id \text{ na } \text{Lin}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \quad UV = Id \text{ na } \text{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\},$$

czyli na gęstych podprzestrzeniach. Łatwo zauważyć, korzystając z ciągłości  $U$  i  $V$ , że powyższe tożsamości rozciągają się na domknięcia, czyli na całe  $\mathbb{H}$ . Tak więc  $V = U^{-1}$ .  $\square$

**Uwaga:** Pokazaliśmy, że każda baza Rieszki jest izomorficznym obrazem bazy o.n. W drugą stronę to też zachodzi: obraz izomorficzny bazy o.n. jest bazą Rieszki.

Z powyższego twierdzenia wynika następujące ważne twierdzenie:

**Twierdzenie 3.9.** *Jeżeli  $\{e_n\}$  jest bazą Rieszki przestrzeni  $\mathbb{H}$ , to istnieje inna baza Rieszki  $\mathbb{H}$ ,  $\{e_n^*\}$ , tak zwana baza dualna, o własności:*

$$\langle e_n, e_m^* \rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m. \end{cases} \quad (3.18)$$

Bazy  $\{e_n\}$  i  $\{e_n^*\}$  nazywamy układem biortogonalnym. Baza dualna wyznaczona jest jednoznacznie.

*Dowód.* Wybieramy dowolną bazę o.n.  $\{f_n\}$  i niech  $U$  będzie związanym z nią izomorfizmem

$$U f_n = e_n \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Niech

$$e_n^* = (U^{-1})^* U^{-1} e_n = (U^{-1})^* f_n. \quad (3.20)$$

Z uwagi poprzedzającej powyższe twierdzenie  $\{e_n^*\}$  jest pewną bazą Riesz. Zauważmy

$$\langle e_n, e_m^* \rangle = \langle e_n, (U^{-1})^* f_m \rangle = \langle U^{-1} e_n, f_m \rangle = \langle f_n, f_m \rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m. \end{cases}$$

Jest to więc wymagana baza dualna. Wyznamy jeszcze jej stałe Riesz. Niech baza wyjściowa  $\{e_n\}$  ma stałe  $0 < A \leq B$ , takie, jak w (3.16). W dowodzie Twierdzenia 3.8 pokazaliśmy, że związany z  $\{f_n\}$  izomorfizm  $U$  ma normę  $\leq \sqrt{B}$ , a odwrotny  $U^{-1}$  ma normę  $\leq 1/\sqrt{A}$ . Mamy więc

$$\begin{aligned} \sum_{\text{skończ.}} |\alpha_n|^2 &= \left\| \sum_{\text{skończ.}} \alpha_n f_n \right\|^2 = \left\| \sum_{\text{skończ.}} \alpha_n U^*(e_n^*) \right\|^2 = \left\| U^* \left( \sum_{\text{skończ.}} \alpha_n e_n^* \right) \right\|^2 \\ &\leq \|U^*\|^2 \left\| \sum_{\text{skończ.}} \alpha_n e_n^* \right\|^2 \leq B \left\| \sum_{\text{skończ.}} \alpha_n e_n^* \right\|^2 \end{aligned}$$

(bo  $(U^{-1})^* = (U^*)^{-1}$  oraz  $\|U^*\| = \|U\|$ ). Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\text{skończ.}} \alpha_n e_n^* \right\|^2 &= \left\| \sum_{\text{skończ.}} \alpha_n (U^{-1})^* f_n \right\|^2 = \left\| (U^{-1})^* \left( \sum_{\text{skończ.}} \alpha_n f_n \right) \right\|^2 \\ &\leq \|U^{-1}\|^2 \left\| \sum_{\text{skończ.}} \alpha_n f_n \right\|^2 \leq \frac{1}{A} \sum_{\text{skończ.}} |\alpha_n|^2. \end{aligned}$$

Baza  $\{e_n^*\}$  ma więc stałe Riesz  $0 \leq \frac{1}{B} \leq \frac{1}{A}$ . □

Możemy sformułować następujący odpowiednik Wniosku 3.4 dla baz Riesz:

**Wniosek 3.10.** *Jeżeli  $\{e_n\}$  jest bazą Riesz przestrzeni  $\mathbb{H}$ , a  $\{e_n^*\}$  jej bazą dualną, to:*

(i) dla dowolnego  $x \in \mathbb{H}$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n^* \rangle e_n,$$

przy czym zbieżność szeregu jest bezwzględna,

(ii) jeżeli dla jakiegoś ciągu współczynników  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  zachodzi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

to współczynniki są iloczynami skalarnymi

$$\alpha_n = \langle x, e_n^* \rangle \quad n = 1, 2, \dots$$

(iii) dla dowolnego  $x \in \mathbb{H}$  mamy

$$\frac{1}{B} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \leq \frac{1}{A} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2,$$

gdzie  $A \leq B$  są stałymi Riesz bazy  $\{e_n\}$ .

*Dowód.* (i) Skorzystamy z dowolnej bazy o.n.  $\{f_n\}$  i związanego z nią izomorfizmu  $U$ . Pamiętajmy (3.19) i (3.20), czyli  $e_n = U f_n$  i  $e_n^* = (U^{-1})^* f_n$ :

$$\begin{aligned} x &= U U^{-1} x \\ &= U \sum_{n=1}^{\infty} \langle U^{-1} x, f_n \rangle f_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, (U^{-1})^* f_n \rangle U f_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n^* \rangle e_n. \end{aligned}$$

(ii) Jednoznaczność rozkładu otrzymujemy natychmiast działając iloczynem skalarnym z  $e_n^*$  stronami na równość  $x = \sum \alpha_n e_n$ .

(iii) Zauważmy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, U f_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle U^* x, f_n \rangle|^2 = \|U^* x\|^2.$$

Prawa nierówność:

$$\|x\|^2 = \|U^{*-1} U^* x\|^2 \leq \|U^{*-1}\|^2 \cdot \|U^* x\|^2 \leq \frac{1}{A} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2,$$

( $\|U^{*-1}\|^2 = \|U^{-1}\|^2 \leq \frac{1}{A}$ ). Lewa nierówność:

$$\frac{1}{B} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \frac{1}{B} \|U^* x\|^2 \leq \frac{1}{B} \|U^*\|^2 \|x\|^2 \leq \|x\|^2,$$

( $\|U^*\|^2 = \|U\|^2 \leq B$ ). □



## Ortogonalne sumy proste

Założmy, że  $G_1$  i  $G_2$  są domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Hilberta  $E$ , oraz że są wzajemnie ortogonalne, czyli

$$G_1 \perp G_2 \quad \text{czyli} \quad \forall x_1 \in G_1, x_2 \in G_2 \quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

Niech

$$G_1 \oplus G_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in G_1, x_2 \in G_2\}$$

Tak zdefiniowany zbiór  $G_1 \oplus G_2$  nazywamy ortogonalną sumą prostą podprzestrzeni  $G_1$  i  $G_2$ . Jest to oczywiście podprzestrzeń liniowa  $E$ . Pokażemy, że jest domknięta. Niech

$$x \in G_1 \oplus G_2, \quad \text{czyli} \quad x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in G_1, x_2 \in G_2.$$

Wtedy

$$\|x\|^2 = \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2, \quad (3.21)$$

gdyż podprzestrzenie  $G_1$  i  $G_2$  są wzajemnie ortogonalne. Założmy, że mamy ciąg  $\{x^n\} \subset G_1 \oplus G_2$ , oraz  $x^n \rightarrow x^0$  w  $E$ . W szczególności

$$x^n = x_1^n + x_2^n, \quad x_1^n \in G_1, x_2^n \in G_2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

oraz niech ciąg  $\{x^n\}$  będzie ciągiem Cauchy'ego. Wtedy z (3.21) wynika, że ciągi  $\{x_1^n\}$  i  $\{x_2^n\}$  są ciągami Cauchy'ego, a więc są zbieżne.

$$x_1^n \rightarrow x_1^0 \quad \text{oraz} \quad x_2^n \rightarrow x_2^0. \quad (3.22)$$

Podprzestrzenie  $G_1$  i  $G_2$  są domknięte, więc  $x_1^0 \in G_1$  i  $x_2^0 \in G_2$ . Mamy więc  $x_1^0 + x_2^0 \in G_1 \oplus G_2$ . Z drugiej strony mamy też

$$x^n = x_1^n + x_2^n \rightarrow x_1^0 + x_2^0, \quad \text{a więc} \quad x^0 = x_1^0 + x_2^0,$$

Udowodniliśmy więc, że  $x^0 \in G_1 \oplus G_2$ . Ortogonalna suma prosta jest więc podprzestrzenią domkniętą. Będziemy korzystać z następujących faktów.

**Fakt 3.11.** *Jeżeli  $G$  jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta  $E$ , to*

$$E = G \oplus G^\perp.$$

*Dowód.* Przypomnijmy, że  $G^\perp$  też jest, automatycznie podprzestrzenią domkniętą, oraz że podprzestrzenie  $G$  i  $G^\perp$  są wzajemnie ortogonalne. Możemy więc utworzyć ortogonalną sumę prostą

$$H = G \oplus G^\perp,$$

i jest ona domkniętą podprzestrzenią  $E$ . Wystarczy więc pokazać, że  $H = E$ , czyli że każdy element  $x \in E$  rozkłada się na sumę

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in G, x_2 \in G^\perp.$$

Niech  $P : E \rightarrow G$  będzie rzutem prostopadłym, oraz niech

$$x_1 = Px, \quad x_2 = x - Px.$$

Wtedy, oczywiście  $x = x_1 + x_2$ ,  $x_1 \in G$  i wystarczy pokazać, że  $x_2 \in G^\perp$ , czyli że  $x_2 \perp y$  dla każdego  $y \in G$ . Weźmy więc  $y \in G$ , czyli  $y = Py$ . Wtedy mamy

$$\begin{aligned} \langle y, x - Px \rangle &= \langle Py, x - Px \rangle \\ &= \langle y, P(x - Px) \rangle \\ &= \langle y, Px - P^2x \rangle \\ &= \langle y, Px - Px \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

$x - Px$  należy więc do  $G^\perp$ . □

**Fakt 3.12.** *Niech*

$$E = G \oplus H,$$

*oraz niech  $\{e_n\}_{n \in I}$  będzie bazą o.n.  $G$ , a  $\{f_m\}_{m \in J}$  bazą o.n.  $H$ . Wtedy zbiór  $\{e_n\}_{n \in I} \cup \{f_m\}_{m \in J}$  jest bazą o.n.  $E$ .*

*Dowód.* Zbiór  $\{e_n\}_{n \in I} \cup \{f_m\}_{m \in J}$  jest oczywiście zbiorem o.n. Każdy element  $e_n$  jest ortogonalny do każdego  $f_m$ , gdyż  $G$  i  $H$  są wzajemnie ortogonalne. Pomiedzy sobą spełniają warunki ortonormalności z założenia. Wystarczy więc pokazać zupełność. Niech  $x \in E$ , czyli  $x = x_1 + x_2$ , gdzie  $x_1 \in G$ ,  $x_2 \in H$ . W takim razie

$$x_1 = \sum_{n \in I} \langle x_1, e_n \rangle e_n, \quad x_2 = \sum_{m \in J} \langle x_2, f_m \rangle f_m,$$

gdzie obie sumy są zbieżne w  $E$ . Mamy więc

$$x = x_1 + x_2 = \sum_{n \in I} \langle x_1, e_n \rangle e_n + \sum_{m \in J} \langle x_2, f_m \rangle f_m.$$

Widzimy więc, że  $x$  jest granicą w  $E$  kombinacji liniowych elementów  $e_n$  i  $f_m$ ,  $n \in I$ ,  $m \in J$ . □

### Nieskończone ortogonalne sumy proste

Będziemy tworzyć ortogonalne sumy proste nieskończonego ciągu wzajemnie ortogonalnych podprzestrzeni. Musimy taką sumę zdefiniować. Niech  $G_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  będzie ciągiem podprzestrzeni domkniętych przestrzeni Hilberta  $E$ , i niech podprzestrzenie  $G_n$  będą wzajemnie ortogonalne, czyli

$$G_k \perp G_l, \quad k \neq l.$$

Na podstawie definicji ortogonalnej sumy prostej dwóch podprzestrzeni możemy tworzyć (indukcyjnie) skończone sumy proste dowolnej długości

$$\bigoplus_{i=1}^n G_i = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n.$$

Zauważmy, że podprzestrzenie

$$\bigoplus_{i=1}^n G_i \tag{3.23}$$

są coraz większe (każda następna zawiera poprzednie). Weźmy sumę (sumę zbiorów) wszystkich tych podprzestrzeni.

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \bigoplus_{i=1}^n G_i \right)$$

Jest to podprzestrzeń liniowa  $E$ . Wystarczy zauważyć, że jeżeli  $x, y \in H$  to  $x + y$  też należy do  $H$ . Skoro  $H$  jest sumą zbiorów, to

$$x \in \bigoplus_{i=1}^k G_i, \quad y \in \bigoplus_{i=1}^l G_i$$

dla pewnych  $k$  i  $l$ . Niech, powiedzmy,  $k$  będzie większą z tych liczb. Ponieważ podprzestrzenie (3.23) rosną, to oba elementy

$$x, y \in \bigoplus_{i=1}^k G_i,$$

a więc

$$x + y \in \bigoplus_{i=1}^k G_i \subset H.$$

Podobnie pokazujemy, że  $H$  jest zamknięta na mnożenie przez skalary.

Podprzestrzeń  $H$  nie musi być domknięta. Definicja wygląda więc następująco

**Definicja 3.13.** *Nieskończoną sumą prostą wzajemnie ortogonalnych, domkniętych podprzestrzeni  $G_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  nazywamy domknięcie podprzestrzeni  $H$*

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n = \overline{H} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{i=1}^n G_i}.$$

Wygodnie będzie korzystać z następującego faktu.

**Fakt 3.14.** *Jeżeli podprzestrzenie  $G_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  są domknięte i wzajemnie ortogonalne, to*

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n : x_n \in G_n, n = 1, 2, \dots, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty \right\}.$$

*Dowód.* Najpierw zauważmy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad x_n \in G_n, n = 1, 2, \dots, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty \quad (3.24)$$

jest zbieżny w  $E$ . Robimy to podobnie jak w przeszłości. Niech  $m > n$ ,

$$\left\| \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^m x_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^m \|x_i\|^2. \quad (3.25)$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że elementy  $x_i$  są wzajemnie ortogonalne. Skoro ciąg liczbowy  $\{\|x_i\|\}_{i=1}^{\infty}$  jest sumowalny z kwadratem, to z (3.25) wynika, że ciąg sum częściowych szeregu (3.24) spełnia warunek Cauchy'ego, a więc szereg (3.24) istotnie jest zbieżny. Wprowadźmy oznaczenie na zbiór takich sum

$$W = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n : x_n \in G_n, n = 1, 2, \dots, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty \right\}.$$

Zauważmy, że każda suma częściowa szeregu (3.24) należy do pewnej sumy prostej

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n \in \bigoplus_{i=1}^n G_i.$$

Sumy częściowe szeregu (3.24) należą więc do podprzestrzeni

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{i=1}^n G_i.$$

W takim razie granice tych sum prostych, czyli szeregi (3.24) należą do domknięcia tej podprzestrzeni, czyli do  $\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n$ . Pokazaliśmy więc, że

$$W \subset \bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n. \quad (3.26)$$

Wiemy też, że

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{i=1}^n G_i \subset W, \quad (3.27)$$

gdyż elementy podprzestrzeni po lewej stronie to dokładnie sumy częściowe szeregów (3.24). Nałożymy stronami domknięcie na (3.27), i otrzymamy

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{i=1}^n G_i} \subset \overline{W}.$$

Wystarczy pokazać, że  $W$  jest przestrzenią domkniętą, czyli  $\overline{W} = W$ , co zakończy dowód. Niech więc  $\{x_n\}$  będzie ciągiem elementów podprzestrzeni  $W$ , zbieżnym do jakiegoś elementu przestrzeni  $E$ . Pokażemy, że granica tego ciągu też należy do  $W$ . Skoro wszystkie  $x_n \in W$ , to

$$x_n = x_n^1 + x_n^2 + \dots, \quad x_n^i \in G_i \quad \forall n, i = 1, 2, \dots,$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_n^i\|^2 = \|x_n\|^2.$$

Ciąg  $\{x_n\}$  jako ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego, czyli dla dowolnego  $\epsilon > 0$

$$\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_n^i - x_m^i\|^2 < \epsilon$$

dla  $n, m$  wystarczająco dużych. Widać więc, że dla każdego  $i$  ciąg  $\{x_n^i\}$  spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny

$$x_n^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^i,$$

a skoro  $x_n^i \in G_i$ , która jest domknięta, to  $x^i \in G_i$ . Pokażemy teraz, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x^i\|^2 < \infty, \quad (3.28)$$

a więc  $x = x^1 + x^2 + \dots \in W$ . Ustalmy  $N \in \mathbb{N}$ , i napiszmy, dla  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^N \|x_n^i\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_n^i\|^2 = \|x_n\|^2.$$

Przejdźmy do granicy gdy  $n \rightarrow \infty$  i otrzymamy

$$\sum_{i=1}^n \|x^i\|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^2 < \infty,$$

gdyż, oczywiście  $\|x_n^i\| \rightarrow \|x^i\|$  – norma jest ciągła. Nierówność jest prawdziwa dla dowolnego  $N$ , więc dostajemy (3.28). Wiemy więc już, że

$$x = x^1 + x^2 + \dots \in W.$$

Pokażemy teraz, że  $x_n \rightarrow x$ , co zakończy dowód. Niech  $\epsilon > 0$  i napiszmy następujące oszacowanie.

$$\begin{aligned} \|x - x_n\| &\leq \|x - (x^1 + \dots + x^m)\| + \\ &\quad + \|(x^1 + \dots + x^m) - (x_n^1 + \dots + x_n^m)\| + \\ &\quad + \|x_n - (x_n^1 + \dots + x_n^m)\| = I + II + III \end{aligned}$$

Powyższe oszacowanie jest oczywiście prawdziwe dla dowolnych  $n$  i  $m$ . Dobierzemy teraz odpowiednie wartości. Niech  $n_1$  będzie takie, że dla  $n, m \geq n_1$

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon. \quad (3.29)$$

Następnie, niech  $m_1$  będzie takie, że dla  $m \geq m_1$  mamy

$$\|x_{n_1} - (x_{n_1}^1 + \dots + x_{n_1}^m)\| < \epsilon \text{ oraz } \|x - (x^1 + \dots + x^m)\| < \epsilon.$$

Normy po lewych stronach maleją wraz z  $m$ , więc takie  $m_1$  na pewno istnieje. Zauważmy, że dla dowolnego  $n \geq n_1$  mamy

$$\begin{aligned} \|x_n - (x_n^1 + \dots + x_n^m)\| &\leq \|x_n - x_{n_1}\| + \|x_{n_1} - (x_{n_1}^1 + \dots + x_{n_1}^m)\| + \\ &\quad + \|(x_n^1 + \dots + x_n^m) - (x_{n_1}^1 + \dots + x_{n_1}^m)\| \leq 3\epsilon. \end{aligned}$$

Pierwsze wyrażenie po prawej stronie zostało oszacowane używając (3.29), podobnie ostatnie, przy czym mamy dodatkowo

$$\begin{aligned} \|(x_n^1 + \dots + x_n^m) - (x_{n_1}^1 + \dots + x_{n_1}^m)\| &= \\ &= \|(x_n^1 - x_{n_1}^1) + \dots + (x_n^m - x_{n_1}^m)\| = \\ &= \sqrt{\|x_n^1 - x_{n_1}^1\|^2 + \dots + \|x_n^m - x_{n_1}^m\|^2} \leq \sqrt{\|x_n - x_{n_1}\|^2} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Mamy więc  $n_1$  i  $m_1$  takie, że dla dowolnych  $n \geq n_1$  i  $m \geq m_1$  wyrażenia  $I + III$  są mniejsze niż  $4\epsilon$ . W końcu weźmy  $n_2 \geq n_1$  takie, że dla  $n \geq n_2$  mamy

$$II = \|(x^1 + \dots + x^{m_1}) - (x_n^1 + \dots + x_n^{m_1})\| \leq \epsilon.$$

Otrzymaliśmy więc, dla dowolnego  $n \geq n_2$

$$\|x - x_n\| \leq 5\epsilon.$$

Ponieważ  $\epsilon$  było dowolne, więc widzimy, że  $x_n \rightarrow x \in W$ , co kończy dowód.  $\square$

Wspomnijmy jeszcze następujący fakt

**Fakt 3.15.** *Jeżeli podprzestrzenie  $G_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  są domknięte i wzajemnie ortogonalne, i jeżeli dla każdego  $i = 1, 2, \dots$   $\{e_n^i\}_{n \in I_i}$  jest bazą o.n. podprzestrzeni  $G_i$ , to zbiór*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \{e_n^i : n \in I_i\} \tag{3.30}$$

*jest bazą o.n. podprzestrzeni*

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} G_i.$$

*Dowód.* Jest oczywiste, że zbiór (3.30) jest ortonormalny. Załóżmy, że element  $x \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} G_i$  jest ortogonalny do każdego z elementów (3.30). Wtedy  $x$  jest ortonormalny do każdej z podprzestrzeni  $G_i$ , a więc także do ich sumy prostej. Jest więc ortogonalny do siebie samego, a więc jest zerem. Korzystając z Faktu (3.2) otrzymujemy tezę.  $\square$

## Rozdział 4

# Transformata Fouriera

Przypomnimy podstawowe zagadnienia związane z transformatą Fouriera. Transformata Fouriera przekształca wyjściową funkcję w ten sposób, że wartości transformaty nie informują o wartości samej funkcji w jakimkolwiek punkcie, ale informują jaka jest zawartość składowej o danej *częstotliwości* w funkcji wyjściowej. W związku z tym obliczanie transformaty Fouriera nazywa się czasem *analizą częstotliwościową*, *analizą harmoniczną* lub *analizą spektralną* funkcji. Transformata Fouriera stanowi przekształcenie funkcji które zachowuje całą informację, i jest odwracalne. Funkcję wyjściową można odtworzyć z transformaty, przy pomocy transformaty odwrotnej. Transformata Fouriera stanowi więc, intuicyjnie, rozkład funkcji na składowe częstotliwościowe. Nie jest to ściśle stwierdzenie, bo na przykład w przypadku funkcji w  $L^2(\mathbb{R})$  transformata jest funkcją zmiennej rzeczywistej, więc musimy rozważać wszystkie częstotliwości będące liczbami rzeczywistymi, a funkcja wyjściowa w ogóle nie jest okresowa.

Transformata Fouriera jest, matematycznie, pojęciem bardzo ogólnym, które występuje w wielu sytuacjach. Dla matematyka nie jest więc niczym dziwnym, że podobne pojęcie występuje w tak wielu formach w praktyce. Jest ciągła transformata Fouriera, jest rozwinięcie w szereg Fouriera, w końcu jest dyskretna transformata Fouriera. Z punktu widzenia zastosowań ogólne podejście do transformaty Fouriera nie jest interesujące, ale kilka faktów warto znać. Jeżeli  $G$  jest lokalnie zwartą grupą abelową to rozważamy homomorfizmy grupy  $G$  w grupę liczb zespolonych o module 1 (z mnożeniem):

$$f : G \rightarrow \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}.$$

Każdy taki homomorfizm nazywa się charakterem. Charaktery można mnożyć (tak jak mnożymy funkcje, punktowo), i z tak zdefiniowanym działaniem tworzą grupę abelową. Grupę charakterów nazywamy grupą dualną do  $G$  i



oznaczamy  $\hat{G}$ . Można zdefiniować „transformatę Fouriera”, która jest wzajemnie jednoznaczny izometrycznym przekształceniem

$$\mathfrak{F} : L^2(G) \leftrightarrow L^2(\hat{G}), \quad f \mapsto \hat{f}, \quad \hat{f}(\xi) = \langle f, \xi \rangle,$$

(przypomnijmy, że charakter  $\xi$  jest funkcją na  $G$ ). Nie będziemy zajmować się tą ogólną teorią, w szczególności nie będziemy wyjaśniać szczegółów powyższych wzorów czy całkowania na  $G$  i  $\hat{G}$ . Wspomnijmy jeszcze, że grupą dualną do  $\mathbb{R}$  jest też  $\mathbb{R}$ , a grupą dualną do  $\mathbb{T}$  (liczby rzeczywiste z dodawaniem modulo  $2\pi$ ) jest  $\mathbb{Z}$ , i vice versa.

### Transformata Fouriera w $L^2(\mathbb{R})$

Niech funkcja  $f$  będzie całkowna na  $\mathbb{R}$ . Wtedy funkcja  $f(x)e^{-ix\xi}$  też jest całkowna, dla każdego  $\xi \in \mathbb{R}$ . Transformatą Fouriera funkcji  $f$  nazywamy funkcję

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx. \quad (4.1)$$

Korzystając z twierdzenia o zbieżności ograniczonej otrzymujemy natychmiast następujący fakt.

**Fakt 4.1.** *Transformata Fouriera funkcji całkownej jest funkcją ciągłą i ograniczoną na  $\mathbb{R}$ .*

**Przykłady:** (a) Funkcja charakterystyczna przedziału  $[-1/2, 1/2]$ ;

$$f(x) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ 0 & : \quad x \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

Niech  $\xi \neq 0$ . Wtedy

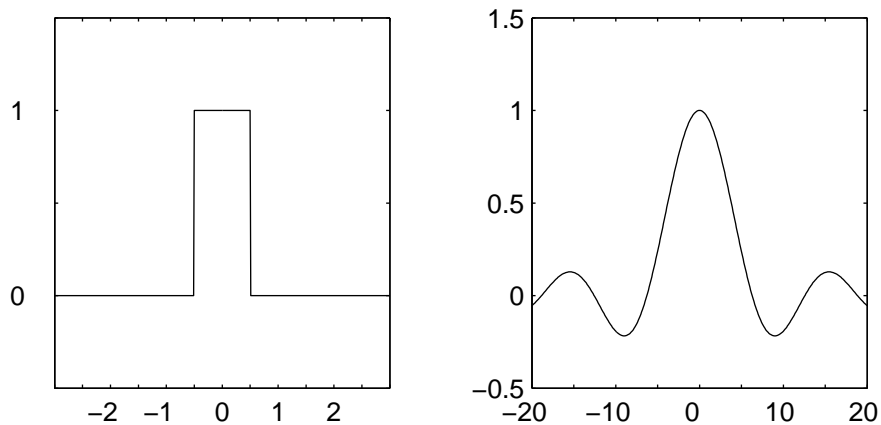
$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x)e^{-ix\xi} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-ix\xi} dx = \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{-i\xi} (e^{i\xi/2} - e^{-i\xi/2}) = \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}.$$

Dla  $\xi = 0$  rachunek jest jeszcze prostszy:

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) dx = 1.$$

(b) Jądro Gaussa-Weierstrassa

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$



Rysunek 4.1: Funkcja z przykładu (a) i jej transformata Fouriera

Wiadomo, że

$$\hat{w}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1.$$

To jest jedna z powszechnie znanych całek, którą można obliczyć na przykład używając współrzędnych biegunowych w całce podwójnej.  $w(x)$  jest funkcją całkowaną na  $\mathbb{R}$ , i

$$\hat{w}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx.$$

Transformatę tę obliczymy korzystając z następującego triku: niech  $F(\xi) = \hat{w}(\xi)$ . Wtedy różniczkując pod znakiem całki i całkując przez części otrzy-

mujemy:

$$\begin{aligned}
 F'(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{d\xi} (e^{-ix\xi}) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (-ix) e^{-ix\xi} dx \\
 &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right) e^{-ix\xi} dx \\
 &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} (e^{-ix\xi}) dx \\
 &= 0 - \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx \\
 &= -\xi F(\xi).
 \end{aligned}$$

Transformata  $F(\xi)$  spełnia więc proste równanie różniczkowe

$$F'(\xi) + \xi F(\xi) = 0.$$

Jest to proste równanie stopnia 1 ze zmiennymi rozdzielonymi, które można łatwo rozwiązać:

$$F(\xi) = c e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Podstawiając  $\xi = 0$  w końcu otrzymujemy

$$\hat{w}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Jądro Gaussa-Weierstrassa jest więc niezmiennikiem transformaty Fouriera. Jest to jedna z przyczyn, dla których ta funkcja pojawia się w wielu sytuacjach. Dla osób, które nie lubią rozwiązywać równań różniczkowych, a które lubią całkowanie po krzywych na płaszczyźnie w Dodatku obliczymy tą transformatę w inny sposób.

**Definicja 4.2.** *Splotem funkcji  $f$  i  $g$  określonych na  $\mathbb{R}$  nazywamy funkcję*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy, \quad (4.2)$$

o ile całka (4.2) istnieje dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .

Splot jest przemienny ( $f * g = g * f$ ). Jeżeli  $f$  i  $g$  są całkowalne to splot istnieje i też jest całkowalny:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f * g(x)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| |g(y)| dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

### Sploty i filtry

Pojęcie splotu będzie dla nas narzędziem w dowodach. Warto jednak wspomnieć, że splot jest jednym z podstawowych pojęć w praktyce przetwarzania sygnału. Zauważmy, że zgodnie z powyższą obserwacją, jeżeli funkcja  $\varphi$  jest całkowalna, to splot z  $\varphi$  jest przekształceniem w przestrzeni funkcji całkowalnych:

$$T_{\varphi}(f)(x) = (f * \varphi)(x).$$

Przekształcenie  $T_{\varphi}$  jest liniowe (wynika to z liniowości całki), oraz przemienne z przesunięciami. Oznaczmy przez  $\tau_{x_0}$  przesunięcie sygnału o  $x_0$

$$(\tau_{x_0}f)(x) = f(x - x_0).$$

Wtedy

$$\begin{aligned} T_{\varphi}(\tau_{x_0}f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\tau_{x_0}f)(x-y) \varphi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y-x_0) \varphi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f((x-x_0)-y) \varphi(y) dy \\ &= (T_{\varphi}(f))(x-x_0) \\ &= \tau_{x_0}(T_{\varphi}(f))(x). \end{aligned}$$

Innymi słowy

$$T_{\varphi} \cdot \tau_{x_0} = \tau_{x_0} \cdot T_{\varphi}.$$

Splot funkcji całkowalnej  $g$  z funkcją  $f \in L^2(\mathbb{R})$  jest funkcją z  $L^2(\mathbb{R})$ , i mamy nierówność

$$\|f * g\| \leq \|f\| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx.$$

To jest prosty fakt wynikający z własności całki (splot nie musi istnieć w każdym punkcie, tak jak jest w przypadku splotu dwóch funkcji całkowalnych, ale istnieje w wystarczająco wielu punktach — w prawie wszystkich punktach — aby określić funkcję w  $L^2(\mathbb{R})$ ). Z tego faktu będziemy korzystać w dowodzie twierdzenia Plancherela. Warto zwrócić uwagę, że powyższa nierówność jest zupełnie naturalna, i można o niej myśleć jako o nierówności trójkąta. Intuicyjnie, możemy przybliżyć splot sumą Riemanna

$$f * g(x) \approx \sum_{k=-M}^M f\left(x - \frac{k}{N}\right) g\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{N}.$$

Stosując do lewej strony normę  $L^2(\mathbb{R})$  i wykorzystując nierówność trójkąta, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|f * g\| &\approx \left\| \sum_{k=-M}^M f\left(\cdot - \frac{k}{N}\right) g\left(\frac{k}{N}\right) \frac{1}{N} \right\| \\ &\leq \sum_{k=-M}^M \left\| f\left(\cdot - \frac{k}{N}\right) \right\| \left| g\left(\frac{k}{N}\right) \right| \frac{1}{N} \\ &= \|f\| \sum_{k=-M}^M \left| g\left(\frac{k}{N}\right) \right| \frac{1}{N} \\ &\approx \|f\| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx. \end{aligned}$$

Kropka zastępuje zmienną całkowania występującą w normie  $L^2(\mathbb{R})$  (której nie piszemy). Skorzystaliśmy z faktu, że norma  $L^2(\mathbb{R})$  jest niezmiennicza na przesunięcia

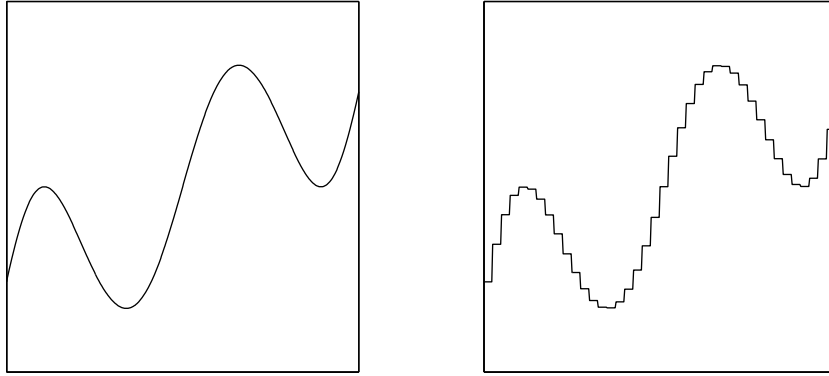
$$\|f(\cdot - t)\| = \|f\|.$$

Przekształcenie sygnału, które jest liniowe, przemienne z przesunięciami, i spełnia jeszcze pewne, niewielkie założenie ciągłości w zastosowaniach nazywa się filtrem. Filtry to właśnie sploty z funkcjami. Widzieliśmy, że splot z funkcją jest przekształceniem liniowym i przemianym z przesunięciami. Założenie ciągłości też jest spełnione, chociaż nie będziemy się zajmować szczegółami. Sploty są więc filtrami. Na odwrót też: okazuje się, że każdy filtr jest splotem. Łatwo się o tym przekonać intuicyjnie. Niech  $H$  będzie przekształceniem liniowym, przemianym z przesunięciami. Sygnał  $f$  przybliżymy funkcją schodkową:

$$f(x) \approx \sum_{k=-M}^M f\left(\frac{k}{N}\right) \chi_{[k/N, (k+1)/N)}(x),$$

gdzie  $\chi_{[a,b]}$  jest funkcją charakterystyczną

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & : x \in [a, b) \\ 0 & : x \notin [a, b). \end{cases}$$



Rysunek 4.2: Sygnał i jego przybliżenie funkcją schodkową

Wtedy

$$\begin{aligned} (Hf)(x) &\approx H \left( \sum_{k=-M}^M f \left( \frac{k}{N} \right) \chi_{[k/N, (k+1)/N)} \right) (x) \\ &= \sum_{k=-M}^M f \left( \frac{k}{N} \right) H(\chi_{[k/N, (k+1)/N)})(x) \\ &= \sum_{k=-M}^M f \left( \frac{k}{N} \right) H(\chi_{[0, 1/N)} \left( x - \frac{k}{N} \right)) \\ &= \sum_{k=-M}^M f \left( \frac{k}{N} \right) H(N\chi_{[0, 1/N)} \left( x - \frac{k}{N} \right)) \frac{1}{N} \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy \\ &= f * g(x), \end{aligned}$$

gdzie

$$g(x) \approx H(N\chi_{[0, 1/N)})(x).$$

Warunek ciągłości nałożony na filtr  $H$  powinien umożliwić przejście graniczne w naszym przybliżeniu, czyli powinien umożliwić zastąpienie  $\approx$  przez równość. Widzimy więc, że filtr  $H$  splata sygnał z pewną funkcją  $g$ , która, w przybliżeniu jest odpowiedzią filtru  $H$  na sygnał  $N\chi_{[0,1/N]}$  dla dużych  $N$ . Z powyższych rozważań można wyciągnąć następujące dwa wnioski:

- (a). Działanie filtru sprowadza się do splotu z pewną funkcją  $g$
- (b). Funkcja  $g$  jest odpowiedzią filtru na „impuls jednostkowy”, czyli funkcję dodatnią, niezerową tylko w małym otoczeniu zera, której całka jest 1.

**Uwaga 4.3.** *Mówiąc o  $g$  używamy słowa „funkcja”. Od razu jednak widać, że  $g$  może być czymś ogólniejszym od funkcji. Jeżeli  $H$  jest filtrem identycznościowym (czyli takim, który nic nie robi,  $Hf = f$ ) to  $g$  nie może być funkcją.  $g$ , jako odpowiedź filtru na impuls jednostkowy sama jest takim „impulsem jednostkowym”. Inżynierowie  $g$  nazywają funkcją uogólnioną, a matematycy dystrybucją. Impuls jednostkowy jest właśnie przykładem funkcji uogólnionej. Osoby, które chciałyby lepiej zrozumieć opisywane tutaj luźno zagadnienia powinny zapisać się na jeden z naszych wykładów z zaawansowanej analizy lub analizy funkcjonalnej, natomiast na tym wykładzie poprzestaniemy na takich, intuicyjnych, uwagach.*

Naszym celem teraz jest udowodnienie twierdzenia Plancherela, do którego będziemy potrzebowali kilka faktów.

**Fakt 4.4.** *Jeżeli  $f$  i  $g$  są całkowalne, to*

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \quad (4.3)$$

*Dowód.* Podstawiamy do wzorów, i korzystamy z własności funkcji wykładniczej

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f * g(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) e^{-ix\xi} dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iy\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-i(x-y)\xi} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iy\xi} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \hat{g}(\xi) \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

Wróćmy na moment do naszych rozważań o filtrach. Mówiliśmy, że filtry to sploty z funkcjami lub funkcjami uogólnionymi. Powyższy Fakt przenosi się na przypadek splotu z funkcją uogólnioną. Działanie filtru na sygnale, po stronie transformaty Fouriera, sprowadza się więc do mnożenia przez tak zwaną „charakterystykę” filtru. Charakterystyka filtru to transformata Fouriera jego odpowiedzi impulsowej. Bardzo często opisując filtr inżynierowie podają jego charakterystykę. Mamy też następujący prosty wzór

**Fakt 4.5.** *Jeżeli  $f$  jest całkowna i*

$$f_t(x) = \frac{1}{t} f\left(\frac{x}{t}\right), \quad t > 0, \quad (4.4)$$

to

$$\hat{f}_t(\xi) = \hat{f}(t\xi).$$

*Dowód.* Korzystamy ze wzoru na całkowanie przez podstawienie

$$\begin{aligned} \hat{f}_t(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx\xi} dx \\ &= \hat{f}(t\xi). \quad \square \end{aligned}$$

□

Korzystając z powyższych dwóch faktów udowodnimy twierdzenie o istnieniu transformaty odwrotnej. Jeżeli funkcja  $f$  jest całkowna, i jej transformata Fouriera  $\hat{f}$ , dana wzorem (4.1), też jest całkowna, to funkcję  $f$  można odtworzyć z  $\hat{f}$  przy pomocy wzoru

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \quad (4.5)$$

Ten wzór daje nam jeszcze jedną, intuicyjną wskazówkę, co do natury transformaty Fouriera. Funkcja  $f$  jest średnią ważoną oscylacji  $x \mapsto e^{ix\xi}$ , z wagami  $|\hat{f}(\xi)|$ .

**Twierdzenie 4.6.** *Jeżeli  $f$  i  $\hat{f}$  są całkowne ( $\hat{f}$  dana wzorem (4.1)), to zachodzi wzór (4.5). Innymi słowy przekształcenie całkowe*

$$\check{F}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (4.6)$$

*jest przekształceniem odwrotnym do transformaty Fouriera.*



*Dowód.* Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$w_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad \text{a więc, z (4.4),} \quad \widehat{w}_t(\xi) = \widehat{w}(\sqrt{t}\xi) = e^{-\frac{t\xi^2}{2}},$$

oraz

$$f_t(x) = f * w_t(x), \quad \text{a więc, z (4.3),} \quad \widehat{f}_t(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{w}_t(\xi).$$

Następnie obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_t(\xi) e^{i\xi y} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \widehat{w}_t(\xi) e^{i\xi y} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx e^{-\frac{t\xi^2}{2}} e^{i\xi y} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{t\xi^2}{2}} e^{-i\xi(x-y)} d\xi dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t\xi^2}{2}} e^{-i\xi(x-y)} d\xi dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{w}_{\frac{1}{t}}(x-y) dx. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \widehat{w}_{\frac{1}{t}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{z^2}{2t}} = w_t(z),$$

a więc, korzystając również z tego, że  $w_t(z) = w_t(-z)$ , kontynuując, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_t(\xi) e^{i\xi y} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) w_t(x-y) dx \\ &= f * w_t(y) \\ &= f_t(y). \end{aligned}$$

Innymi słowy pokazaliśmy, że wzór (4.5) zachodzi dla  $f_t$ :

$$f_t(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_t(\xi) e^{iy\xi} d\xi. \quad (4.7)$$

Chcielibyśmy teraz przejść w powyższym wzorze do granicy gdy  $t \rightarrow 0$ . To jest proste rozumowanie, korzystające z własności całki. Wiemy, że

$$\widehat{f}_t(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{w}_t(\xi) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \widehat{f}(\xi), \quad \text{i} \quad |\widehat{f}_t(\xi) e^{iy\xi}| \leq |\widehat{f}(\xi)|,$$

przy czym ta ostatnia funkcja jest całkowalna. Korzystając z twierdzenia o zbieżności ograniczonej otrzymujemy

$$f_t(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_t(\xi) e^{iy\xi} d\xi \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{iy\xi} d\xi, \quad (4.8)$$

dla każdego  $y \in \mathbb{R}$ . Z drugiej strony, korzystając z faktu, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_t(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1, \quad \text{if } w(x) > 0,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f_t(y)| dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(y) - f(y-x)) w_t(x) dx \right| dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(y) - f(y-\sqrt{tx})) w(x) dx \right| dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f(y-\sqrt{tx})| w(x) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f(y-\sqrt{tx})| dy w(x) dx. \end{aligned}$$

Z własności całki wynika, że przesunięcia są ciągłe względem całki, czyli

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y) - f(y-\sqrt{tx})| dy = 0.$$

Korzystając ponownie z twierdzenia o zbieżności ograniczonej otrzymujemy, że  $f_t \rightarrow f$  w sensie całki:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f_t(y) - f(y)| dy = 0.$$

Tak więc  $f_t$  jest zbieżna do  $f$  w sensie całki, i zbieżna w każdym punkcie  $y \in \mathbb{R}$  do

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{iy\xi} d\xi.$$

Z własności całki wynika, że obie te granice muszą być równe:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{iy\xi} d\xi.$$

□

Wnioskiem z powyższego jest najważniejsze twierdzenie, tak zwane twierdzenie Plancherela.

**Twierdzenie 4.7** (Plancherel). (a) *Niech  $f \in L^2(\mathbb{R})$  będzie także całkowna. Wtedy  $\hat{f}$  też należy do  $L^2(\mathbb{R})$ , oraz*

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|^2, \quad (4.9)$$

(b) *Podzbiór  $L^2(\mathbb{R})$  składający się z funkcji całkownych stanowi gęstą podprzestrzeń  $L^2(\mathbb{R})$ . Transformata Fouriera rozszerza się z tej podprzestrzeni na całe  $L^2(\mathbb{R})$ . W przypadku gdy  $f \in L^2(\mathbb{R})$  nie jest całkowna transformatę można obliczyć ze wzoru*

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(x) e^{-ix\xi} dx. \quad (4.10)$$

*Tak określone przekształcenie jest wzajemnie jednoznaczny (1-1 i „na”), izometrycznym (z dokładnością do czynnika  $\sqrt{2\pi}$ , jak we wzorze (4.9)) przekształceniem  $L^2(\mathbb{R})$  na siebie. Przekształcenie odwrotne, w przypadku gdy  $f$  nie jest całkowna, dane jest wzorem*

$$\check{f}(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M f(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \quad (4.11)$$

*Dowód.* (a) Transformata  $\hat{f}$  jest ograniczona (Fakt 4.1). Załóżmy najpierw dodatkowo, że  $\hat{f}$  też jest całkowna. Wtedy o  $f$  można myśleć jako o transformacie Fouriera funkcji  $\hat{f}$ , zgodnie z Twierdzeniem 4.6, i w takim razie  $f$  też jest ograniczona. Jak łatwo policzyć

$$\begin{aligned} \widehat{\hat{f}}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(x)} e^{-ix\xi} dx \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx} \\ &= \widehat{f}(-\xi), \end{aligned}$$

gdyż  $\overline{e^{-ix\xi}} = e^{ix\xi}$ . Podstawiamy to do wzoru, i obliczamy

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{f(x)} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(-\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}(-\xi)} \widehat{f}(-\xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.
 \end{aligned}$$

Pozbądźmy się teraz dodatkowego założenia, że  $\widehat{f}$  jest całkowalna. Niech więc teraz  $f$  będzie w  $L^2(\mathbb{R})$  i całkowalna. Podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, i z tamtymi oznaczeniami, funkcja

$$f_t = f * w_t$$

(splot z przeskalowanym jądrem Gaussa-Weierstrassa) jest całkowalna, w  $L^2(\mathbb{R})$  i ma całkowalną transformatę Fouriera ( $|\widehat{f}_t(\xi)| \leq c\widehat{w}_t(\xi)$ ). Fakt, że  $f_t$  jest w  $L^2(\mathbb{R})$  wynika z własności całki: splot funkcji całkowalnej z całkowalną z kwadratem jest całkowalny z kwadratem (była o tym mowa przy okazji omawiania własności splotów). Dla  $f_t$  możemy więc skorzystać z przeprowadzonego już dowodu

$$\|f_t\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}_t\|^2. \quad (4.12)$$

Korzystając z własności całki, podobnie jak w poprzednim dowodzie możemy pokazać, że  $f_t \rightarrow f$  w  $L^2(\mathbb{R})$  gdy  $t \rightarrow 0$ , a więc  $\|f_t\| \rightarrow \|f\|$  (norma jest funkcją ciągłą). Wynika to z ciągłości przesunięć w  $L^2(\mathbb{R})$ , (w poprzednim twierdzeniu korzystaliśmy z ciągłości przesunięć w przestrzeni funkcji całkowalnych). Z drugiej strony  $\|\widehat{f}_t\| \rightarrow \|f\|$  korzystając z twierdzenia o zbieżności ograniczonej ( $|\widehat{f}_t(\xi)|^2 \leq |\widehat{f}(\xi)|^2$ ). Przechodząc do granicy w (4.12) gdy  $t \rightarrow 0$  otrzymujemy (4.9).

(b) Jeżeli  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , to funkcje obcięte

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & : |x| \leq n \\ 0 & : |x| > n \end{cases} \quad (4.13)$$

tworzą ciąg funkcji całkowalnych, zbieżny do  $f$  w  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$\|f - f_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_n(x)|^2 dx = \int_{|x|>n} |f(x)|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Każda funkcja  $f \in L^2(\mathbb{R})$  jest więc granicą, w normie  $L^2(\mathbb{R})$ , ciągu funkcji całkowalnych. Transformatę Fouriera dla funkcji  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , które nie są całkwalne określamy więc następująco. Niech  $\{f_n\} \subset L^2(\mathbb{R})$  będzie ciągiem funkcji całkowalnych, zbieżnym do  $f$ :

$$f_n \rightarrow f \quad \text{w} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

Ciąg  $\{f_n\}$  jest ciągiem Cauchy'ego, a więc, zgodnie z (4.9), ciąg  $\{\hat{f}_n\}$  też jest Cauchy'ego w  $L^2(\mathbb{R})$ , a więc jest zbieżny do jakiegoś elementu  $F \in L^2(\mathbb{R})$ . Ta granica to, z definicji, transformata Fouriera  $f$ . Zauważmy, że ta definicja nie zależy od wyboru ciągu  $\{f_n\}$  funkcji całkowalnych, zbieżnego do  $f$ . Jeżeli dwa różne ciągi są zbieżne do  $f$ , to ich różnice tworzą ciąg zbieżny do zera:

$$f_n \rightarrow f, \quad g_n \rightarrow f \quad \text{w} \quad L^2(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f_n - g_n \rightarrow 0 \quad \text{w} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

Zgodnie z (4.9) transformaty Fouriera różnic też zbiegają do 0, a więc transformaty Fouriera tych dwóch ciągów mają tę samą granicę. Zauważmy, że oznaczając to też, że gdy wyjściowa funkcja  $f$  jest całkowalna, to nowa definicja pokrywa się ze starą — jako ciąg funkcji całkowalnych zbieżny do  $f$  można wziąć ciąg stały stale równy  $f$ . W końcu zauważmy, że skoro ciąg funkcji obciętych (4.13) składa się z funkcji całkowalnych i jest zbieżny do  $f$ , to (4.10) wynika z podanej powyżej definicji, zastosowanej do tego konkretnego ciągu. Korzystając z ciągłości normy otrzymujemy (4.9) dla dowolnej funkcji  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . W końcu pozostał do udowodnienia fakt, że transformata Fouriera jest „na”  $L^2(\mathbb{R})$ , oraz wzór (4.11). Niech  $f$  będzie dowolnym elementem  $L^2(\mathbb{R})$ . Niech  $f_n$  zbiega do  $f$  w  $L^2(\mathbb{R})$ , i składa się z funkcji całkowalnych, o całkowalnych transformatach Fouriera. Taki ciąg zawsze istnieje. Można pokazać, że funkcje na przykład różniczkowalne dwukrotnie, równe 0 poza pewnym skończonym przedziałem tworzą podzbiór gęsty  $L^2(\mathbb{R})$ , oraz mają wymagane własności: są całkwalne, oraz ich transformaty Fouriera są całkwalne. Z definicji  $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ , oraz  $\hat{f}_n$  są całkwalne, a więc  $\hat{\hat{f}}_n \rightarrow \hat{\hat{f}}$ . Wiemy z poprzedniego twierdzenia, że  $\hat{\hat{f}}_n(x) = 2\pi f_n(-x) \rightarrow 2\pi f(-x)$ . A więc  $f = \hat{F}$ , gdzie

$$F = \frac{1}{4\pi^2} \hat{\hat{f}}.$$

Z tych rachunków wynika (4.11) oraz to, że transformata Fouriera jest „na”.  $\square$

## Własności transformaty w $L^2(\mathbb{R})$

Przy założeniu, że wszystkie występujące funkcje są w  $L^2(\mathbb{R})$  mamy

$$\begin{aligned}g(x) = f(x - c) &\longrightarrow \hat{g}(\xi) = e^{-ic\xi} \hat{f}(\xi), \\g(x) = e^{i\omega x} f(x) &\longrightarrow \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \omega), \\g(x) = f(x/s) &\longrightarrow \hat{g}(\xi) = s \hat{f}(s\xi), \quad s > 0, \\g(x) = f'(x) &\longrightarrow \hat{g}(\xi) = i \xi \hat{f}(\xi), \\g(x) = -i x f(x) &\longrightarrow \hat{g}(\xi) = \hat{f}'(\xi).\end{aligned}$$

Dowody zostawiamy jako ćwiczenie. Pokażemy natomiast zastosowanie transformaty Fouriera do rozwiązania tak zwanego równania ciepła, lub równania dyfuzji.

## Równanie ciepła

Wyobraźmy sobie pręt metalowy leżący na płaszczyźnie wzdłuż osi  $OX$ . Niech pręt będzie nieskończenie długi, o pomijalnie małej średnicy, oraz niech będzie zrobiony z materiału przewodzącego ciepło, na przykład jakiegoś metalu. Niech temperatura pręta w punkcie  $x$  w czasie  $t$  będzie oznaczona przez  $u(x, t)$ . Można pokazać, że funkcja  $u$  spełnia następujące równanie ciepła

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (4.14)$$

Równanie to wynika z praw fizyki, i czasem nazywa się równaniem dyfuzji. Niech rozkład temperatury na pręcie będzie znany w czasie  $t = 0$ , czyli niech  $u$  spełnia *warunek brzegowy*

$$u(x, 0) = f(x),$$

dla zadanej funkcji  $f$ . Możemy założyć, że  $f$  spełnia jakieś warunki regularności. Nam wystarczy  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Klasyczny problem sprowadza się do znalezienia funkcji  $u(x, t)$ , spełniającej równanie ciepła, i zadany warunek brzegowy. Będziemy szukali funkcji  $u$  takiej, że dla każdego  $t \geq 0$   $u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R})$ , oraz  $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R})$ . Okazuje się, że rozwiązanie można znaleźć używając transformaty Fouriera. Teoria transformaty Fouriera powstała właśnie przy okazji badania zagadnienia ciepła. Dla ustalonego  $t \geq 0$  zastosujemy transformatę Fouriera, względem zmiennej  $x$ , do obu stron równania (4.14). Tak powstałą transformatę oznaczmy przez  $F(\xi, t)$ . Różniczkując względem  $t$  pod znakiem całki z (4.14) otrzymujemy

$$\frac{\partial F(\xi, t)}{\partial t} = -\kappa^2 \xi^2 F(\xi, t). \quad (4.15)$$

Ustalmy teraz  $\xi$  i spójrzmy na (4.15) jako na równanie różniczkowe zwyczajne funkcji zmiennej  $t$ . Równanie to łatwo rozwiązać, rozwiązanie ma postać

$$F(\xi, t) = c e^{-\kappa^2 \xi^2 t},$$

dla dowolnej stałej  $c$ . Podstawiając warunek początkowy (brzegowy), otrzymujemy

$$c = F(\xi, 0) = \hat{f}(\xi),$$

a więc

$$F(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-\kappa^2 \xi^2 t}, \quad \text{czyli} \quad u(x, t) = f * w_{\kappa^2 t}(x),$$

gdzie  $w_t$  jest znanym nam już jądrem Gaussa-Weierstrassa (zwanym także jądrem ciepła), przeskalowanym zgodnie z (4.4). Mamy więc ilustrację, jak własności transformaty Fouriera pozwalają zastosować ją do rozwiązywania równań różniczkowych. Dla inżynierów to jest główne zastosowanie transformaty Fouriera, i stanowi ona jedno z najważniejszych narzędzi inżynierskich. Poniżej udowodnimy tak zwaną zasadę nieoznaczoności Heisenberga. Zasada ta pokazuje pewien problem występujący w zastosowaniach transformaty Fouriera. Mówiąc bardzo ogólnie to jest właśnie problem, którego chcemy uniknąć zamieniając transformatę Fouriera na transformatę falkową. Zasada nieoznaczoności Heisenberga mówi, że jeżeli rozrzut wartości funkcji wokół jej wartości średniej jest mały (funkcja jest skupiona wokół jakiegoś punktu, i szybko maleje w miarę oddalania się od niego), to rozrzut wartości transformaty musi być duży (transformata Fouriera takiej funkcji nie może być skupiona wokół pewnej częstotliwości). Intuicyjnie to jest łatwe do uzasadnienia. W rzeczywistości jest to ściśle twierdzenie.

**Twierdzenie 4.8** (Zasada nieoznaczoności Heisenberga). *Niech  $f \in L^2(\mathbb{R})$  będzie unormowana, czyli  $\|f\| = 1$ , oraz taka, że  $xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$  oraz  $\xi\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ . Wtedy*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{\pi}{2}.$$

*Dowód.* Wykorzystamy następujący wzór na całkowanie przez części. Jeżeli  $h'g$ ,  $hg'$  oraz  $hg$  są całkwalne na  $\mathbb{R}$ , to

$$\int_{-\infty}^{\infty} h'(x) g(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} h(x) g'(x) dx.$$

Zauważmy, że skoro  $x^2|f(x)|^2$  oraz  $|f(x)|^2$  są całkwalne, więc  $x|f(x)|^2$  też jest całkwalna. Możemy więc skorzystać z powyższego wzoru na całkowanie

przez części:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} |f(x)|^2 dx \\
&= \left| - \int_{-\infty}^{\infty} \left( x f'(x) \overline{f(x)} + x f(x) \overline{f'(x)} \right) dx \right| \\
&\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| |f(x)| |f'(x)| dx \\
&\leq 2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Przy okazji zauważmy, że równość w powyższym oszacowaniu może zachodzić tylko wtedy, gdy zachodzi równość w wykorzystanej nierówności Schwarz'a, czyli funkcje  $x f(x)$  oraz  $f'(x)$  muszą być współliniowe: musi istnieć stała zespolona  $c$  taka, że

$$x f(x) = c f'(x).$$

Rozwiązując to równanie różniczkowe otrzymujemy, że  $f$  musi być wielokrotnością jądra Gaussa-Weierstrassa.  $\square$

## Transformata Fouriera w $L^2(\mathbb{R}^n)$

Teoria w  $L^2(\mathbb{R}^n)$  jest analogiczna do teorii 1-wymiarowej. Jeżeli  $f$  lub  $F$  są całkowalne, to

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \\
\check{F}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi,
\end{aligned}$$

gdzie  $x \cdot \xi$  oznacza zwykły iloczyn skalarny w  $\mathbb{R}^n$ . Transformata jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem  $L^2(\mathbb{R}^n)$  na siebie, a równość Plancherela ma postać

$$\|f\|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\hat{f}\|^2.$$

Wszystkie dowody są takie same, jak w przypadku  $L^2(\mathbb{R})$ .



## Transformata Fouriera w $L^2(\mathbb{T})$ (szeregi Fouriera)

Niech  $f$  będzie funkcją na  $\mathbb{R}$ , okresową o okresie  $2\pi$ , całkowalną na  $[-\pi, \pi]$ . Współczynnikami Fouriera  $f$  nazywamy ciąg

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.16)$$

Przyporządkowanie funkcji  $f$  ciągu współczynników  $\{\hat{f}(n)\}$  jest też czasem nazywane transformatą Fouriera. W przypadku funkcji okresowych, w odróżnieniu od sytuacji w  $L^2(\mathbb{R})$  każda funkcja w  $L^2(\mathbb{T})$  jest również całkowalna na przedziale  $[-\pi, \pi]$ , co wynika z nierówności Schwarz'a. Dla każdej funkcji w  $L^2(\mathbb{T})$  można więc policzyć współczynniki Fouriera ze wzoru (4.16). Zauważmy, że funkcje

$$\{e^{-inx}; n \in \mathbb{Z}\} \quad (4.17)$$

tworzą bazę ortonormalną w  $L^2(\mathbb{T})$ , więc ciąg współczynników Fouriera stanowi ciąg współczynników bazowych. Twierdzenie Plancherela w przypadku funkcji okresowych jest więc prostsze niż w przypadku  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Twierdzenie 4.9** (Plancherel). *Transformata Fouriera jest wzajemnie jednoznaczny przekształceniem  $L^2(\mathbb{T})$  na  $\ell^2$ . Przekształcenie odwrotne dane jest przez tak zwany szereg Fouriera*

$$\mathfrak{F}^{-1} : \ell^2 \rightarrow L^2(\mathbb{T}), \quad \{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \mapsto f, \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}.$$

*Szereg Fouriera jest zbieżny w  $L^2(\mathbb{T})$ . Zachodzą następujące równości*

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2, \quad \langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$$

*Dowód.* Przypomnijmy, że w  $L^2(\mathbb{T})$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Biorąc pod uwagę, że układ (4.17) stanowi bazę ortonormalną przestrzeni  $L^2(\mathbb{T})$ , powyższe twierdzenie jest szczególnym przypadkiem Wniosku 3.10 i Uwagi 3.9 z rozdziału o przestrzeni Hilberta.  $\square$

### Przykład

Niech  $f \in L^2(\mathbb{T})$  będzie dana przez

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : -\pi < x \leq 0 \\ 1 & : 0 < x \leq \pi. \end{cases} \quad (4.18)$$

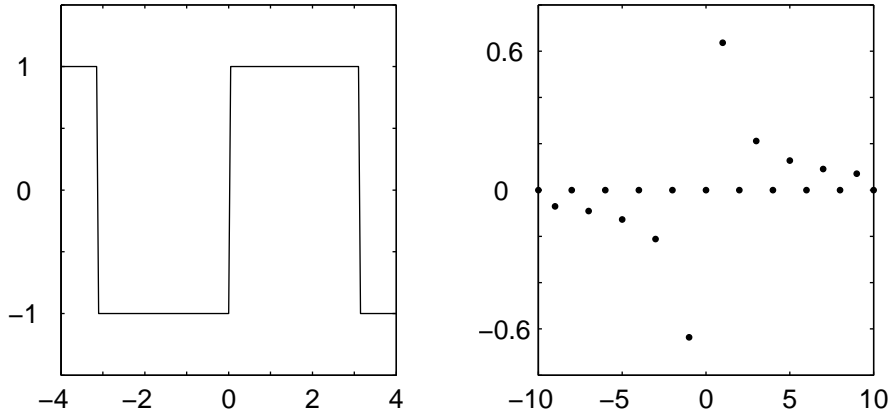
Przypomnijmy, że elementy w  $L^2(\mathbb{T})$  można rozważać jako funkcje na całej prostej, okresowe o okresie  $2\pi$ , albo jako funkcje na przedziale  $[-\pi, \pi]$ . (4.18) definiuje więc element z  $L^2(\mathbb{T})$ . W języku inżynierów powyższa funkcja (lub jej  $2\pi$  okresowe rozszerzenie na  $\mathbb{R}$ ) nazywa się „falą prostokątną”. Fala prostokątna jest typowym przykładem sygnału występującym na przykład w każdym urządzeniu zawierającym mikroprocesor. Policzmy współczynniki Fouriera  $f$

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Niech  $n \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (e^{-inx} - e^{inx}) dx \\ &= \frac{-2i}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \frac{i}{\pi n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{i}{\pi n} ((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{i\pi n} & : n - \text{nieparzyste} \\ 0 & : n - \text{parzyste} \end{cases} \end{aligned}$$

Zgodnie z twierdzeniem Plancherela funkcja  $f$  rozwija się więc w następujący szereg Fouriera. Przypomnijmy, że szereg Fouriera jest zbieżny do  $f$  w  $L^2(\mathbb{T})$ , a niekoniecznie w poszczególnych punktach  $x$ . W tym konkretnym przypadku szereg Fouriera jest zbieżny w każdym punkcie  $x$ , ale w punktach  $0, \pm\pi$  jest



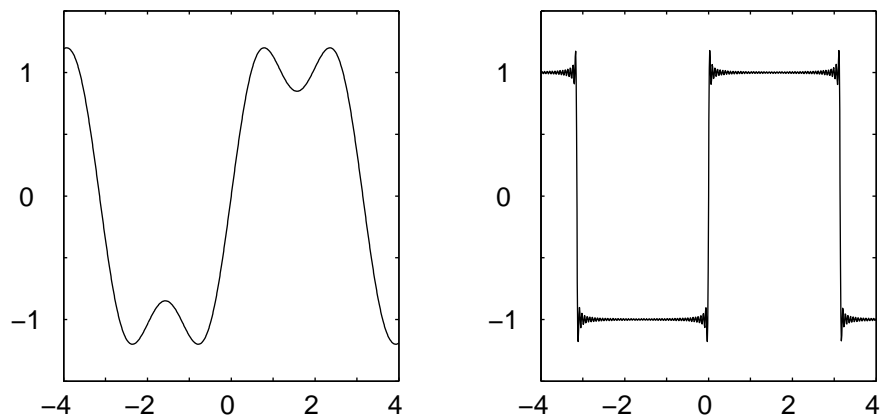
Rysunek 4.3: Funkcja  $f$  i jej współczynniki Fouriera

zbieżny do 0, a nie do wartości  $f(x)$ .

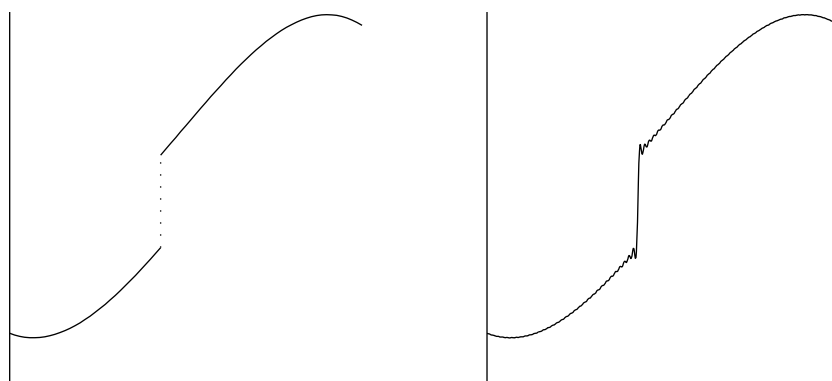
$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{2}{i\pi n} e^{inx} \\
 &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{2}{i\pi n} (e^{inx} - e^{-inx}) \\
 &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \sin nx \\
 &= \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Na wykresie 4.4 widać tak zwane zjawisko Gibbsa. W pobliżu nieciągłości skokowej funkcji  $f$  (na przykład w pobliżu 0) suma częściowa szeregu Fouriera ma „szpilki”. Szpilki mają zawsze określoną wysokość: suma skończona „przestrzela” wysokość skoku funkcji  $f$  o około 9%. Dla coraz dalszych sum częściowych szeregu Fouriera (coraz dokładniejszych przybliżeń  $f$ ) „szpilki” przysuwają się bliżej nieciągłości, ale zawsze zachowują swoją wysokość. Można to udowodnić. Jako zastosowanie obliczonych powyżej współczynników Fouriera fali prostokątnej obliczymy klasyczną sumę. Dla fali prostokątnej (4.18) mamy

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 1,$$



Rysunek 4.4: Przybliżenie funkcji  $f$  harmonicznymi do 3 i 19 włącznie



Rysunek 4.5: Zjawisko Gibbsa. Z prawej bardzo dokładne przybliżenie funkcji mającej nieciągłość skokową. Szpilki po obu stronach nieciągłości zawsze występują, i zawsze mają określoną wysokość.

a z drugiej strony

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Podstawiając do równości Plancherela otrzymujemy więc

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Następnie

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi^2}{8} &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ nieparzyste}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ parzyste}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
 &= \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},
 \end{aligned}$$

i w końcu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

W podobny sposób, stosując równość Plancherela dla odpowiedniej funkcji możemy obliczyć sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \tag{4.19}$$

dla dowolnej liczby całkowitej parzystej  $\alpha$ . Jeżeli  $\alpha$  nie jest liczbą całkowitą parzystą, to o sumach (4.19) niewiele wiadomo. Można, na przykład, udowodnić, że dla  $\alpha = 3$  suma (4.19) jest liczbą niewymierną, ale dowód jest skomplikowany. Twierdzenie Plancherela jest więc bardzo przydatne.

**Definicja 4.10.** *Splotem dwóch funkcji  $f$  i  $g$  okresowych o okresie  $2\pi$  nazywamy funkcję*

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y) dy, \tag{4.20}$$

o ile całka istnieje dla każdego  $x$ . Splotem dwóch ciągów  $\alpha = \{\alpha_n\}$ ,  $\beta = \{\beta_n\}$  nazywamy ciąg

$$\alpha * \beta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-m} \beta_m, \tag{4.21}$$

o ile powyższa suma istnieje dla każdego  $n \in \mathbb{Z}$ .

Jeżeli  $f$  i  $g$  są całkowalne na  $[-\pi, \pi]$ , to spłot  $f * g$  istnieje dla (prawie) każdego  $x$ , jest okresowy o okresie  $2\pi$  i jest całkowalny po okresie. Określenie „prawie każdy punkt” ma ścisłe znaczenie, ale nam wystarczy znaczenie intuicyjne: spłot może nie istnieć w jakimś punkcie, albo nawet w wielu punktach, ale tworzących razem zbiór pomijalnie mały z punktu widzenia całkowania. We wzorze (4.20)  $f$  i  $g$  traktujemy jako funkcje okresowe, o okresie  $2\pi$ . Możemy również myśleć o nich jako o funkcjach określonych na odcinku  $[-\pi, \pi]$ , wtedy działanie  $x - y$  należy rozumieć modulo  $2\pi$ . Jeżeli oba ciągi są sumowalne z kwadratem,  $\alpha, \beta \in \ell^2$ , to spłot istnieje, a jeżeli są absolutnie sumowalne, to spłot istnieje i też jest absolutnie sumowalny. Spłoty (4.20) i (4.21) są przemienne:  $f * g = g * f$  i  $\alpha * \beta = \beta * \alpha$ .

### Własności transformaty Fouriera na $L^2(\mathbb{T})$

Transformata w  $L^2(\mathbb{T})$  ma własności analogiczne do własności transformaty w  $L^2(\mathbb{R})$ . Przy odpowiednich założeniach mamy

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(n) &= \hat{f}(n) \hat{g}(n), \\ \widehat{(f \cdot g)}(n) &= (\hat{f} * \hat{g})(n), \\ g(x) = f(x - c) &\longrightarrow \hat{g}(n) = e^{-icn} \hat{f}(n), \\ g(x) = e^{imx} f(x) &\longrightarrow \hat{g}(n) = \hat{f}(n - m), \\ g(x) = f'(x) &\longrightarrow \hat{g}(n) = in \hat{f}(n). \end{aligned}$$

Szereg Fouriera funkcji całkowalnej nie musi być zbieżny do tej funkcji. Znany jest przykład funkcji całkowalnej której szereg Fouriera nie jest zbieżny w żadnym punkcie. Jeżeli funkcja jest w  $L^2(\mathbb{T})$ , to jej szereg Fouriera jest do niej zbieżny w  $L^2(\mathbb{T})$ . Jednak nie musi być zbieżny w każdym punkcie. Można podać przykład funkcji ciągłej, której szereg Fouriera jest rozbieżny w jakimś punkcie. Są też dobre wiadomości. Poniższe twierdzenie ma charakter lokalny, to znaczy zbieżność szeregu Fouriera funkcji w punkcie zależy tylko od zachowania tej funkcji w otoczeniu tego punktu. Jest to o tyle ciekawe, że sam szereg Fouriera nie ma charakteru lokalnego. Każdy współczynnik Fouriera zależy od wszystkich wartości funkcji, zawiera całkę po całym okresie  $\mathbb{T}$ .

**Twierdzenie 4.11.** (a) *Jeżeli  $f$  jest okresowa i całkowalna po okresie  $[-\pi, \pi]$  to*

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

(b) Jeżeli istnieje pochodna  $f'(\theta)$  w jakimś punkcie  $\theta$ , to szereg Fouriera  $f$  jest zbieżny w tym punkcie  $\theta$  do  $f(\theta)$

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta}.$$

*Dowód.* (a) Skorzystamy, jak poprzednio, z ciągłości przesunięć funkcji względem całki. Najpierw zauważmy, że jeżeli funkcja jest okresowa o okresie  $2\pi$ , to całka z tej funkcji po przedziale  $[a, a + 2\pi]$  nie zależy od  $a$ . Następnie obliczamy

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\pi/n}^{\pi+\pi/n} f(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-in(x+\pi/n)} dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inx} dx, \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned} |2\hat{f}(n)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right) e^{-inx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right| dx \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0. \end{aligned}$$

(b) Wprowadźmy funkcję pomocniczą

$$g(x) = \frac{f(x) - f(\theta)}{e^{-ix} - e^{-i\theta}}.$$

Zauważmy, że  $g$  jest okresowa o okresie  $2\pi$ , i całkowna po okresie. Całkowalność wynika z tego, że w pewnym otoczeniu  $\theta$  jest ograniczona (z istnienia pochodnej  $f'(\theta)$ ), a poza otoczeniem  $\theta$  mianownik jest ograniczony od dołu. Z (a) wynika, że  $\hat{g}(n) \rightarrow 0$  gdy  $n \rightarrow \pm\infty$ . Zauważmy jednak, że skoro

$$g(x) e^{-ix} - g(x) e^{-i\theta} = f(x) - f(\theta),$$

więc dla wszystkich  $n$

$$\hat{g}(n+1) - \hat{g}(n) e^{-i\theta} = \hat{f}(n),$$

gdzie  $\tilde{f}(x) = f(x) - f(\theta)$ . Mnożąc obie strony przez  $e^{i(n+1)\theta}$  otrzymujemy

$$\hat{g}(n+1)e^{i(n+1)\theta} - \hat{g}(n)e^{in\theta} = e^{i\theta}\hat{\tilde{f}}(n)e^{in\theta}.$$

Sumując obie strony po wszystkich  $n = -N, \dots, M$ , i zwiijając sumę teleskopową po lewej stronie mamy

$$\hat{g}(M+1)e^{i(M+1)\theta} - \hat{g}(-N)e^{i(-N)\theta} = e^{i\theta} \sum_{n=-N}^M \hat{\tilde{f}}(n)e^{in\theta}.$$

Korzystając z (a) lewa strona  $\rightarrow 0$  gdy  $M, N \rightarrow \infty$ , więc podobnie dzieje się z prawą stroną. Zauważmy, że  $\hat{\tilde{f}}(n) = \hat{f}(n)$  dla  $n \neq 0$ , oraz  $\hat{\tilde{f}}(0) = \hat{f}(0) - f(\theta)$ . Tak więc

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{f}}(n)e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{in\theta} - f(\theta).$$

Udowodniliśmy więc, że szereg Fouriera  $f$  jest zbieżny w  $\theta$  i jego sumą jest  $f(\theta)$ .  $\square$

## Transformata Fouriera w $L^2(\mathbb{T}^n)$ (wielokrotne szeregi Fouriera)

Teoria jest analogiczna do 1-wymiarowej:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i k \cdot x} dx_1 \cdots dx_n, \quad k = (k_1, \dots, k_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

$$\check{f}(x) = \sum_{k_1, \dots, k_n = -\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{i k \cdot x},$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx_1 \cdots dx_n = \sum_{k_1, \dots, k_n = -\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)},$$

$$\|f\|^2 = \sum_{k_1, \dots, k_n = -\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2.$$

Nie ma istotnych różnic w dowodach powyższych faktów dla 1 i wielu wymiarów.

## Transformata Fouriera w $\ell_p^2$ (dyskretna transformata Fouriera)

W przestrzeni  $p$ -elementowych wektorów transformata Fouriera jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem  $\ell_p^2$  na siebie. Dla  $x = (x(0), \dots, x(p-1))$



1))  $\in \ell_p^2$  mamy

$$\begin{aligned}\hat{x}(l) &= \sum_{j=0}^{p-1} x(j) e^{-i \frac{2\pi j l}{p}}, \quad l = 0, \dots, p-1, \\ \check{x}(j) &= \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} x(l) e^{i \frac{2\pi j l}{p}}, \quad j = 0, \dots, p-1, \\ \langle x, y \rangle &= \sum_{j=0}^{p-1} x(j) \overline{y(j)} = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \hat{x}(j) \overline{\hat{y}(j)} = \frac{1}{p} \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle, \\ \|x\|^2 &= \frac{1}{p} \|\hat{x}\|^2.\end{aligned}$$

Powyższe wzory wynikają z następującej obserwacji

$$\sum_{l=0}^{p-1} e^{i \frac{2\pi j l}{p}} = \begin{cases} p & : j = 0 \\ 0 & : j \neq 0. \end{cases}$$

*Splotem* dwóch elementów  $x, y \in \ell_p^2$  nazywamy element

$$x * y(k) = \sum_{l=0}^{p-1} x(k-l) y(l). \quad (4.22)$$

Jeżeli o  $x$  i  $y$  myślimy jako o wektorach  $p$ -elementowych to działanie  $k-l$  należy rozumieć jako odejmowanie modulo  $p$ , i wtedy  $k$  przebiega zakres  $0, \dots, p-1$  a więc splot też jest wektorem  $p$ -elementowym. Jeżeli natomiast o elementach  $x$  i  $y$  myślimy jako o ciągach  $p$ -okresowych, to działanie  $k-l$  w (4.22) jest zwykłym odejmowaniem, i splot  $x*y$  też jest ciągiem  $p$ -okresowym. Jak się łatwo domyśleć, zachodzi następujący wzór

$$\widehat{x * y}(k) = \hat{x}(k) \hat{y}(k).$$

## Szybka transformata Fouriera

Dyskretna transformata Fouriera występuje często w zastosowaniach. Jeżeli chcemy policzyć numerycznie transformatę Fouriera funkcji, to w rzeczywistości sprowadza się to do policzenia dyskretnej transformaty Fouriera pewnej ilości próbek danej funkcji. Obliczenie dyskretnej transformaty Fouriera  $p$ -elementowego wektora  $x = (x(0), \dots, x(p-1))$  sprowadza się do pomnożenia

go przez macierz:  $\hat{x} = A_p x$ , gdzie  $A_p$  jest  $p \times p$  macierzą

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-i2\pi/p} & \cdots & e^{-i2\pi(p-1)/p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-i2\pi(p-1)/p} & \cdots & e^{-i2\pi(p-1)(p-1)/p} \end{pmatrix},$$

o współczynnikach  $\{e^{-i2\pi(k-1)(l-1)/p}\}_{k,l=1}^p$ . Postępując naiwnie, do obliczenia transformaty Fouriera długości  $p$  będziemy więc musieli wykonać  $p^2$  mnożeń zmiennoprzecinkowych. Istnieje szybszy algorytm obliczania transformaty, wykorzystujący występujące w macierzy  $A_p$  symetrie. Jest to tak zwana szybka transformata Fouriera (FFT), która redukuje liczbę mnożeń do  $p \log p$ . Korzyść jest wielka: jeżeli  $p = 10^6$ , to szybka transformata Fouriera jest 50 tysięcy razy szybsza od algorytmu naiwnego. Jeżeli nasz komputer, używając algorytmu FFT policzy transformatę w godzinę, to używając algorytmu naiwnego potrzebowałby na to ponad 6 lat. Algorytm FFT odkryto w latach 60 ubiegłego wieku. Sam algorytm jest bardzo prosty, i wkrótce okazało się, że był stosowany już od dawna. Obliczenia z wykorzystaniem algorytmu FFT znaleziono w pracach Gaussa z końca XVIII wieku. Wniosek płynię z tego następujący: matematycy częściej mogliby interesować się zastosowaniami, a inżynierowie częściej mogliby zaglądać do prac teoretyków. I jedni i drudzy mogą znaleźć jakąś niespodziankę.

Algorytm FFT jest bardzo prosty. Zamiast od razu formułować odpowiednie twierdzenie przeprowadźmy proste rachunki, które wszystko wyjaśnią. Niech długość sygnału  $x = (x(0), x(1), \dots, x(p-1))$  będzie potęgą 2:  $p = 2^q$ , gdzie  $q = 1, 2, \dots$ , wtedy dla  $l = 0, 1, 2, \dots, p-1$

$$\begin{aligned} \hat{x}(l) &= \sum_{k=0}^{p-1} x(k) e^{-\frac{2\pi i k l}{p}} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ n \text{ parzyste}}}^{p-1} x(k) e^{-\frac{2\pi i k l}{p}} + \sum_{\substack{k=0 \\ n \text{ nieparzyste}}}^{p-1} x(k) e^{-\frac{2\pi i k l}{p}} \\ &= \sum_{k=0}^{p/2-1} x(2k) e^{-\frac{2\pi i (2k) l}{p}} + \sum_{k=0}^{p/2-1} x(2k+1) e^{-\frac{2\pi i (2k+1) l}{p}} \\ &= \sum_{k=0}^{p'-1} x'(k) e^{-\frac{2\pi i k l}{p'}} + e^{-\frac{2\pi i l}{p}} \sum_{k=0}^{p'-1} x''(k) e^{-\frac{2\pi i k l}{p'}} \\ &= \hat{x}'(l) + e^{-\frac{2\pi i l}{p}} \hat{x}''(l), \end{aligned}$$

gdzie  $p' = p/2$ ,  $x'(k) = x(2k)$ ,  $x''(k) = x(2k+1)$ ,  $k = 0, \dots, p'-1$ . Zauważmy, że  $\hat{x}'$  i  $\hat{x}''$  są okresowe o okresie  $p'$ , więc wystarczy je obliczyć dla  $l = 0, \dots, p'-1$ . Obliczenie transformaty Fouriera sygnału o długości  $p$  sprowadza się więc do:

- (a). rozdzielenia parzystych i nieparzystych składowych  $x$ ,
- (b). obliczenia transformaty Fouriera osobno dla składowych parzystych i nieparzystych, każda rzędu  $p' = p/2$ ,
- (c). utworzenia kombinacji liniowej:

$$\begin{aligned}\hat{x}(l) &= \hat{x}'(l) + e^{-\frac{2\pi i l}{p}} \hat{x}''(l), \\ \hat{x}(l + p') &= \hat{x}'(l) - e^{-\frac{2\pi i l}{p}} \hat{x}''(l)\end{aligned}$$

dla  $l = 0, \dots, p'$ .

W ten sposób udowodniliśmy następujące twierdzenie, będące podstawą algorytmu FFT:

**Twierdzenie 4.12** (Danielson-Lanczos). *Macierz*

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i2\pi/p} & \dots & e^{-i2\pi(p-1)/p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-i2\pi(p-1)/p} & \dots & e^{-i2\pi(p-1)(p-1)/p} \end{pmatrix}$$

można rozłożyć na czynniki

$$A_p = E_p \tilde{A}_{p/2} P_p,$$

gdzie macierz  $P_p$  jest postaci

$$P_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Macierz  $P_p$  ma dokładnie jedną jedynkę w każdym wierszu, a jej działanie na wektorze sprowadza się do przestawienia składowych: w pierwszej połowie umieszczone zostają składowe o numerach parzystych, a w drugiej składowe

o numerach nieparzystych:  $(x(0), x(2), \dots, x(p-2), x(1), x(3), \dots, x(p-1))$ .  
 Macierz  $\tilde{A}_{p/2}$  ma dwie niezerowe, identyczne klatki

$$\tilde{A}_{p/2} = \begin{pmatrix} A_{p/2} & 0 \\ 0 & A_{p/2} \end{pmatrix}.$$

Działanie macierzy  $\tilde{A}_{p/2}$  sprowadza się do obliczenia transformaty Fouriera rzędu  $p/2$  osobno dla pierwszych i osobno dla ostatnich  $p/2$  współczynników sygnału. W końcu macierz  $E_p$  ma postać czterech klatek

$$E_p = \begin{pmatrix} I & D \\ I & -D \end{pmatrix},$$

gdzie  $I$  są macierzami identycznościowymi rzędu  $p/2$ , a  $D$  jest macierzą diagonalną rzędu  $p/2$  ze współczynnikami

$$e^{-\frac{2\pi i 0}{p}}, e^{-\frac{2\pi i 1}{p}}, \dots, e^{-\frac{2\pi i (p/2-1)}{p}}$$

na przekątnej.

Zauważmy, że z powyższego, prostego twierdzenia wynika następujący wniosek:

**Wniosek 4.13.** *Transformatę Fouriera rzędu  $p$  (potęga 2) można obliczyć przy pomocy nie więcej niż  $p \log_2 p$  mnożeń.*

*Dowód.* Dowód jest indukcyjny względem potęgi 2. Transformata rzędu  $2^1$  to

$$\hat{x}(k) = x(0) \pm x(1), \quad k = 0, 1,$$

a więc występuje tylko 1 mnożenie, przez  $-1$ . Krok indukcyjny używa twierdzenia. Do policzenia transformaty rzędu  $p$  potrzeba 2 razy tyle mnożeń co do policzenia transformaty rzędu  $p/2$  (macierz  $\tilde{A}_{p/2}$ ) i dodatkowo  $p$  mnożeń (macierz  $E_p$ ). Macierz  $P_p$  nie wymaga mnożeń. Korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$2(p/2 \log_2(p/2)) + p = p(\log_2(p/2) + 1) = p \log_2 p.$$

□

**Uwaga:** Oszacowaliśmy tylko ilość koniecznych mnożeń, gdyż to mnożenia głównie zajmują czas procesora. Podobnie jak ilość koniecznych mnożeń można oszacować ilość wszystkich koniecznych operacji arytmetycznych.

Następujące twierdzenie daje nam algorytm FFT:

**Twierdzenie 4.14.** Niech  $p = 2^q$ . Macierz  $A_p$  rozkłada się na iloczyn

$$A_p = E_p \tilde{E}_{p/2} \cdots \tilde{E}_2 \tilde{P}_4 \tilde{P}_8 \cdots \tilde{P}_{p/2} P_p, \quad (4.23)$$

gdzie  $E_{2^j}$  oraz  $P_{2^j}$  mają to samo znaczenie co w twierdzeniu Danielsona-Lanczosa,  $\tilde{E}_{2^j}$  oraz  $\tilde{P}_{2^j}$  to macierze  $p \times p$  z  $p/2^j$  klatkami  $E_{2^j}$  i  $P_{2^j}$  odpowiednio na przekątnej.

*Dowód.* Wystarczy zauważyć, że twierdzenie Danielsona-Lanczosa można iterować:

$$A_p = E_p \tilde{A}_{p/2} P_p = E_p \tilde{E}_{p/2} \tilde{A}_{p/4} \tilde{P}_{p/2} P_p = \cdots = E_p \tilde{E}_{p/2} \cdots \tilde{E}_2 \tilde{A}_1 \tilde{P}_2 \cdots \tilde{P}_{p/2} P_p. \quad (4.24)$$

Macierze  $A_1$  i  $P_2$ , a więc także  $\tilde{A}_1$  i  $\tilde{P}_2$  są macierzami identycznościowymi, więc z (4.24) wynika (4.23).  $\square$

**Uwagi:**(i) Każda z macierzy  $\tilde{P}_{2^j}$  jest macierzą permutacji, więc ich iloczyn też jest macierzą permutacji. Wynika z tego, że przekształcenie

$$U = \tilde{P}_4 \tilde{P}_8 \cdots \tilde{P}_{p/2} P_p$$

srowadza się do pewnego przestawienia współczynników wektora  $x$ . To przedstawienie jest szczególnie proste do zaimplementowania w praktyce. Jeżeli oznaczymy  $x = (x(0), \dots, x(p-1))$  oraz  $Ux = x' = (x'(0), \dots, x'(p-1))$ , to  $x'(k) = x(l)$ , gdzie  $k$  i  $l$  mają wzajemnie symetryczne rozwinięcia w układzie dwójkowym

$$(k)_2 = e_{q-1} \cdots e_0, \quad (l)_2 = e_0 \cdots e_{q-1}, \quad e_j = 0, 1.$$

Jest to tak zwane przekształcenie odwrócenia bitów.

(ii) Przedstawiony powyżej algorytm FFT jest tylko jednym z możliwych. Niektóre programy komputerowe stosują inny algorytm. Zauważmy, że macierz dyskretnej transformaty Fouriera  $A_p$  jest symetryczna. Twierdzenie Danielsona-Lanczosa można więc zapisać jako

$$A_p = A_p^t = P_p^t \tilde{A}_{p/2} E_p^t, \quad (4.25)$$

gdzie  $^t$  oznacza transpozycję, i gdzie wykorzystaliśmy fakt, że  $A_p$  i  $\tilde{A}_{p/2}$  są symetryczne, a więc niezmiennicze ze względu na transpozycję. Powyższy wzór można udowodnić bezpośrednio, grupując elementy sumy inaczej, niż

robiliśmy to wcześniej. Niech  $p' = p/2$ .

$$\begin{aligned}
\hat{x}(l) &= \sum_{k=0}^{p-1} x(k) e^{-i \frac{2\pi kl}{p}} \\
&= \sum_{k=0}^{p/2-1} x(k) e^{-i \frac{2\pi kl}{p}} + \sum_{k=p/2}^{p-1} x(k) e^{-i \frac{2\pi kl}{p}} \\
&= \sum_{k=0}^{p'-1} \left( x(k) e^{-i \frac{2\pi kl}{p}} + x(k+p') e^{-i \frac{2\pi (k+p')l}{p}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{p'-1} (x(k) + e^{-i\pi l} x(k+p')) e^{-i \frac{2\pi kl}{p}} \\
&= \sum_{k=0}^{p'-1} (x(k) + (-1)^l x(k+p')) e^{-i \frac{2\pi kl}{p}}
\end{aligned}$$

Jeżeli  $l = 2n$ ,  $n = 0, \dots, p' - 1$  jest parzysta, to

$$\hat{x}(l) = \sum_{k=0}^{p'-1} (x(k) + x(k+p')) e^{-i \frac{2\pi kn}{p'}},$$

a jeżeli  $l = 2n + 1$  jest nieparzysta, to

$$\hat{x}(l) = \sum_{k=0}^{p'-1} (x(k) - x(k+p')) e^{-i \frac{2\pi k}{p'}} e^{-i \frac{2\pi kn}{p'}}.$$

Innymi słowy, parzyste współczynniki  $\hat{x}$  to transformata rzędu  $p'$  wektora  $x'$  o współczynnikach

$$x'(k) = x(k) + x(k+p'),$$

a nieparzyste to transformata wektora  $x''$

$$x''(k) = (x(k) - x(k+p')) e^{-i \frac{2\pi k}{p'}}.$$

Łatwo sprawdzić, że powyższe obliczenia dają nam dokładnie (4.25). Zauważmy też, że macierz  $U$  z poprzedniej uwagi jest symetryczna, więc stosując ten algorytm również dochodzimy do przekształcenia odwrócenia bitów, z tym, że w poprzednim algorytmie był to pierwszy krok szybkiej transformaty, a w omawianym teraz wariancie jest to ostatni krok.

(iii) Omawialiśmy przypadek, gdy sygnał miał długość będącą potęgą 2. W praktyce to jest przypadek najważniejszy. Sygnały o innych długościach są przedłużane do najbliższej potęgi 2, na przykład dodaje się odpowiednią ilość zer. Szybki algorytm można jednak skonstruować niezależnie dla sygnałów o innych długościach.

## Transformaty trygonometryczne

Naturalnym językiem transformat Fouriera w ich wszystkich wcieleniach, w tym także dyskretnej transformaty Fouriera jest język liczb zespolonych. W zastosowaniach jest to niepraktyczne. Sygnały rzeczywiste mają transformaty o wartościach zespolonych. Takie sygnały o wartościach zespolonych wymagają innych struktur do przechowywania i manipulacji. Nie jest to wielkim problemem, ale w praktyce wygodniejsze jest posługiwanie się transformatami, które sygnały rzeczywiste przekształcają na rzeczywiste. Są to tak zwane transformaty trygonometryczne. Transformaty takie powstają przez proste przekształcenie transformaty Fouriera i w związku z tym można stosować do nich szybkie algorytmy. Podstawową obserwacją jest fakt, że jeżeli sygnał rzeczywisty  $x = (x(0), \dots, x(p-1))$  jest parzysty, czyli

$$x(p-k) = x(k),$$

to jego transformata Fouriera też jest rzeczywista, a jeżeli jest nieparzysty, czyli

$$x(p-k) = -x(k), \quad x(0) = 0,$$

to transformata jest czysto urojona. Istniejące sygnały można więc odpowiednio przedłużyć i zastosować do nich transformatę Fouriera odpowiedni wysokiego rzędu. W praktyce spotyka się kilka odmian transformat sinusowych i cosinusowych, które otrzymuje się właśnie mniej więcej według powyższego schematu. Na przykład, wyprowadzimy wzór na jedną z transformat cosinusowych. Niech dany będzie sygnał o długości  $p$ ,  $x = (x(0), \dots, x(p-1))$ . Niech  $\tilde{x}$  będzie przedłużeniem  $x$  o długości  $2p$ , zdefiniowanym następująco:

$$\tilde{x}(k) = \begin{cases} x(k) & : k = 0, \dots, p-1 \\ x(2p-k-1) & : k = p, \dots, 2p-1. \end{cases}$$

Zauważmy, że sygnał  $\tilde{x}$  ma pewną symetrię — jest „parzysty” wokół punktu  $p-1/2$ :

$$\tilde{x}((p-1/2)+l) = \tilde{x}((p-1/2)-l),$$

gdzie  $l$  jest liczbą połówkową,  $2l = 1, 3, \dots, 2p - 1$ . Obliczmy transformatę Fouriera długości  $2p$  sygnału rozszerzonego  $\tilde{x}$ .

$$\begin{aligned}\widehat{\tilde{x}}(l) &= \sum_{k=0}^{2p-1} \tilde{x}(k) e^{-i \frac{2\pi kl}{2p}} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \tilde{x}(k) e^{-i \frac{2\pi kl}{2p}} + \sum_{k=p}^{2p-1} \tilde{x}(k) e^{-i \frac{2\pi kl}{2p}} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} x(k) e^{-i \frac{\pi kl}{p}} + \sum_{k=p}^{2p-1} x(2p - k - 1) e^{-i \frac{\pi kl}{p}}.\end{aligned}$$

Przenumerujmy składniki drugiej sumy, niech nowy indeks  $k' = 2p - k - 1$ . Nowy indeks (też go potem nazwiemy  $k$ ) biegnie od 0 do  $p-1$ . Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\widehat{\tilde{x}}(l) &= \sum_{k=0}^{p-1} x(k) \left( e^{-i \frac{\pi kl}{p}} + e^{-i \frac{\pi(2p-k-1)l}{p}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} x(k) \left( e^{-i \frac{\pi kl}{p}} + e^{i \frac{\pi kl}{p}} e^{i \frac{\pi l}{p}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} x(k) e^{i \frac{\pi l}{2p}} \left( e^{-i \frac{\pi(k+1/2)l}{p}} + e^{i \frac{\pi(k+1/2)l}{p}} \right) \\ &= 2 e^{i \frac{\pi l}{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} x(k) \cos \left( \frac{\pi(k+1/2)l}{p} \right).\end{aligned}$$

Zauważmy, że transformata Fouriera  $\tilde{x}$  zależy tylko od współczynników „cosinusowych”

$$\hat{x}_c(l) = \sum_{k=0}^{p-1} x(k) \cos \left( \frac{\pi(k+1/2)l}{p} \right).$$

Mamy więc

$$\widehat{\tilde{x}}(l) = 2 \cdot e^{i \frac{\pi l}{2p}} \cdot \hat{x}_c(l).$$

Zróbmy jeszcze następujące obserwacje

$$\begin{aligned}\widehat{\tilde{x}}(0) &= 2 \cdot \hat{x}_c(0), \\ \widehat{\tilde{x}}(p) &= e^{i \frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{p-1} x(k) \cos(\pi(k+1/2)) = 0,\end{aligned}$$



gdyż  $\cos(\pi(k+1/2)) = 0$  dla każdej liczby całkowitej  $k$ . W końcu zauważmy, że

$$\widehat{x}(2p-l) = \widehat{x}(l).$$

Rekonstruując  $\tilde{x}$ , korzystając z odwrotnej transformaty Fouriera, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k) &= \frac{1}{2p} \sum_{l=0}^{2p-1} \widehat{x}(l) e^{i \frac{2\pi kl}{2p}} \\ &= \frac{1}{2p} \widehat{x}(0) + \frac{1}{2p} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq p}}^{2p-1} \widehat{x}(l) e^{i \frac{2\pi kl}{2p}} \\ &= \frac{1}{p} \hat{x}_c(0) + \frac{1}{2p} \sum_{l=1}^{p-1} \left( \widehat{x}(l) e^{i \frac{2\pi kl}{2p}} + \widehat{x}(2p-l) e^{i \frac{2\pi k(2p-l)}{2p}} \right) \\ &= \frac{1}{p} \hat{x}_c(0) + \frac{1}{2p} \sum_{l=1}^{p-1} 2\hat{x}_c(l) \left( e^{i \frac{\pi l}{2p}} e^{i \frac{2\pi kl}{2p}} + \overline{e^{i \frac{\pi l}{2p}} e^{i \frac{2\pi kl}{2p}}} \right) \\ &= \frac{1}{p} \hat{x}_c(0) + \frac{2}{p} \sum_{l=1}^{p-1} \hat{x}_c(l) \cos \left( \frac{\pi(k+1/2)l}{p} \right). \end{aligned}$$

Gdy  $k = 0, \dots, p-1$  to  $\tilde{x}(k) = x(k)$ , więc otrzymaliśmy wzór na odwrotną transformatę cosinusową. Podsumowując: transformata cosinusowa i odwrotna transformata cosinusowa dane są wzorami

$$\begin{aligned} \hat{x}_c(l) &= \sum_{k=0}^{p-1} x(k) \cos \left( \frac{\pi(k+1/2)l}{p} \right), \quad l = 0, \dots, p-1, \\ \check{x}_c(k) &= \frac{1}{p} x(0) + \frac{2}{p} \sum_{l=1}^{p-1} x(l) \cos \left( \frac{\pi(k+1/2)l}{p} \right), \quad k = 0, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Transformata cosinusowa związana jest z dyskretną transformatą Fouriera wzorem

$$C_p = R_p A_{2p} Q_p,$$

gdzie  $C_p$  jest macierzą odpowiadającą transformacie cosinusowej, natomiast  $R_p$  i  $Q_p$  są pewnymi macierzami prostokątnymi, zawierającymi w większości zera. Dokładne wzory na  $R_p$  i  $Q_p$  można otrzymać analizując przeprowadzone powyżej rachunki.

Przypomnijmy, że powyższe wzory stanowią tylko jeden z możliwych wariantów transformat trygonometrycznych.

# Rozdział 5

## Analiza Wielorozdzielcza

### Bazy falkowe

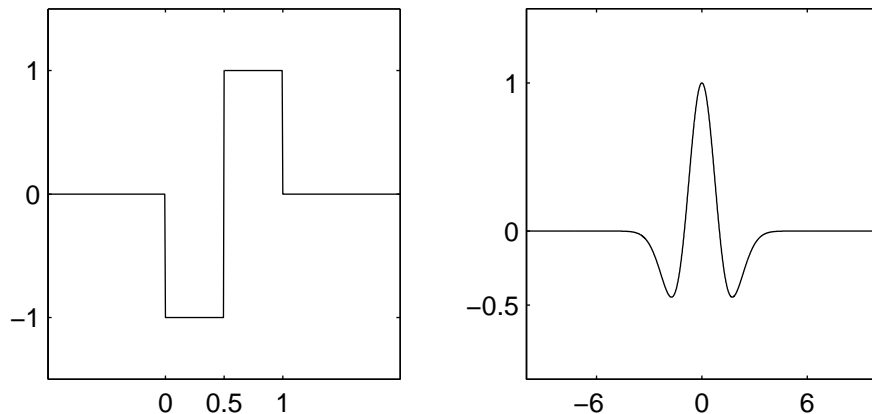
W tym rozdziale przedmiotem naszego zainteresowania będzie konstrukcja szczególnego rodzaju baz w przestrzeni  $L^2(\mathbb{R})$ , tak zwanych baz falkowych. Baza falkowa to baza ortonormalna w  $L^2(\mathbb{R})$  następującej postaci

$$\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - n); n, j \in \mathbb{Z}\}, \quad (5.1)$$

dla pewnej funkcji  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ . Baza falkowa powstaje z jednej funkcji  $\psi$ , w ten sposób, że najpierw tworzymy wszystkie całkowite przesunięcia  $\psi$ , a następnie tworzymy wszystkie możliwe przeskalowania powstałej rodziny o współczynniki będące potęgą 2. Jeżeli tak otrzymana rodzina funkcji w  $L^2(\mathbb{R})$  jest bazą ortonormalną, to nazywamy ją bazą falkową, a funkcję  $\psi$  falką. Nazwa „falka” pochodzi stąd, że  $\psi$  jest najczęściej elementarną oscylacją, o wyraźnej lokalizacji w czasie i o określonej częstotliwości. Budując z takiej funkcji bazę według schematu (5.1) widzimy, że funkcje  $2^{j/2}\psi(2^j x - n)$  też stanowią taką elementarną oscylację, ale o częstotliwości rzędu  $2^j$  i lokalizacji w okolicy punktu  $2^{-j}n$ .

Przesunięcie i przeskalowanie takiej funkcji powoduje, że iloczyn skalarny z nią wychwytuje w sygnale szczegóły występujące w konkretnym miejscu i posiadające określoną częstotliwość. Ta własność sprawia, że bazy falkowe odniosły w ostatnich 20 latach ogromny sukces w zastosowaniach. Analiza falkowa jest obecnie obszernym działem matematyki. Z grubsza biorąc można wydzielić dwa rodzaje transformaty falkowej. Po pierwsze mamy ciągłą transformatę falkową

$$W(f)(a, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sqrt{a} \overline{\psi(ax - t)} dx,$$



Rysunek 5.1: Falka Haara i falka „meksykański kapelusz”.

która funkcji  $f \in L^2(\mathbb{R})$  przyporządkowuje funkcję dwóch zmiennych  $a, t \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Dla każdego  $a > 0$   $W(f)(a, t)$  jest, mówiąc intuicyjnie „obrazem” funkcji „na poziomie rozdzielczości  $a$ ”. Drugim rodzajem transformaty falkowej jest transformata falkowa dyskretna, czyli rozkład funkcji  $f \in L^2(\mathbb{R})$  w bazie falkowej

$$\alpha(f)_{n,j} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{\frac{j}{2}} \overline{\psi(2^j x - n)} dx, \quad n, j \in \mathbb{Z}.$$

Łatwo zauważyć, że dyskretna transformata falkowa jest rezultatem próbkowania transformaty ciągłej w punktach  $(a, t) = (2^j, n)$ ,  $j, n \in \mathbb{Z}$ . Jeżeli  $\psi$  jest falką, czyli układ funkcji (5.1) stanowi bazę w  $L^2(\mathbb{R})$ , to funkcję  $f \in L^2(\mathbb{R})$  można zrekonstruować z tych próbek  $\alpha(f)_{n,j}$ . Dla baz falkowych istnieje szybki algorytm numeryczny, tak zwany algorytm Mallata, wyliczający współczynniki bazowe  $\alpha(f)_{n,j}$ . Algorytm Mallata opiszemy w następującym rozdziale. Problem konstrukcji baz falkowych jest o tyle interesujący, że własności konkretnej falki  $\psi$  mają istotne znaczenie dla zastosowań. Dlatego nie wystarczy skonstruować jednej bazy falkowej do wszystkich zastosowań. Istnieje potrzeba konstruowania falek o konkretnych własnościach. W zastosowaniach najczęściej pojawiają się tak zwane falki Daubechies. Jest to rodzina falek o nośniku ograniczonym (czyli  $\psi \equiv 0$  poza pewnym przedziałem) i o różnym stopniu gładkości. Falek Daubechies używamy w laboratorium. W tym rozdziale głównie zajmujemy się przypadkiem jednowymiarowym, czyli przestrzenią  $L^2(\mathbb{R})$ . Pod koniec pokażemy, jak bazy falkowe można budować w przypadku wielowymiarowym, używając skonstruowanych już falek jednowymiarowych.

## Analiza wielorozdzielcza MRA

Narzędziem do konstrukcji falek jest tak zwana analiza wielorozdzielcza.

**Definicja 5.1.** *Analizą wielorozdzielczą (w skrócie: MRA) nazywamy ciąg rosnący podprzestrzeni domkniętych  $L^2(\mathbb{R})$*

$$\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset L^2(\mathbb{R})$$

spełniających następujące warunki

(a).  $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ,

(b).  $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$ ,

(c).  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$ ,

(d). istnieje funkcja  $\varphi \in V_0$  (tak zwana funkcja skalująca analizy) taka, że zbiór funkcji

$$\{\varphi(x - n); n \in \mathbb{Z}\}$$

stanowi bazę o.n. (lub bazę Riesz) przestrzeni  $V_0$ .

Dla podkreślenia, czy funkcja skalująca generuje bazę o.n. czy bazę Riesz przestrzeni  $V_0$  czasem mówi się „ortogonalna MRA”, lub „MRA Riesz”. Konstrukcja falek nastąpi w dwóch krokach. Najpierw pokażemy, że mając MRA możemy skonstruować falekę, a następnie pokażemy, jak można skonstruować interesujące nas analizy wielorozdzielcze.

**Uwagi:** (i) Zauważmy, że funkcja  $\varphi$  całkowicie określa analizę wielorozdzielczą, dla której jest funkcją skalującą. Istotnie, skoro przesunięcia  $\varphi$  stanowią bazę o.n.  $V_0$ , to

$$V_0 = \overline{\text{Lin} \{\varphi(x - n); n \in \mathbb{Z}\}}. \quad (5.2)$$

Z warunku (c) z kolei wynika, że

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}); f(2^{-j}x) \in V_0\}. \quad (5.3)$$

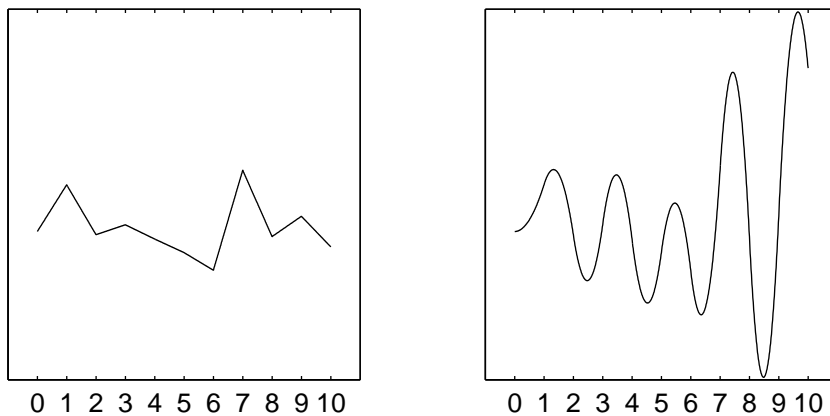
Konstrukcja MRA będzie więc wyglądała następująco. Znajdziemy funkcję  $\varphi$  taką, że jej przesunięcia całkowite stanowią układ ortonormalny. Wtedy przesunięcia będą stanowiły bazę o.n. przestrzeni  $V_0$  zdefiniowanej w (5.2). Następnie przestrzeń  $V_j$  zdefiniujemy wzorem (5.3). Znajdziemy dodatkowe warunki na  $\varphi$ , które sprawią, że tak powstały ciąg domkniętych podprzestrzeni jest rosnący (wystarczy, że  $V_0 \subset V_1$ ), oraz spełnione są warunki (a) i (b) definicji.

(ii) Rozróżniamy analizy wielorozdzielcze ortonormalne i Riesz, w zależności od bazy, którą w  $V_0$  generuje funkcja skalująca  $\varphi$ . Pokażemy, że analiza wielorozdzielcza Riesz też jest analizą o.n., tylko trzeba wybrać inną funkcję skalującą. Innymi słowy, dla analizy Riesz, z funkcją skalującą  $\varphi$  można w  $V_0$  znaleźć inną funkcję  $\tilde{\varphi}$ , której przesunięcia są bazą o.n.  $V_0$ . Pomimo tego, że analiza Riesz jest automatycznie także analizą o.n. warto rozróżnić oba rodzaje analiz. Na przykład, zdarza się, że funkcja  $\tilde{\varphi}$ , chociaż istnieje, ma bardzo skomplikowaną postać, i wygodniej jest pracować z początkową funkcją  $\varphi$ , chociaż generuje jedynie bazę Riesz, a nie o.n.

**Przykłady:** (i) Dla  $N = 0, 1, 2, \dots$  mówimy, że funkcja  $f$  jest splinem rzędu  $N$  (nie znam dobrego polskiego tłumaczenia) jeżeli jest różniczkowalna w sposób ciągły  $N - 1$  razy oraz jest wielomianem stopnia  $\leq N$  na przedziałach postaci  $[k, k + 1]$  (pomiędzy sąsiednimi liczbami całkowitymi). Jeżeli  $N = 0$  to założenie o różniczkowalności jest puste, funkcja  $f$  ma tylko być stała na przedziałach  $[k, k + 1]$ .

Niech  $N$  będzie ustalone. Definiujemy

$$V_0 = \{f \in L^2(\mathbb{R}); f \text{ jest splinem rzędu } N\}.$$



Rysunek 5.2: Spliny rzędu 1 i 2.

Zauważmy, że jest to podprzestrzeń domknięta. Pozostałe przestrzenie definiujemy tak, aby warunek (c) definicji był spełniony

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}); f(2^{-j}x) \in V_0\}.$$

$V_j$  zachowuje wszystkie własności  $V_0$ , które są zachowywane przy przeskalowaniu: jest podprzestrzenią domkniętą, składa się z funkcji różniczkowalnych

$N - 1$  razy w sposób ciągły, które są wielomianami stopnia  $\leq N$  na przedziałach postaci  $2^{-j}[k, k+1] = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$ . W ten sposób skonstruowaliśmy ciąg podprzestrzeni domkniętych w  $L^2(\mathbb{R})$ , które spełniają warunek (c) definicji MRA. Zauważmy, że  $V_j \subset V_{j+1}$ . Wynika to z faktu, że każdy przedział postaci  $2^{-(j+1)}[k, k+1]$  zawiera się w całości w którymś z dłuższych przedziałów  $2^{-j}[k', k'+1]$ :

$$2^{-(j+1)}[k, k+1] = 2^{-j}[k/2, (k+1)/2] \subset \begin{cases} 2^{-j}[k/2, k/2+1] & k - \text{parzyste} \\ 2^{-j}[(k-1)/2, (k-1)/2+1] & k - \text{nieparzyste} \end{cases}$$

Jeżeli  $f \in V_j$ , czyli jest wielomianem na dłuższych przedziałach, to jest także wielomianem na zawartych w nich krótszych przedziałach, czyli  $f \in V_{j+1}$ . Ciąg podprzestrzeni  $\{v_j\}$  jest więc rosnący. Niech  $\varphi$  będzie funkcją Haara, czyli

$$\varphi(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1], \\ 0 & x \notin [0, 1], \end{cases}$$

oraz

$$\Delta^N(x) = \varphi * \dots * \varphi(x), \quad (\text{splot } N + 1\text{-krotny}).$$

**Fakt 5.2.**  $\Delta^N$  jest splinem rzędu  $N$ .

*Dowód.* W przypadku  $N = 0$  wynika to od razu z definicji: funkcja Haara jest stała pomiędzy sąsiednimi liczbami całkowitymi. W rozdziale o przestrzeni Hilberta pokazaliśmy, że  $\Delta^1 = \varphi * \varphi$  jest ciągła, liniowo rośnie na przedziale  $[0, 1]$ , liniowo maleje na  $[1, 2]$ , i jest równa 0 poza tym. Jest więc splinem rzędu 1. Dowód faktu jest indukcyjny. Dla  $n \geq 2$

$$\Delta^N(x) = \Delta^{N-1} * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^{N-1}(x-y)\varphi(y) dy = \int_0^1 \Delta^{N-1}(x-y) dy = \int_{x-1}^x \Delta^{N-1}(y) dy,$$

gdzie w ostatniej całce zrobiliśmy zamianę zmiennych  $y' = x - y$ . Korzystając z zasadniczego twierdzenia rachunku różniczkowego mamy

$$(\Delta^N)'(x) = \Delta^{N-1}(x) - \Delta^{N-1}(x-1).$$

Jeżeli więc założymy, że  $\Delta^{N-1}$  jest splinem rzędu  $N - 1$ , jest różniczkowalna w sposób ciągły  $N - 1$  razy, to  $\Delta^N$  jest różniczkowalna w sposób ciągły o jeden raz więcej, czyli  $N$  razy. Niech  $x \in [k, k+1]$ . Wtedy  $k \in [x-1, x]$ , oraz

$$\Delta^N(x) = \int_{x-1}^x \Delta^{N-1}(y) dy = \int_{x-1}^k \Delta^{N-1}(y) dy + \int_k^x \Delta^{N-1}(y) dy.$$

Na obu przedziałach całkowania  $\Delta^{N-1}$  jest wielomianem stopnia  $\leq N - 1$ , więc obie całki są wielomianami stopnia  $\leq N$  zmiennej  $x$ , więc ich suma też. Jeżeli więc  $\Delta^{N-1}$  jest splinem rzędu  $N - 1$  to  $\Delta^N$  jest splinem rzędu  $N$ .  $\square$

W rozdziale o przestrzeni Hilberta pokazaliśmy, że dla  $N = 0$  przesunięcia całkowite  $\varphi$  stanowią bazę o.n. przestrzeni  $V_0$ , a w przypadku  $N = 1$  przesunięcia  $\Delta^1$  stanowią bazę Riesz'a  $V_0$ . Dla dowolnego  $N$  można pokazać, że przesunięcia całkowite  $\Delta^N$  stanowią bazę Riesz'a  $V_0$ , i warunki (a) i (b) definicji MRA są spełnione. Dowód tego odłożymy do momentu, kiedy udowodnimy wygodną charakteryzację układów Riesz'a. Dla  $N = 0$  tak powstałą analizę nazywamy analizą Haara, a dla  $N \geq 1$  nazywamy ją analizą splinową. Są to ważne przykłady analiz, które często spotyka się w praktyce. W oparciu o nie konstruuje się falek Haara i falek splinowe. Funkcje  $\Delta^N(x)$  nazywa się splinami podstawowymi rzędu  $N$ .

(ii) Analiza Shannona. Niech

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \hat{f}(\xi) \equiv 0 \text{ dla } \xi \notin [-2^j\pi, 2^j\pi]\}.$$

$V_j$  składa się z funkcji o „spektrum” ograniczonym do  $[-2^j\pi, 2^j\pi]$ . Widać więc od razu, że jest to rosnący ciąg podprzestrzeni  $V_j \subset V_{j+1}$ . Widać też, że są to podprzestrzenie domknięte. Mamy  $\widehat{f(2\cdot)}(\xi) = 1/2\hat{f}(\xi/2)$ .  $\hat{f}(\xi) \equiv 0$  poza  $[-2^j\pi, 2^j\pi]$  dokładnie wtedy, gdy  $\hat{f}(\xi/2) \equiv 0$  poza  $[-2^{j+1}\pi, 2^{j+1}\pi]$ , czyli (c) definicji MRA jest spełnione. Pokażemy, że  $\varphi$  zdefiniowane przez swoją transformatę Fouriera

$$\hat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi) = \begin{cases} 1 & : \xi \in [-\pi, \pi] \\ 0 & : \xi \notin [-\pi, \pi], \end{cases}$$

jest o.n. funkcją skalującą. Dowód tego jest bardzo prosty.  $f \in V_0$  dokładnie wtedy, gdy  $f \in L^2(\mathbb{R})$  i  $\hat{f}(\xi) \equiv 0$  dla  $\xi \notin [-\pi, \pi]$ . Niech  $\{\alpha_k\} \in \ell^2$  będą współczynnikami Fouriera funkcji  $\hat{f}(\xi)$  na przedziale  $[-\pi, \pi]$ , czyli

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ik\xi} \quad \text{w } L^2(\mathbb{T}). \quad (5.4)$$

Ponieważ  $\hat{\varphi}(\xi)$  jest równa 1 wszędzie tam, gdzie  $\hat{f}(\xi) \neq 0$ , więc

$$\hat{f}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)\hat{f}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ik\xi} \hat{\varphi}(\xi). \quad (5.5)$$

Powyższa równość, jak łatwo sprawdzić, zachodzi w  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} \left\| \hat{f} - \sum_{k=-M}^N \alpha_k e^{ik\cdot} \hat{\varphi} \right\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(\xi) - \sum_{k=-M}^N \alpha_k e^{ik\xi} \hat{\varphi}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \hat{f}(\xi) - \sum_{k=-M}^N \alpha_k e^{ik\xi} \right|^2 d\xi \\ &\xrightarrow{N, M \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

korzystając z (5.4). Skoro równość (5.5) zachodzi w  $L^2(\mathbb{R})$ , to możemy odwrócić transformatę Fouriera, i mamy

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{-k} \varphi(x - k) \quad \text{w } L^2(\mathbb{R}). \quad (5.6)$$

Innymi słowy,  $f \in V_0$  dokładnie wtedy, gdy istnieją współczynniki  $\|\alpha_k\| \in \ell^2$  takie, że zachodzi (5.6). Przesunięcia całkowite  $\varphi$  stanowią więc układ zupełny w  $V_0$ . Łatwo pokazać, że są też układem o.n.:

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\cdot - n), \varphi(\cdot - k) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{\varphi(\cdot - n)}, \widehat{\varphi(\cdot - k)} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\xi) e^{-in\xi} \overline{\hat{\varphi}(\xi)} e^{ik\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\xi} d\xi \\ &= \begin{cases} 1 & : k = n \\ 0 & : k \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Dalej w tym rozdziale (Fakt 5.10) pokażemy, że warunki (a) i (b) też są spełnione.

## Konstrukcja falki

Niech będzie dana o.n. analiza wielorozdzielcza z funkcją skalującą  $\varphi$ . Niech  $W_0$  będzie dopełnieniem ortogonalnym  $V_0$  w  $V_1$ :

$$W_0 = \{f \in V_1; f \perp g \forall g \in V_0\}, \quad \text{czyli } W_0 = V_1 \ominus V_0. \quad (5.7)$$

Ponieważ  $V_0$  jest domknięta, więc

$$V_1 = V_0 \oplus W_0. \quad (5.8)$$



Naszym celem będzie znalezienie takiej funkcji  $\psi \in W_0$ , że układ

$$\{\psi(x - n); n \in \mathbf{Z}\}$$

stanowi bazę o. n.  $W_0$ . Pokażemy potem, że taka  $\psi$  jest falką.

## Filtr dolnoprzepustowy

Z definicji MRA wynika, że funkcja  $(1/2)\varphi(x/2)$  jest elementem  $V_{-1} \subset V_0$ . Można ją więc zapisać w bazie jako

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \varphi(x - n), \quad (5.9)$$

gdzie szereg jest zbieżny w  $L^2(\mathbb{R})$ , współczynniki bazowe dane są przez

$$h_n = \left\langle \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\cdot}{2}\right), \varphi(\cdot - n) \right\rangle,$$

oraz

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |h_n|^2 = \int_{j=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \right|^2 dx = \frac{1}{2} \|\varphi\|^2 = \frac{1}{2}.$$

Zastosujmy transformatę Fouriera do (5.9). Ponieważ szereg jest zbieżny w  $L^2(\mathbb{R})$ , to możemy z transformatą wejść pod znak sumy.

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \hat{\varphi}(\xi) e^{-in\xi}. \quad (5.10)$$

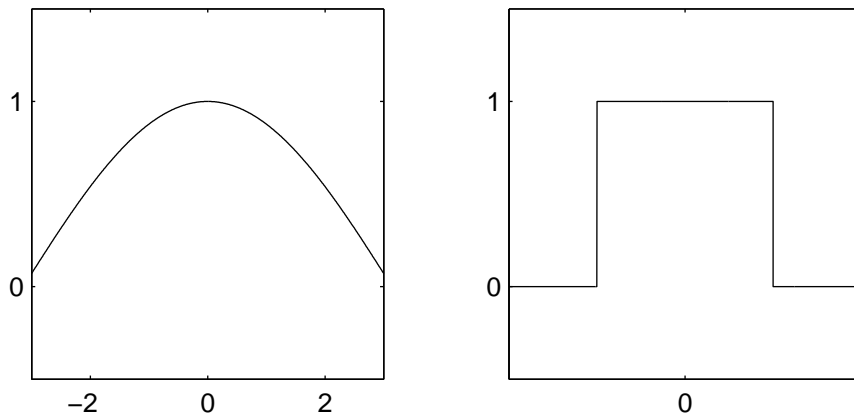
Szereg jest zbieżny w  $L^2(\mathbb{R})$ . Skoro ciąg  $\{h_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  jest sumowalny z kwadratem, to szereg  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-in\xi}$  jest zbieżny w  $L^2(\mathbb{T})$  do funkcji którą oznaczymy przez  $m_0$ :

$$m_0(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-in\xi}. \quad (5.11)$$

Łącząc te dwie zbieżności można uzasadnić, że w takim razie

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi). \quad (5.12)$$

Funkcję  $m_0(\xi)$  nazywamy filtrem dolnoprzepustowym. Czasem sam ciąg współczynników  $\{h_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  też będziemy nazywali filtrem dolnoprzepustowym. Pokazaliśmy więc, że funkcja  $(1/2)\varphi(x/2)$  (lub, co na jedno wychodzi  $\varphi(x/2)$ ) jest wynikiem działania filtru  $m_0$  na  $\varphi$ . Filtr  $m_0$  nazywamy dolnoprzepustowym, gdyż jego wartości (jeżeli jest funkcją ciągłą) w otoczeniu 0



Rysunek 5.3: Filtr dolnoprzepustowy Haara  $|m_0|$  i idealny filtr dolnoprzepustowy.

są zbliżone do 1, w czym przypomina charakterystykę typowego filtra dolnoprzepustowego.

Na obrazku 5.3 pokazany jest wykres  $|m_0(\xi)|$  dla analizy wielorozdzielczej Haara. Oczywiście nazwanie filtra dolnoprzepustowym jest uproszczeniem. Na przykład funkcja  $m_0$  jest okresowa. Działanie filtra  $m_0$  na funkcjach nie jest splotem z funkcją całkowalną. Łatwo zauważyć, że jest ono splotem z funkcją uogólnioną

$$H(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \delta(x - k), \quad \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) = (H * \varphi)(x),$$

gdzie symbol  $\delta$  oznacza impuls jednostkowy (deltę Diraca). Nie będziemy uściślać powyższej uwagi.

W podobny sposób jak (5.12) pokażemy następujące twierdzenie

**Twierdzenie 5.3.** (i)  $f \in V_0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in L^2(\mathbb{T})$  taka, że

$$\hat{f}(\xi) = \lambda(\xi) \hat{\varphi}(\xi).$$

Mamy też następującą równość

$$\|f\|^2 = \|\lambda\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(k)|^2,$$

(normy w odpowiednich przestrzeniach).

(ii)  $f \in V_j \Leftrightarrow \exists \lambda \in L^2(\mathbb{T})$  taka, że

$$\hat{f}(2^j \xi) = \lambda(\xi) \hat{\varphi}(\xi),$$

oraz

$$\|f\|^2 = 2^j \|\lambda\|^2 = 2^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\lambda}(k)|^2.$$

*Dowód.* (i)  $f$  należy do  $V_0$  dokładnie wtedy, gdy

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \varphi(x-n) \quad \text{w } L^2(\mathbb{R}),$$

gdzie  $\{\alpha_n\}$  jest pewnym ciągiem w  $\ell^2$ . To z kolei, stosując jak poprzednio transformatę Fouriera, jest równoważne

$$\hat{f}(\xi) = \lambda(\xi) \hat{\varphi}(\xi) \quad \text{gdzie} \quad \lambda(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{-in\xi}.$$

Dodatkowo,

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2, \quad \text{a} \quad \alpha_n = \hat{\lambda}(-n),$$

a więc otrzymujemy (i). Do (ii) wystarczy zauważyć, że

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}x) \in V_0, \quad \text{oraz} \quad \|f\|^2 = 2^{-j} \|f(2^{-j}\cdot)\|^2.$$

□

Kluczowym narzędziem w konstrukcji falki jest następujące twierdzenie

**Twierdzenie 5.4.** (i) *Dla dowolnej funkcji  $f \in L^2(\mathbb{R})$  układ*

$$\{f(x-n); n \in \mathbb{Z}\}$$

*jest ortonormalny wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1. \quad (5.13)$$

(ii) *Dla dowolnych funkcji  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  układy*

$$\{f(x-n); n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{i} \quad \{g(x-n); n \in \mathbb{Z}\}$$

*są wzajemnie ortogonalne (czyli każda funkcja z jednego zbioru jest ortogonalna do każdej funkcji z drugiego) wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi + 2k\pi) \overline{\hat{g}(\xi + 2k\pi)} = 0. \quad (5.14)$$

*(W każdym przypadku szeregi są zbieżne prawie wszędzie.)*

*Dowód.* Części (i) i (ii) są bardzo podobne. Przeprowadzimy dowód (i).

$$\begin{aligned}\langle f(\cdot - n), f(\cdot - k) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f(\cdot - n)}, \widehat{f(\cdot - k)} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-in\xi} \overline{\hat{f}(\xi) e^{-ik\xi}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-i(n-k)\xi} d\xi.\end{aligned}$$

Całkę po  $\mathbb{R}$  zapiszemy jako sumę całek po kolejnych przedziałach  $[(2l - 1)\pi, (2l + 1)\pi)$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , a następnie zamienimy zmienne.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{(2l-1)\pi}^{(2l+1)\pi} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-i(n-k)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(\xi + 2l\pi)|^2 e^{-i(n-k)\xi} d\xi,\end{aligned}$$

gdzie w ostatniej całce zamieniliśmy zmienne  $\xi \mapsto \xi + 2l\pi$ . Funkcja wykładnicza nie zmieniła się, bo jest okresowa. Zamienimy teraz kolejność sumowania i całkowania. W tym wypadku jest to możliwe na mocy twierdzenia o zbieżności ograniczonej, gdyż funkcja

$$F(\xi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi + 2l\pi)|^2$$

jest całkowna na  $[-\pi, \pi]$ , jeżeli  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Kontynuując rachunki otrzymujemy

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi + 2l\pi)|^2 \right) e^{-i(n-k)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\xi) e^{-i(n-k)\xi} d\xi.\end{aligned}$$

Zauważmy, że ostatnie wyrażenie jest współczynnikiem Fouriera rzędu  $n - k$  funkcji  $F(\xi)$ . Funkcja ta jest całkowna na  $[-\pi, \pi]$ , ale niekoniecznie całkowna z kwadratem. Dla funkcji całkownych też można obliczać współczynniki Fouriera i te współczynniki są jednoznaczne. To znaczy że dwie funkcje całkowne o identycznych współczynnikach Fouriera muszą być równe, prawie wszędzie. Funkcja  $F(\xi)$  ma więc współczynniki Fouriera

$$\widehat{F}(n) = \langle f, f(\cdot - n) \rangle.$$

A więc,

$$\langle f(\cdot - n), f(\cdot - k) \rangle = \begin{cases} 1 & n = k, \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy  $F(\xi) \equiv 1$ .

Dowód części (ii) wygląda podobnie. Zaczynamy od

$$\langle f(\cdot - n), g(\cdot - k) \rangle$$

i otrzymujemy, że jest to  $(n-k)$ -ty współczynnik Fouriera funkcji całkwalnej

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi + 2l\pi) \overline{\hat{g}(\xi + 2l\pi)}.$$

Wszystkie współczynniki są zerami wtedy i tylko wtedy, gdy sama funkcja jest stale 0.  $\square$

Zastosujemy teraz część (i) twierdzenia do funkcji skalującej  $\varphi$ . W następującej sumie, która zgodnie z twierdzeniem jest równa 1 rozdzielamy wyrazy parzyste i nieparzyste, stosujemy (5.12) i korzystamy z okresowości  $m_0$ :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 \\ &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ parzyste}}}^{\infty} |\hat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ nieparzyste}}}^{\infty} |\hat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(2\xi + 2(2k)\pi)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(2\xi + 2(2k+1)\pi)|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_0(\xi + 2k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 + \\ &\quad + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_0(\xi + \pi + 2k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + \pi + 2k\pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + \pi + 2k\pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2. \end{aligned}$$

Filtr dolnoprzepustowy spełnia więc tak zwane równanie Barnwella-Smitha

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1. \quad (5.15)$$

## Filtr górnoprzepustowy

Przypomnijmy, że szukamy funkcji  $\psi \in V_1$ . Korzystając z twierdzenia 5.3 (ii) widzimy, że  $\hat{\psi}$  musi mieć postać

$$\hat{\psi}(2\xi) = \lambda(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \quad (5.16)$$

dla pewnej funkcji  $\lambda \in L^2(\mathbb{T})$ . Ponadto przesunięcia całkowite  $\psi$  mają stanowić układ ortonormalny, i mają być ortogonalne do przesunięć  $\varphi$  (mają stanowić bazę o.n.  $W_0$ ). Przeprowadzając rachunek podobny do powyższego, i stosując twierdzenie 5.4 (i) oraz (ii) otrzymujemy

$$|\lambda(\xi)|^2 + |\lambda(\xi + \pi)|^2 = 1, \quad (5.17)$$

$$m_0(\xi)\overline{\lambda(\xi)} + m_0(\xi + \pi)\overline{\lambda(\xi + \pi)} = 0. \quad (5.18)$$

Znalezienie odpowiedniej funkcji  $\lambda$  jest już proste. Zauważmy, że następująca funkcja wstawiona w miejsce  $\lambda$  spełnia (5.17) i (5.18):

$$m_1(\xi) = e^{-i\xi}\overline{m_0(\xi + \pi)}. \quad (5.19)$$

Funkcję  $m_1$  nazywamy filtrem górnoprzepustowym analizy wielorozdzielczej. Ponieważ  $\psi \in V_1$ , więc  $(1/2)\psi(x/2) \in V_0$ , a więc istnieje ciąg współczynników  $\{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ , taki, że

$$\frac{1}{2}\psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n\varphi(x - n). \quad (5.20)$$

Współczynniki  $g_n$  są współczynnikami filtru górnoprzepustowego

$$m_1(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-in\xi}, \quad (5.21)$$

a więc możemy je wyliczyć znając współczynniki filtru dolnoprzepustowego.

$$\begin{aligned} m_1(\xi) &= e^{-i\xi}\overline{m_0(\xi + \pi)} \\ &= e^{-i\xi}\overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-in(\xi + \pi)}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{h_n} (-1)^n e^{i(n-1)\xi} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{h_{1-n}} (-1)^{1-n} e^{-in\xi}. \end{aligned}$$

Z jednoznaczności rozwinięcia w szereg Fouriera mamy

$$g_n = (-1)^{1-n} \overline{h_{1-n}}. \quad (5.22)$$

Sam ciąg współczynników  $\{g_n\}$  też czasem nazywa się filtrem górnoprzepustowym analizy.

## Filtry QMF

Podstawowe własności pary filtrów  $m_0$  i  $m_1$  to

$$\begin{aligned} |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 &= 1, \\ |m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi + \pi)|^2 &= 1, \\ m_0(\xi) \overline{m_1(\xi)} + m_0(\xi + \pi) \overline{m_1(\xi + \pi)} &= 0. \end{aligned}$$

Własności te można sformułować bezpośrednio w języku współczynników filtrów:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{k+2n} \overline{h_k} = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0, \end{cases}$$

i podobnie dla  $\{g_n\}$ , oraz

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{2n+k} \overline{g_k} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Parę filtrów  $(m_0, m_1)$  spełniających powyższe warunki nazywa się filtrem QMF (quadrature mirror filter). Mają one zastosowanie w teorii przetwarzania sygnału niezależnie od teorii falek.

Sformułujemy teraz ostateczne twierdzenia, które mówią, że  $\psi$  istotnie jest faleką.

**Twierdzenie 5.5.** *Niech funkcja  $\psi$  będzie dana przez*

$$\hat{\psi}(2\xi) = m_1(\xi) \hat{\varphi}(\xi) = e^{-i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)} \hat{\varphi}(\xi). \quad (5.23)$$

Wtedy zbiór funkcji

$$\{\psi(x - n); n \in \mathbb{Z}\} \quad (5.24)$$

stanowi bazę o.n. przestrzeni  $W_0 = V_1 \ominus V_0$ .

*Dowód.* Przypomnijmy, że z definicji  $\psi \in V_1$ , a przestrzeń  $V_1$  jest niezmienna na przesunięcia całkowite (nawet na przesunięcia połówkowe). Cały zbiór funkcji (5.24) leży więc w  $V_1$ , jest ortonormalny i ortogonalny do  $V_0$

(przypomnijmy warunki (5.18) i (5.19)), a więc jest układem ortonormalnym w  $W_0$ . Pozostaje pokazać, że jest to układ zupełny, to znaczy, że kombinacje liniowe elementów (5.24) leżą gęsto w  $W_0$ . Wystarczy pokazać, że jeżeli  $f \in W_0$  i  $f$  jest ortogonalna do wszystkich elementów (5.24) to  $f \equiv 0$ . Niech więc  $f \in W_0$ . W szczególności  $f \in V_1$ , więc istnieje  $\lambda \in L^2(\mathbb{T})$  taka, że

$$\hat{f}(2\xi) = \lambda(\xi)\hat{\varphi}(\xi).$$

$f$  jako element  $W_0$  jest ortogonalna do wszystkich przesunięć  $\varphi$ . Zakładamy dodatkowo, że jest ortogonalna do wszystkich przesunięć  $\psi$ . Oczywiście całkowite przesunięcia  $f$  też mają te własności. Korzystając z twierdzenia 5.4 (ii), podobnie jak poprzednio, otrzymujemy

$$m_0(\xi)\overline{\lambda(\xi)} + m_0(\xi + \pi)\overline{\lambda(\xi + \pi)} = 0 \quad (5.25)$$

$$m_1(\xi)\overline{\lambda(\xi)} + m_1(\xi + \pi)\overline{\lambda(\xi + \pi)} = 0. \quad (5.26)$$

Pomnóżmy stronami (5.25) przez  $\overline{m_0(\xi)}$ . W (5.26) wstawmy wzór na  $m_1$ , pomnóżmy stronami przez  $e^{i\xi} m_0(\xi + \pi)$  i uwzględnijmy, że  $e^{-i\pi} = -1$ . Pozostaje dodać równania stronami, aby otrzymać  $\lambda(\xi) = 0$ , a ponieważ  $\xi$  jest dowolne, to

$$\hat{f}(2\xi) = 0.$$

Widzimy więc, że układ (5.24) jest bazą o.n. przestrzeni  $W_0$ .  $\square$

Podsumowując, skonstruowaliśmy funkcję  $\psi$ , której całkowite przesunięcia (5.24) stanowią bazę o.n. przestrzeni  $W_0 = V_1 \ominus V_0$ . Teraz pokażemy, że układ falkowy (5.1) stanowi bazę o.n. całej przestrzeni  $L^2(\mathbb{R})$ . Niech  $W_j$  będzie dopełnieniem ortogonalnym  $V_j$  w  $V_{j+1}$

$$W_j = V_{j+1} \ominus V_j, \quad \text{czyli} \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (5.27)$$

Ta definicja rozszerza wcześniejszą definicję  $W_0$ . Mamy następujący fakt

**Fakt 5.6.** (i)  $W_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f(2^{-j}x) \in W_0\}$ ,

(ii) *Układ funkcji*

$$\left\{ 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - n) : n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (5.28)$$

jest bazą o.n. przestrzeni  $W_j$ .

*Dowód.* (i) Z definicji MRA mamy, że  $f \in V_{j+1} \Leftrightarrow f(2^{-j}\cdot) \in V_1$ ,  $g \in V_j \Leftrightarrow g(2^{-j}\cdot) \in V_0$ , a przez zamianę zmiennych mamy

$$f \perp g \Leftrightarrow f(2^{-j}\cdot) \perp g(2^{-j}\cdot).$$



Stwierdzenie, że  $f \in V_{j+1} \ominus V_j$  jest więc równoważne stwierdzeniu, że  $f(2^{-j}\cdot) \in V_1 \ominus V_0$ .

(ii) Przez zamianę zmiennych  $\xi \mapsto 2^{-j}\xi$  sprowadzamy (ii) do przypadku  $j = 0$ , który z kolei jest udowodniony w Twierdzeniu 5.5.  $\square$

Zauważmy, że podprzestrzenie  $W_j$  są do siebie wzajemnie ortogonalne. Jeżeli  $j < k$  to  $W_j \subset V_{j+1} \subset V_k$ , a  $W_k$  jest z definicji ortogonalna do  $V_k$ . W każdej z tych podprzestrzeni  $W_j$  mamy bazę o.n. (5.28). Następujące twierdzenie pokazuje, że nieskończona suma prosta tych podprzestrzeni jest całością  $L^2(\mathbb{R})$ , a układ (5.1) bazą o.n.

**Twierdzenie 5.7.** (i) Dla  $J \in \mathbb{Z}$  mamy

$$\bigoplus_{j=-\infty}^J W_j = V_{J+1}, \quad (5.29)$$

i dla tej podprzestrzeni układ funkcji

$$\left\{ 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - n) : n, j \in \mathbb{Z}, j \leq J \right\} \quad (5.30)$$

stanowi bazę o.n.,

(ii)

$$\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j = L^2(\mathbb{R}), \quad (5.31)$$

i układ funkcji (5.1), czyli

$$\left\{ 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - n) : n, j \in \mathbb{Z} \right\}$$

stanowi bazę o.n. (falkową).

*Dowód.* (i) Jak zauważyliśmy powyżej przestrzenie  $W_j$  są do siebie wzajemnie ortogonalne

$$W_j \perp W_k \quad j \neq k,$$

oraz, dla  $j \leq J$

$$W_j \subset V_{j+1} \subset V_{J+1}.$$

Przypomnijmy, że nieskończona suma prosta (5.29) jest domknięciem zbioru kombinacji liniowych elementów podprzestrzeni  $W_j$ ,  $j \leq J$ . W takim razie

$$\bigoplus_{j=-\infty}^J W_j \subset V_{J+1}.$$

Chcemy pokazać równość. Niech  $f \in V_{J+1}$  i niech  $f$  będzie ortogonalna do każdej podprzestrzeni  $W_j$ ,  $j \leq J$ . Skoro  $f \in V_{J+1}$  i  $f \perp W_J$  to  $f \in V_J$ . Skoro  $f \perp W_{J-1}$  to  $f \in V_{J-1}$ . Postępując tak dalej, pokazujemy, że  $f \in V_j$  dla każdego  $j \leq J+1$ , a więc

$$f \in \bigcap_{j=-\infty}^{J+1} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j,$$

czyli, zgodnie z punktem (b) definicji MRA  $f \equiv 0$ . Pokazaliśmy więc (5.29). Fakt, że zbiór funkcji (5.30) stanowi bazę o.n. sumy prostej wynika z tego, że jest to zbiór baz o.n. podprzestrzeni składowych sumy.

(ii) Z (i) wynika, że

$$V_J = \bigoplus_{j=-\infty}^{J-1} W_j \subset \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j,$$

a więc

$$\bigcup_{J=-\infty}^{\infty} V_J \subset \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j.$$

Ponieważ suma prosta jest domknięta, więc domknięcie lewej strony też się w niej zawiera. Z punktu (a) definicji MRA mamy, że domknięcie lewej strony jest całością  $L^2(\mathbb{R})$ . Fakt, że zbiór funkcji (5.1) stanowi bazę o.n. sumy prostej wynika, podobnie jak w części (i) z tego, że jest to zbiór wszystkich baz ortonormalnych przestrzeni składowych  $W_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Przykłady:** (i) MRA Haara ma funkcję skalującą  $\varphi = \chi_{[0,1]}$ . Widać więc, że

$$\frac{1}{2} \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2} \varphi(x-1),$$

czyli  $h_0 = h_1 = 1/2$ , oraz  $h_k = 0$  dla  $k \neq 0, 1$ . W takim razie

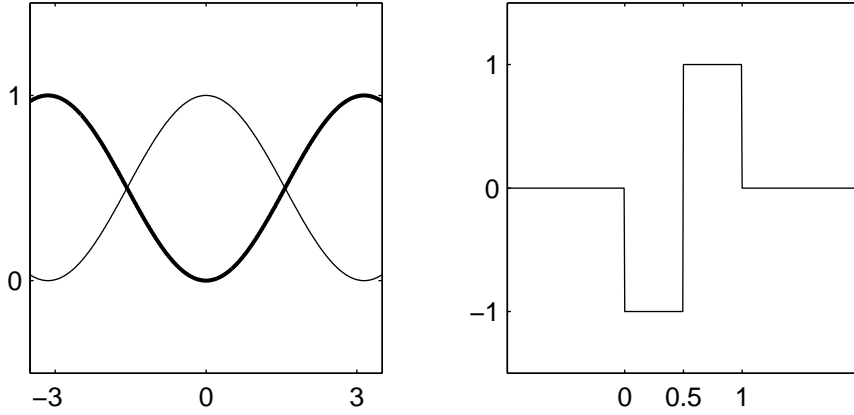
$$g_0 = -h_1 = -\frac{1}{2}, \quad g_1 = h_0 = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad g_k = 0 \quad \text{dla } k \neq 0, 1,$$

$$\frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2} \varphi(x-1) \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = -\varphi(2x) + \varphi(2x-1),$$

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{i\xi} = e^{i\xi/2} \cos(\xi/2), \quad m_1(\xi) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{i\xi} = i e^{i\xi/2} \sin(\xi/2).$$

(ii) Filtry analizy Shannona wygodniej jest rozważać po stronie transformaty Fouriera. Mamy

$$\hat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi), \quad \hat{\varphi}(2\xi) = \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(\xi),$$



Rysunek 5.4: Wykresy  $|m_0(\xi)|^2$  i  $|m_1(\xi)|^2$ .

więc

$$\begin{aligned} m_0(\xi) &= \hat{\varphi}(2\pi) = \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(\xi) \quad \text{na } [-\pi, \pi], \\ m_1(\xi) &= e^{-i\xi} \chi_{[-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]}(\xi) \quad \text{na } [-\pi, \pi], \\ \hat{\psi}(\xi) &= m_1(\xi/2) \hat{\varphi}(\xi/2) = e^{-i\xi/2} \chi_{[-2\pi, -\pi] \cup [\pi, 2\pi]}(\xi). \end{aligned}$$

Możemy policzyć  $\varphi$  i  $\psi$  analizy Shannona

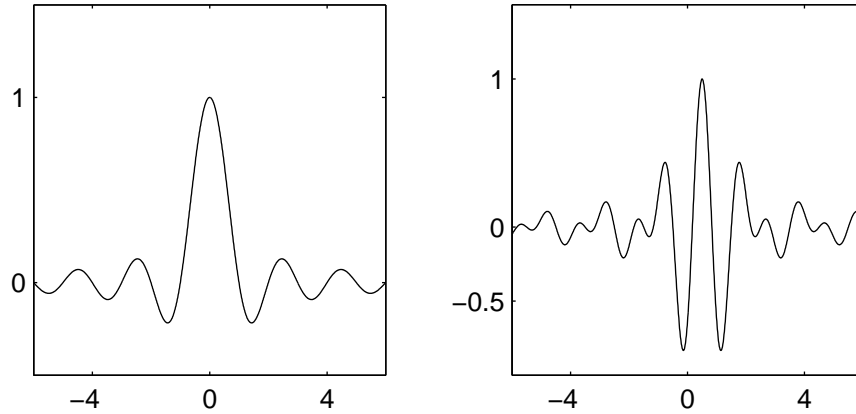
$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\varphi}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\xi x}}{ix} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi ix} (e^{ix\pi} - e^{-ix\pi}) = \frac{\sin(x\pi)}{x\pi},$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \hat{\psi}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{-\pi} e^{-i\xi/2} e^{i\xi x} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} e^{-i\xi/2} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\xi(x-1/2)}}{i(x-1/2)} \Big|_{-2\pi}^{-\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\xi(x-1/2)}}{i(x-1/2)} \Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi i(x-1/2)} ((e^{-i\pi(x-1/2)} - e^{-i2\pi(x-1/2)}) + (e^{i2\pi(x-1/2)} - e^{i\pi(x-1/2)})) \\ &= \frac{1}{\pi(x-1/2)} (\sin(2\pi(x-1/2)) - \sin(\pi(x-1/2))). \end{aligned}$$

## Pakiety falkowe

Zauważmy, że w przestrzeniach  $V_j$  mamy w tej chwili wiele różnych baz o.n. Z definicji, mamy bazę

$$\left\{ 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - n); n \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (5.32)$$



Rysunek 5.5: Funkcja skalująca i falka Shannona.

Dodatkowo, mamy rozkład

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1},$$

i w każdej z przestrzeni składowych bazy o.n.

$$\left\{ 2^{\frac{j-1}{2}} \varphi(2^{j-1}x - n); n \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{oraz} \quad \left\{ 2^{\frac{j-1}{2}} \psi(2^{j-1}x - n); n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (5.33)$$

odpowiednio. W przestrzeni  $V_j$  mamy więc do wyboru bazę (5.32) lub sumę baz (5.33). Możemy tak postępować dalej, rozkładając  $V_{j-1}$ , i widzimy, że w przestrzeniach  $V_j$  mamy, dla każdego  $J \geq 0$  bazę o.n.

$$\left\{ 2^{\frac{j-J}{2}} \varphi(2^{j-J}x - n), 2^{\frac{j-k}{2}} \psi(2^{j-k}x - n); n \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq J \right\}.$$

W takiej sytuacji mówimy, że w  $V_j$  mamy bibliotekę baz o.n. W rozdziale o pakietach falkowych wrócimy do tego zagadnienia. Będziemy konstruowali jeszcze inne bazy, rozkładając również przestrzeń  $W_j$  na sumy proste, używając pary filtrów dolno- i górnoprzepustowego. W ten sposób, mając konkretny sygnał i bibliotekę baz możemy dobrać do niego indywidualną bazę z biblioteki, i w tej bazie go rozłożyć. Kryteria wyboru baz mogą być różne, ale generalnie chodzi o to, żeby w rozkładzie było jak najmniej dużych współczynników.

## MRA Riesz

Wspomnieliśmy, że analiza wielorozdzielcza Riesz jest także, po zamianie funkcji skalującej ale dla tych samych podprzestrzeni  $V_j$ , analizą ortonormalną. Teraz to uzasadnimy. Będzie nam potrzebna następująca wersja Twierdzenia 5.4 (i).

**Twierdzenie 5.8.** Niech  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Wtedy układ

$$\{f(x-n); n \in \mathbb{Z}\} \quad (5.34)$$

jest układem Rieszsa, to znaczy istnieją stałe  $A, B > 0$  takie, że

$$A \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n f(\cdot - n) \right\|^2 \leq B \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2, \quad \{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^2 \quad (5.35)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi + 2k\pi)|^2 \leq B. \quad (5.36)$$

*Dowód.* Dowód przebiega podobnie do dowodu Twierdzenia 5.4. Jeżeli  $f \in L^2(\mathbb{R})$  to funkcja

$$F(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi + 2k\pi)|^2 \quad (5.37)$$

jest całkowna na  $[-\pi, \pi]$ . Niech ciąg  $\alpha = \{\alpha_n\}$  będzie skończony, i niech

$$\hat{\alpha}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{-ik\xi} \quad (5.38)$$

będzie odpowiadającym mu elementem  $L^2(\mathbb{T})$  — wielomianem trygonometrycznym. Pokażemy, że

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k f(\cdot - k) \right\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{\alpha}(\xi)|^2 F(\xi) d\xi \quad (5.39)$$

Dowód powyższej równości przeprowadzimy za chwilę, a teraz zauważmy, że twierdzenie wynika z (5.39). Załóżmy, że funkcje (5.34) tworzą układ Rieszsa, to znaczy zachodzi (5.35). Niech

$$E = \{\xi \in [-\pi, \pi]; F(\xi) > B\},$$

i niech

$$\chi_E(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{-ik\xi},$$

czyli  $\alpha_k$  są współczynnikami Fouriera funkcji charakterystycznej  $\chi_E$ . Ta funkcja nie jest wielomianem trygonometrycznym (ciąg  $\{\alpha_k\}$  nie jest skończony),

ale przy założeniu (5.35) równość (5.39) rozszerza się automatycznie na ciągi  $\{\alpha_k\} \in \ell^2$ . Mamy więc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\chi_E(\xi)|^2 F(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_E(\xi) F(\xi) d\xi \geq \frac{1}{2\pi} B \int_{-\pi}^{\pi} \chi_E(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} B |E|. \quad (5.40)$$

$|E|$  oznacza miarę (długość) zbioru  $E$ . Jeżeli  $F(\xi)$  jest ciągła, to  $E$  jest otwarty, a więc jest sumą rozłącznych odcinków. Wtedy  $|E|$  jest ich łączną długością. Miara jest uogólnieniem długości na inne zbiory. Nie wchodząc w szczegóły, pozostajmy przy takim intuicyjnym rozumieniu miary. Zauważmy, że w (5.40) równość może zachodzić tylko jeżeli  $|E| = 0$ , w przeciwnym wypadku zachodzi nierówność ostra. Łącząc (5.35), (5.39) oraz (5.40) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} B |E| &\leq \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k f(\cdot - k) \right\|^2 \\ &\leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 \\ &= B \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{\alpha}(\xi)|^2 d\xi \\ &= B \frac{1}{2\pi} |E|. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że w (5.40) musi zachodzić równość, a więc  $|E| = 0$ , a więc  $F(\xi) \leq B$  prawie wszędzie. Podobnie pokazujemy, że  $F(\xi) \geq A$ . W drugą stronę jest prościej. Załóżmy (5.36), i mając (5.39) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k f(\cdot - k) \right\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{\alpha}(\xi)|^2 F(\xi) d\xi \\ &\leq \frac{B}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{\alpha}(\xi)|^2 d\xi \\ &= B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2. \end{aligned}$$

Podobnie z drugą nierównością. Pozostaje pokazać (5.39). Niech  $\{\alpha_k\}$  będzie

ciągą skończonym.

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k f(\cdot - k) \right\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\alpha_n} f(x-k) \overline{f(x-n)} dx \\
&= \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\alpha_n} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-k) \overline{f(x-n)} dx \\
&= \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\alpha_n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-ik\xi} \overline{\hat{f}(\xi)} e^{in\xi} d\xi \\
&= \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\alpha_n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-i(k-n)\xi} d\xi \\
&= \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\alpha_n} \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{\pi(2l-1)}^{\pi(2l+1)} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-i(k-n)\xi} d\xi \\
&= \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\alpha_n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\xi) e^{-i(k-n)\xi} d\xi \\
&= \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\alpha_n} \widehat{F}(k-n) \\
&= \langle \alpha, \alpha * \widehat{F} \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\alpha}(\xi) \overline{(\alpha * \widehat{F})(\xi)} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\alpha}(\xi) \overline{\widehat{\alpha}(\xi) \widehat{F}(\xi)} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{\alpha}(\xi)|^2 \overline{\widehat{F}(\xi)} d\xi
\end{aligned}$$

Zabawny symbol w ostatniej całce to  $F(\xi)$ :

$$\begin{aligned}
\overline{\widehat{F}(\xi)} &= \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{F}(k) e^{-ik\xi}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{F}(k)} e^{ik\xi} \\
&= F(\xi),
\end{aligned}$$

a więc udowodniliśmy (5.39). Jest jeszcze drobny szczegół techniczny. Poka-

zując równość

$$\sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\alpha_n} \widehat{F}(k-n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{\alpha}(\xi)|^2 F(\xi) d\xi \quad (5.41)$$

korzystaliśmy z twierdzenia Plancherela, w ten sposób po cichu zakładając, że  $F(\xi) \in L^2(\mathbb{T})$ . W rzeczywistości wiemy tylko, że  $F(\xi)$  jest całkowalna. Możemy sobie z tym poradzić w standardowy sposób. Niech, dla  $N \in \mathbb{N}$  funkcja  $F_N(\xi)$  będzie obcięciem  $F(\xi)$  do poziomu  $N$ :

$$F_N(\xi) = \min\{F(\xi), N\}.$$

$F_N(\xi)$  jako funkcja ograniczona jest w  $L^2(\mathbb{T})$ . Mamy więc (5.41) z  $F_N$  w miejsce  $F$ :

$$\sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \alpha_k \overline{\alpha_n} \widehat{F}_N(k-n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{\alpha}(\xi)|^2 F_N(\xi) d\xi \quad (5.42)$$

Następnie przechodzimy do granicy, gdy  $N \rightarrow \infty$ . Na mocy twierdzenia o zbieżności ograniczonej prawa strona (5.42) dąży do prawej strony (5.41). Z drugiej strony widać, że

$$\widehat{F}_N(k) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \widehat{F}(k),$$

(znowu twierdzenie o zbieżności ograniczonej), a sumy po lewych stronach są skończone, więc z (5.42) wynika (5.41).  $\square$

Możemy teraz sformułować wniosek dotyczący analiz wielorozdzielczych Rieszsa.

**Wniosek 5.9.** *Jeżeli  $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$  i  $\varphi$  tworzą MRA Rieszsa, to istnieje  $\tilde{\varphi} \in V_0$  taka, że  $\{V_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$  i  $\tilde{\varphi}$  tworzą o.n. MRA.*

*Dowód.* Wiemy, że funkcja

$$F(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2$$

jest ograniczona od góry i odcięta od 0 od dołu. W takim razie funkcja  $F(\xi)^{-1/2}$  jest ograniczona, a więc w  $L^2(\mathbb{T})$ , a więc istnieją współczynniki  $\{\alpha_n\} \in \ell^2$  takie, że

$$\frac{1}{\sqrt{F(\xi)}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{-in\xi}.$$



Niech

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\varphi}}(\xi) &= \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{\sqrt{F(\xi)}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{-in\xi} \hat{\varphi}(\xi),\end{aligned}$$

czyli, jak wiemy,

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \varphi(x - n).$$

Wynika z tego, że  $\tilde{\varphi} \in V_0$ , a w związku z tym wszystkie całkowite przesunięcia  $\tilde{\varphi}$  też należą do  $V_0$ . Tworzą one układ o.n. w  $V_0$ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\tilde{\varphi}}(\xi + 2k\pi)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2}{F(\xi + 2k\pi)} \\ &= \frac{1}{F(\xi)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Korzystając z tego, że  $F(\xi)^{1/2} \in L^2(\mathbb{T})$  widzimy, że istnieją również współczynniki  $\{\beta_n\} \in \ell^2$ , takie, że

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \tilde{\varphi}(x - n),$$

a więc domknięte rozpięcia liniowe przesunięć całkowitych  $\tilde{\varphi}$  i  $\varphi$  są takie same, równe  $V_0$ .  $\square$

Skoro analiza Rieszego jest także analizą o.n., więc również generuje bazę falkową. W szczególności dla dowolnego  $N \in \mathbb{N}$  istnieje falka  $\psi$  będąca splinem rzędu  $N$ .

## Analizy splinowe

Wróćmy na chwilę do analiz splinowych. W rozdziale o przestrzeni Hilberta pokazaliśmy, że przesunięcia całkowite funkcji Haara  $\varphi = \Delta^0 = \chi_{[0,1]}$  stanowią układ o.n., a przesunięcia  $\Delta^1 = \varphi * \varphi$  stanowią układ Rieszego ze stałymi  $A = 1/3$  i  $B = 1$ . Korzystając z Twierdzenia 5.8 pokażemy teraz ogólną metodę, przy pomocy której można pokazać, że przesunięcia dowolnego splinu

$\Delta^N$  stanowią układ Rieszsa. Niech

$$F_N(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\Delta^N}(\xi + 2k\pi)|^2.$$

Wiemy, że

$$\begin{aligned} |\widehat{\Delta^0}(\xi)| &= |\widehat{\varphi}(\xi)| = \left| \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right|, \\ F_0(\xi) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 4 \sin^2(\xi/2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi + 2k\pi)^2} = 1, \quad (5.43) \\ F_N(\xi) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^{2(N+1)} = 2^{2(N+1)} \sin^{2(N+1)}(\xi/2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi + 2k\pi)^{2(N+1)}}. \end{aligned}$$

Oszacujemy wartości  $F_N(\xi)$  obliczając sumę w ostatnim wierszu. Z (5.43) wynika

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi + 2k\pi)^2} = \frac{1}{4 \sin^2(\xi/2)} = \frac{1}{2(1 - \cos(\xi))}. \quad (5.44)$$

Zauważmy, że powyższą sumę można różniczkować wyraz za wyrazem. Wynika to z tego, że szereg, a także szereg pochodnych jest zbieżny jednostajnie na każdym domkniętym podprzedziale otwartego przedziału  $(0, 2\pi)$  (w takiej sytuacji mówimy, że szereg jest zbieżny niemal jednostajnie na  $(0, 2\pi)$ ). Różniczkując (5.44) 4 krotnie otrzymujemy

$$\begin{aligned} 6 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi + 2k\pi)^4} &= \frac{2 + \cos(\xi)}{2(1 - \cos(\xi))^2}, \\ 120 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi + 2k\pi)^6} &= \frac{1 + 2 \cos(\xi)}{2(1 - \cos(\xi))^2} + \frac{15 - 12 \cos^2(\xi) - 3 \cos^3(\xi)}{2(1 - \cos(\xi))^4}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} F_1(\xi) &= 16 \sin^4(\xi/2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi + 2k\pi)^4} = \frac{2 + \cos(\xi)}{3}, \\ F_2(\xi) &= 64 \sin^6(\xi/2) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi + 2k\pi)^6} = \frac{16 + 16 \cos(\xi) + \cos^2(\xi)}{30}. \end{aligned}$$

Pierwszą funkcję łatwo jest oszacować dokładnie od góry i od dołu

$$\frac{1}{3} \leq F_1(\xi) \leq 1,$$

i otrzymujemy te same stałe  $A$  i  $B$ , które otrzymaliśmy wcześniej, bezpośrednio badając przesunięcia  $\Delta^1$ . Dla  $F_2(\xi)$  obliczymy pochodną, i znajdziemy maksima i minima. Łatwo można sprawdzić, że  $F_2(\xi)$  osiąga swoją wartość maksymalną w punktach  $2n\pi$  a minimalną w punktach  $(2n+1)\pi$ . Wynika stąd, że

$$\frac{1}{30} \leq F(\xi) \leq \frac{11}{10}.$$

W ten sposób udowodniliśmy, że przesunięcia splinu podstawowego  $\Delta^2(x)$  stanowią układ Riesz, ze stałymi  $1/30$  i  $11/10$ . Różniczkując (5.44) można uzyskać stałe Riesz, dla dowolnego  $\Delta^N(x)$ .

## Konstrukcja falek Daubechies

Falki Daubechies to falki o ograniczonym nośniku i, w zależności od wersji, różnej gładkości. Powstają one z analizy wielorozdzielczej, której funkcja skalująca ma te same własności co falka, czyli ograniczony nośnik i gładkość. Filtr dolnoprzepustowy takiej analizy wielorozdzielczej musi więc być wielomianem trygonometrycznym, czyli jego ciąg współczynników musi być skończony. Konstrukcja takiej analizy wielorozdzielczej rozpoczyna się więc od znalezienia odpowiedniego filtru. Pierwszym krokiem będzie twierdzenie, mówiące, że jeżeli funkcja  $m_0$  spełnia określone warunki, to jest filtrem dolnoprzepustowym pewnej analizy. Dowód twierdzenia jest długi, ale intuicyjnie jasny i dosyć interesujący. Idea jest następująca. Mając funkcję  $m_0$  konstruujemy funkcję skalującą wzorem

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0(2^{-1}\xi)\hat{\varphi}(2^{-1}\xi) = m_0(2^{-1}\xi)m_0(2^{-2}\xi)\hat{\varphi}(2^{-2}\xi) = \dots = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi).$$

Pytania są więc dwa: co trzeba założyć o  $\varphi$ , żeby była to funkcja skalująca pewnej analizy, i co trzeba założyć o  $m_0$ , żeby powyższy iloczyn nieskończony dawał odpowiednie  $\varphi$ . To zostanie rozstrzygnięte w Twierdzeniu 5.12. Następnie, kiedy już będzie wiadomo jakie warunki ma spełniać  $m_0$ , skonstruujemy ją. Teraz odpowiemy na pierwsze pytanie. Potrzebny nam będzie następujący fakt.

**Fakt 5.10.** *Niech*

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$$

*będzie rosnącym ciągiem podprzestrzeni domkniętych  $L^2(\mathbb{R})$ , i niech będą spełnione warunki (c) i (d) definicji analizy wielorozdzielczej. Wtedy warunek (b) jest spełniony automatycznie, a warunek (a) jest równoważny następującemu*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| = 1,$$

dla prawie każdego  $\xi \in \mathbb{R}$ .

*Dowód.* Niech  $f \in V_j$ . Z warunku (c) definicji analizy wynika, że

$$f_j(x) = 2^{j/2} f(2^j x) \in V_0.$$

Jeżeli  $f \in \bigcap V_j$  to  $f_j \in V_0$  dla każdego  $j \in \mathbb{Z}$ . Zamieniając zmienne widzimy, że dla każdego  $j \in \mathbb{Z}$

$$\|f_j\| = \|f\|.$$

Korzystając z Twierdzenia 5.3 (i) mamy, że istnieją  $m_j \in L^2(\mathbb{T})$  takie, że

$$\hat{f}_j(\xi) = m_j(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \quad m_j \in L^2(\mathbb{T}), \quad \|m_j\| = \|f_j\| = \|f\|,$$

czyli

$$\hat{f}(\xi) = 2^{j/2} \hat{f}_j(2^j \xi) = 2^{j/2} m_j(2^j \xi) \hat{\varphi}(2^j \xi).$$

Zauważmy, że w takim razie, z nierówności Schwarz'a

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^{4\pi} |\hat{f}(\xi)| d\xi &= 2^{j/2} \int_{2\pi}^{4\pi} |m_j(2^j \xi)| |\hat{\varphi}(2^j \xi)| d\xi \\ &\leq 2^{j/2} \left( \int_{2\pi}^{4\pi} |m_j(2^\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left( \int_{2\pi}^{4\pi} |\hat{\varphi}(2^j \xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Zamieniamy zmienne w obu całkach.  $m_j$  jest  $2\pi$ -okresowa, a przedział  $[2^{j+1}\pi, 2^{j+2}\pi]$  składa się z  $2^j$  okresów, więc

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^{4\pi} |m_j(2^j \xi)|^2 d\xi &= 2^{-j} \int_{2^{j+1}\pi}^{2^{j+2}\pi} |m_j(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |m_j(\xi)|^2 d\xi \\ &= 2\pi \|m_j\|^2 \\ &= 2\pi \|f\|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^{4\pi} |\hat{\varphi}(2^j \xi)|^2 d\xi &= 2^{-j} \int_{2^{j+1}\pi}^{2^{j+2}\pi} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq 2^{-j} \int_{2^{j+1}\pi}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Wstawiając powyższe do naszych rachunków

$$\int_{2\pi}^{4\pi} |\hat{f}(\xi)| d\xi \leq \sqrt{2\pi} \|f\| \left( \int_{2^{j+1}\pi}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Całką po prawej stronie jest „ogonem” skończonej całki, więc prawa strona  $\rightarrow 0$  gdy  $j \rightarrow \infty$ , a więc

$$\int_{2\pi}^{4\pi} |\hat{f}(\xi)| d\xi = 0 \Rightarrow \hat{f}(\xi) \equiv 0 \quad \text{na} \quad [2\pi, 4\pi].$$

W podobny sposób pokazujemy, że  $\hat{f}(\xi) \equiv 0$  dla  $\xi \in [-4\pi, -2\pi]$ . Następnie możemy przeprowadzić ten sam argument dla funkcji  $f(2^k x)$ , która też należy do  $\bigcap V_j$ . Otrzymujemy

$$\hat{f}(\xi) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad |\xi| \in 2^{-k}[2\pi, 4\pi] \quad \text{dla} \quad \text{każdego} \quad k \in \mathbb{Z},$$

czyli  $\hat{f} \equiv 0$ . Pokazaliśmy więc, że spełniony jest warunek (b) definicji MRA.

Teraz zajmiemy się warunkiem (a). Przypomnijmy, że niezależnie od (a) (nie korzystając z niego) możemy pokazać istnienie filtru dolnoprzepustowego  $m_0$  takiego, że

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \quad (5.45)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1, \quad (5.46)$$

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1. \quad (5.47)$$

Z (5.47) wynika, że  $|m_0(\xi)| \leq 0$  co, biorąc pod uwagę (5.44) daje nam, że ciąg  $|\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)|$  jest niemalejący

$$|\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| = |m_0(2^{-(j+1)}\xi)| \cdot |\hat{\varphi}(2^{-(j+1)}\xi)| \leq |\hat{\varphi}(2^{-(j+1)}\xi)|.$$

Z (5.46) wynika, że jest to ciąg ograniczony od góry przez 1, więc dla każdego  $\xi \in \mathbb{R}$  mamy granicę

$$g(\xi) = \lim_{j \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| \quad \text{i} \quad 0 \leq g(\xi) \leq 1.$$

Wykorzystamy fakt, że w każdej podprzestrzeni  $V_j$  mamy bazę o.n. składającą się z funkcji

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k); \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rzut ortogonalny na  $V_j$  można więc zapisać wzorem

$$(P_j f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x) \quad \text{w} \quad L^2(\mathbb{R}),$$

oraz

$$\|P_j f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2.$$

Dowód następującego faktu zostawiamy jako ćwiczenie.

**Fakt 5.11.** *Mamy następującą równoważność:*

$$\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \|P_j f\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \|f\|, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Warunek po prawej można nieco osłabić, zachowując równoważność. Wystarczy żeby zbieżność zachodziła dla  $f$  z jakiegoś gęstego podzbioru.

Niech gęstym podzbiorem  $L^2(\mathbb{R})$  będzie zbiór funkcji  $f$  o ograniczonym spektrum, czyli takich, których transformata Fouriera ma ograniczony nośnik. Niech  $f$  będzie taką funkcją.

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{\varphi}_{j,k} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) 2^{-j/2} \overline{\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)} e^{i2^{-j}\xi k} d\xi \\ &= \frac{2^{j/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^j\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} e^{i\xi k} d\xi. \end{aligned}$$

Niech  $j$  będzie dostatecznie duże, tak, aby  $\hat{f}(2^j\xi) \equiv 0$  dla  $\xi \notin [-\pi, \pi]$ . Wtedy

$$= \frac{2^{j/2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(2^j\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} e^{i\xi k} d\xi.$$

Tak więc  $\langle f, \varphi_{j,k} \rangle$  jest współczynnikiem Fouriera funkcji z  $L^2(\mathbb{T})$ :

$$\langle f, \varphi_{j,k} \rangle = \hat{F}(-k), \quad \text{dla} \quad F(\xi) = \hat{f}(2^j\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)}.$$

Skorzystamy z równości Plancherela w  $L^2(\mathbb{T})$

$$\begin{aligned} \|P_j f\|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| 2^{j/2} \hat{f}(2^j\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} \right|^2 d\xi \\ &= \frac{2^j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(2^j\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2^j\pi}^{2^j\pi} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \\ &\xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 g(\xi)^2 d\xi, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej linii skorzystaliśmy z twierdzenia o zbieżności ograniczonej. Widzimy więc, że

$$\|P_j\|^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

dokładnie wtedy, gdy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 g(\xi)^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Ponieważ  $0 \leq g(\xi) \leq 1$  to powyższa równość zachodzi dla każdej funkcji  $\hat{f}$  o nośniku ograniczonym wtedy i tylko wtedy gdy  $g(\xi) = 1$  prawie wszędzie.  $\square$

Skorzystamy teraz z udowodnionego właśnie faktu. Widzimy, że funkcja  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  jest funkcją skalującą pewnej analizy wielorozdzielczej jeżeli spełnia następujące warunki

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1, \quad (5.48)$$

$$\text{istnieje } m_0 \in L^2(\mathbb{T}) \text{ taka, że } \hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi). \quad (5.49)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| = 1 \text{ dla prawie każdego } \xi \in \mathbb{R}. \quad (5.50)$$

Warunek (5.48) mówi, że przesunięcia całkowite  $\varphi$  stanowią układ o.n., a więc jeżeli  $V_0$  zdefiniujemy jako domknięte rozpięcie liniowe tych przesunięć, to stanowią one bazę o.n.  $V_0$ . Warunek (5.49) z kolei mówi, że jeżeli zdefiniujemy  $V_j$  jako odpowiednie przeskalowanie  $V_0$ , to  $V_j \subset V_{j+1}$ . W końcu, jak wynika z faktu powyżej warunek (5.50) gwarantuje (a) w definicji MRA. Teraz odpowiemy na drugie pytanie, czyli sformułujemy warunki na  $m_0$ , dzięki którym funkcja  $\varphi$  zdefiniowana przy pomocy iloczynu nieskończonego (po stronie transformaty Fouriera), będzie spełniała (5.48)–(5.50).

**Twierdzenie 5.12.** *Niech funkcja  $m_0(\xi) \in L^2(\mathbb{T})$  spełnia następujące warunki*

- (i)  $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$ ,
- (ii)  $m_0$  jest różniczkowalna w 0 i  $m_0(0) = 1$ ,
- (iii)  $m_0$  ma wartości rzeczywiste na  $[-\pi/2, \pi/2]$ , oraz

$$\inf_{\xi \in [-\pi/2, \pi/2]} m_0(\xi) = K > 0.$$

*Wtedy  $m_0$  jest filtrem dolnoprzepustowym pewnej analizy wielorozdzielczej. Dodatkowo, jeżeli  $m_0$  jest wielomianem trygonometrycznym (to znaczy ciąg współczynników Fouriera  $\{\hat{m}_0(k)\}$  jest skończony), to funkcja skalująca i falka tej analizy mają nośnik ograniczony (poza pewnym skończonym przedziałem są równe 0).*

*Dowód.* Zauważmy, że iloczyn nieskończony

$$\prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi)$$

jest zbieżny dla każdego  $\xi \in \mathbb{R}$ . Ponieważ  $2^{-j}\xi \rightarrow 0$  dla  $j \rightarrow \infty$ , więc wystarczy pokazać zbieżność iloczynu dla  $\xi$  dostatecznie małych. Niech więc  $\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Wtedy, zgodnie z (iii) wszystkie czynniki są dodatnie. Z (i) wynika, że  $|m_0(\xi)| \leq 1$ , a więc

$$0 < m_0(2^{-j}\xi) \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, \quad \xi \in [-\pi, \pi].$$

Iloczyn częściowe

$$\prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\xi) \tag{5.51}$$

tworzą więc ciąg nierosnący, ograniczony od dołu przez 0, a więc zbieżny. Granicę iloczynu oznaczamy przez  $\hat{\varphi}(\xi)$ . Pokażemy, że istotnie ta granica jest elementem  $L^2(\mathbb{R})$ , a więc transformatą Fouriera czegoś, ale obecnie niech to będzie tylko oznaczenie jakiejś funkcji. Mamy więc

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi). \tag{5.52}$$

Zauważmy, że  $\hat{\varphi}$  spełnia (5.49):

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(2\xi) &= \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j+1}\xi) \\ &= \prod_{j=0}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi) \\ &= m_0(\xi) \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi) \\ &= m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

Pokażemy teraz, że  $\hat{\varphi}$  spełnia (5.50). Z (i) wynika, że  $0 \leq |m_0(\xi)| \leq 1$ , a więc także  $0 \leq |\hat{\varphi}(\xi)| \leq 1$ . Zamienimy iloczyn na sumę korzystając z logarytmu. Zauważmy, że  $\log m_0(\xi)$  jest określona na  $[-\pi/2, \pi/2]$ , i jej pochodna w 0 jest 0:

$$\left. \frac{d}{d\xi} \log m_0(\xi) \right|_{\xi=0} = \frac{1}{m_0(0)} m_0'(0) = 0,$$



gdyż  $m_0'(0) = 0$ . Wynika to z faktu, że  $m_0$  jest różniczkowalna w 0 i ma tam lokalne maksimum. Tak więc dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że

$$\log m_0(\xi) > -\epsilon|\xi| \quad \text{dla} \quad |\xi| < \delta.$$

Niech więc  $|\xi| < 2\delta$  i  $|\xi| < \pi$ , wtedy  $\hat{\varphi}(\xi) > 0$  oraz

$$\begin{aligned} \log \hat{\varphi}(\xi) &= \sum_{j=1}^{\infty} \log m_0(2^{-j}\xi) \\ &> \sum_{j=1}^{\infty} -\epsilon 2^{-j} |\xi| \\ &> -\epsilon\pi \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \\ &= -\epsilon\pi, \end{aligned}$$

czyli

$$|\hat{\varphi}(\xi)| > e^{-\epsilon\pi} \quad \text{dla} \quad |\xi| < \delta, \quad |\xi| < \pi.$$

Funkcja  $|\hat{\varphi}(\xi)|$  jest więc ciągła w 0 i ma tam wartość 1, a więc spełnione jest (5.50). Musimy jeszcze pokazać, że  $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$  oraz (5.48). W tym celu wprowadźmy następujące funkcje

$$\hat{\varphi}_N(\xi) = \chi_{[-2^N\pi, 2^N\pi]}(\xi) \prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\xi). \quad (5.53)$$

Zauważmy, że dla każdego  $\xi \in L^2(\mathbb{R})$  mamy

$$\hat{\varphi}(\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\varphi}_N(\xi).$$

Przypomnijmy, że iloczyny częściowe (5.51) nie są elementami  $L^2(\mathbb{R})$  (choćby dlatego, że są okresowe). Chcemy pokazać, że  $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ , więc utworzyliśmy ciąg (5.53), który należy do  $L^2(\mathbb{R})$  i jest zbieżny do  $\hat{\varphi}$  w każdym punkcie. Pokażemy teraz, że wszystkie  $\hat{\varphi}_N$  mają tę samą normę, równą  $\sqrt{2\pi}$ .

Niech  $N \geq 2$

$$\begin{aligned}
\|\hat{\varphi}_N\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_N(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} \prod_{j=1}^N |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{-2^N\pi}^0 \prod_{j=1}^N |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi + \int_0^{2^N\pi} \prod_{j=1}^N |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_0^{2^N\pi} \left( \prod_{j=1}^N |m_0(2^{-j}(\xi - 2^N\pi))|^2 + \prod_{j=1}^N |m_0(2^{-j}\xi)|^2 \right) d\xi \\
&= \int_0^{2^N\pi} \left( \prod_{j=1}^N |m_0(2^{-j}\xi - 2^{N-j}\pi)|^2 + \prod_{j=1}^N |m_0(2^{-j}\xi)|^2 \right) d\xi.
\end{aligned}$$

$m_0$  jest  $2\pi$ -okresowa, więc wszystkie czynniki w obu iloczynach z wyjątkiem  $N$ -tego są równe. Możemy je więc wyciągnąć przed nawias, i mamy

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2^N\pi} (|m_0(2^{-N}\xi - \pi)|^2 + |m_0(2^{-N}\xi)|^2) \prod_{j=1}^{N-1} |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_0^{2^N\pi} \prod_{j=1}^{N-1} |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Funkcja podcałkowa jest okresowa o okresie  $2^N\pi$ , więc całkę po okresie możemy „przesunąć”:

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2^{N-1}\pi}^{2^{N-1}\pi} \prod_{j=1}^{N-1} |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_{N-1}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \|\hat{\varphi}_{N-1}\|^2.
\end{aligned}$$

Widzimy więc, że normy wszystkich funkcji  $\hat{\varphi}_N$  są równe,  $N = 1, 2, \dots$

Policzmy normę  $\hat{\varphi}_1$

$$\begin{aligned}
\|\hat{\varphi}_1\|^2 &= \int_{-2\pi}^{2\pi} |m_0(2^{-1}\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{-2\pi}^0 |m_0(2^{-1}\xi)|^2 d\xi + \int_0^{2\pi} |m_0(2^{-1}\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_0^{2\pi} (|m_0(2^{-1}(\xi - 2\pi))|^2 + |m_0(2^{-1}\xi)|^2) d\xi \\
&= \int_0^{2\pi} 1 d\xi \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Wiemy, że

$$\hat{\varphi}(\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\varphi}_N(\xi), \quad \text{oraz} \quad \|\hat{\varphi}_N\|^2 = 1.$$

Skorzystamy teraz z drugiego podstawowego narzędzia teorii całki Lebesgue'a, czyli z lematu Fatou.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}_N(\xi)|^2 d\xi \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_N(\xi)|^2 d\xi = 2\pi.$$

Widzimy więc, że  $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ , a więc istotnie, zgodnie z jej oznaczeniem, jest transformatą Fouriera elementu  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ . Pokażemy teraz, że

$$\hat{\varphi}(\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\varphi}_N(\xi)$$

nie tylko w każdym punkcie, ale także w  $L^2(\mathbb{R})$ . W tym celu pokażemy, że istnieje stała  $c$  taka, że

$$|\hat{\varphi}_N(\xi)| \leq c|\hat{\varphi}(\xi)|. \quad (5.54)$$

Jeżeli  $\xi \notin [-2^N\pi, 2^N\pi]$  to  $\hat{\varphi}_N(\xi) = 0$ , i (5.54) jest spełnione. Dla  $\xi \in [-2^N\pi, 2^N\pi]$  mamy

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\xi) &= \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi) \\
&= \prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\xi) \prod_{j=N+1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi) \\
&= \hat{\varphi}_N(\xi) \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}(2^{-N}\xi)) \\
&= \hat{\varphi}_N(\xi) \hat{\varphi}(2^{-N}\xi),
\end{aligned}$$

a więc

$$|\hat{\varphi}_N(\xi)| = \frac{|\hat{\varphi}(\xi)|}{|\hat{\varphi}(2^{-N}\xi)|}.$$

Ponieważ dla  $\xi \in [-2^N\pi, 2^N\pi]$  mamy  $2^{-N}\xi \in [-\pi, \pi]$ , więc wystarczy pokazać, że

$$|\hat{\varphi}(\xi)| > \frac{1}{c} \quad \text{dla } \xi \in [-\pi, \pi].$$

Niech więc  $\xi \in [-\pi, \pi]$ . Wcześniej pokazaliśmy, że dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$ , taka, że

$$\hat{\varphi}(\eta) > e^{-\epsilon\pi} \quad \text{dla } |\eta| < \delta, |\eta| < \pi.$$

Wybermy, na przykład,  $\epsilon = 1$ , i niech  $\delta \leq \pi$  będzie zgodna z powyższym. Niech  $L \in \mathbb{N}$  będzie wystarczająco duże, tak aby  $|2^{-L}\xi| < \delta$ . Wtedy dla  $j = 1, 2, \dots, L-1$  mamy  $2^{-j}\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$ , oraz

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}(\xi)| &= \prod_{j=1}^{\infty} |m_0(2^{-j}\xi)| \\ &= \prod_{j=1}^{L-1} |m_0(2^{-j}\xi)| \cdot |\hat{\varphi}(2^{-L}\xi)| \\ &\geq \prod_{j=1}^{L-1} K \cdot e^{-\pi} \\ &= K^{L-1} e^{-\pi}. \end{aligned}$$

Niech więc  $c = e^{\pi}/K^{L-1}$ . Mając (5.54) pokażemy  $\varphi_N \rightarrow \varphi$  w  $L^2(\mathbb{R})$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\varphi_N - \varphi\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_N(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = 0,$$

na mocy twierdzenia o zbieżności ograniczonej, gdyż

$$|\hat{\varphi}_N(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)|^2 \leq (|\hat{\varphi}_N(\xi)| + |\hat{\varphi}(\xi)|)^2 \leq |\hat{\varphi}(\xi)|^2(c+1)^2,$$

a funkcja  $|\hat{\varphi}(\xi)|^2$  jest całkowna. Pokażemy teraz, że funkcje  $\varphi_N$  spełniają (5.48). W tym celu wykonamy rachunek podobny do tego, w którym pokazaliśmy, że wszystkie  $\varphi_N$  mają tą samą normę 1. Niech

$$F_N(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_N(\xi + 2k\pi)|^2.$$

Najpierw pokażemy, że  $\hat{F}_N(m) = \hat{F}_1(m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  niezależnie od  $N$ . Niech  $N \geq 2$

$$\begin{aligned}
\hat{F}_N(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(\xi) e^{-im\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_N(\xi + 2k\pi)|^2 e^{-im\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_N(\xi)|^2 e^{-im\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} \prod_{j=1}^N |m_0(2^{-j}\xi)|^2 e^{-im\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2^N\pi} \left( \prod_{j=1}^N |m_0(2^{-j}(\xi - 2^N\pi))|^2 + \prod_{j=1}^N |m_0(2^{-j}\xi)|^2 \right) e^{-im\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2^N\pi} \prod_{j=1}^{N-1} |m_0(2^{-j}\xi)|^2 e^{-im\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-2^{N-1}\pi}^{2^{N-1}\pi} \prod_{j=1}^{N-1} |m_0(2^{-j}\xi)|^2 e^{-im\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}_{N-1}(\xi)|^2 e^{-im\xi} d\xi \\
&= \hat{F}_{N-1}(m).
\end{aligned}$$

Funkcje  $F_N(\xi)$  mają więc identyczne współczynniki Fouriera, a ponieważ są całkowne na  $\mathbb{T}$ , więc muszą być sobie równe. Obliczymy współczynniki Fouriera  $F_1(\xi)$ . Podobnie jak powyżej

$$\begin{aligned}
\hat{F}_1(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} |m_0(2^{-1}\xi)|^2 e^{-im\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|m_0(2^{-1}(\xi - 2\pi))|^2 + |m_0(2^{-1}\xi)|^2) e^{-im\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\xi} d\xi \\
&= \begin{cases} 1 & : m = 0 \\ 0 & : m \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dla każdego  $N$  mamy więc

$$F_N(\xi) \equiv 1,$$

czyli dla każdego  $N$

$$\langle \varphi_N(\cdot - k), \varphi_N(\cdot - l) \rangle = \begin{cases} 1 & : k = l \\ 0 & : k \neq l. \end{cases}$$

Korzystając ze zbieżności  $\varphi_N \rightarrow \varphi$  w  $L^2(\mathbb{R})$ , oraz ciągłości iloczynu skalar-  
nego otrzymujemy (5.48).

Do udowodnienia pozostało jeszcze stwierdzenie o ograniczonym nośniku  
funkcji skalującej i falki, związanych z analizą wielorozdzielczą, w przypadku,  
gdy  $m_0$  jest wielomianem trygonometrycznym

$$m_0(\xi) = \sum_{n=-L}^L h_n e^{-in\xi}. \quad (5.55)$$

Do udowodnienia tego ostatniego stwierdzenia najwygodniej jest skorzystać z  
języka teorii funkcji uogólnionych (dystrybucji). Dlatego tylko naszkicujemy  
ideę. Iloczyny częściowe zbiegają do  $\hat{\varphi}$  w każdym punkcie  $\xi$

$$\prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\xi) \rightarrow \hat{\varphi}(\xi),$$

ale nie w  $L^2(\mathbb{R})$ , gdyż nie są elementami  $L^2(\mathbb{R})$ . Są natomiast funkcjami  
uogólnionymi i jako takie zbiegają do  $\hat{\varphi}$ , która też jest funkcja uogólnioną.  
Korzystając z (5.55) widzimy, że iloczyny częściowe mają postać

$$\prod_{j=1}^N \left( \sum_{n=-L}^L h_n e^{-in2^{-j}\xi} \right) = \sum_{n_1, \dots, n_N = -L}^L h_{n_1} \dots h_{n_N} e^{-i(n_1 2^{-1} + \dots + n_N 2^{-N})\xi}.$$

Widzimy więc, że taki iloczyn częściowy jest kombinacją liniową transformat  
Fouriera impulsów Diraca w punktach  $n_1 2^{-1} + \dots + n_N 2^{-N}$ . Ponieważ wszyst-  
kie współczynniki  $|n_i| \leq L$ , więc wszystkie impulsy Diraca zlokalizowane są w  
przedziale  $[-L, L]$ . Widać więc, przynajmniej intuicyjnie, że funkcja  $\varphi$ , która  
jako funkcja uogólniona jest granicą funkcji uogólnionych o nośnikach zawar-  
tych w  $[-L, L]$  też ma tę własność. Z kolei falka jest skończoną kombinacją  
liniową (gdyż filtr  $m_1$  też jest wielomianem trygonometrycznym) przesunięć  
 $\varphi$ , a więc też ma nośnik ograniczony.  $\square$

**Uwaga 5.13.** *Oszacowanie rozmiaru nośnika  $\varphi(x)$  można zrobić dokładniej.  
Jeżeli*

$$m_0(\xi) = \sum_{n=M}^N h_n e^{-in\xi}, \quad M < N, \quad M, N \in \mathbb{Z}, \quad (5.56)$$

to nośnik  $\varphi(x)$  zawiera się w przedziale  $[M, N]$ . Podobnie możemy oszacować nośnik falki  $\psi(x)$  związanej konstruowaną analizą wielorozdzielczą. Jeżeli filtr dolnoprzepustowy jest postaci (5.56), to filtr górnoprzepustowy jest wielomianem trygonometrycznym postaci

$$m_1(\xi) = \sum_{n=1-N}^{1-M} g_n e^{-in\xi} \quad \text{oraz} \quad \hat{\psi}(\xi) = m_1(2^{-1}\xi) \prod_{j=2}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi).$$

Przeprowadzając takie samo rozumowanie jak dla nośnika  $\varphi(x)$  otrzymujemy, że nośnik  $\psi(x)$  jest zawarty w przedziale  $[1/2 - (N - M)/2, 1/2 + (N - M)/2]$ .

Konstrukcja falek o nośniku ograniczonym sprowadziliśmy więc do problemu znalezienia wielomianu trygonometrycznego  $m_0$  spełniającego założenia Twierdzenia 5.12. Konstrukcja takiego wielomianu podzielimy na 2 kroki. W pierwszym znajdziemy wielomian trygonometryczny  $g(\xi)$  spełniający

$$g(0) = 1, \quad g(\xi) \geq 0, \quad \text{oraz} \quad g(\xi) > 0 \text{ na } [-\pi/2, \pi/2], \quad (5.57)$$

$$g(\xi) + g(\xi + \pi) = 1. \quad (5.58)$$

W drugim kroku „wyciągniemy pierwiastek” z  $g$ , czyli znajdziemy wielomian taki, że

$$|m_0(\xi)|^2 = g(\xi).$$

## Filtry Daubechies

Filtry Daubechies mogą mieć dowolne, parzyste długości. Ustalmy pewne  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Niech

$$c_k = \int_0^{\pi} \sin(t)^{2k+1} dt,$$

oraz

$$g_k(\xi) = 1 - \frac{1}{c_k} \int_0^{\xi} \sin(t)^{2k+1} dt.$$

Pokażemy, że  $g_k$  są wielomianami trygonometrycznymi spełniającymi (5.57) i (5.58). Przede wszystkim  $\sin(t)$  jest wielomianem trygonometrycznym

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

po podniesieniu do potęgi mamy

$$\begin{aligned}\sin(t)^{2k+1} &= \frac{1}{(2i)^{2k+1}} \sum_{l=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{l} e^{ilt} e^{-i(2k+1-l)t} \\ &= \frac{1}{(2i)^{2k+1}} \sum_{l=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{l} e^{-i(2k+1-2l)t} \\ &== \sum_{\substack{l=-2k-1 \\ l \text{ nieparz.}}}^{2k+1} \alpha_l e^{ilt},\end{aligned}$$

a więc także wielomian trygonometryczny. Wielomian ten nie ma wyrazu wolnego, więc po scałkowaniu w dalszym ciągu jest wielomianem trygonometrycznym:

$$\begin{aligned}\int_0^\xi \sin(t)^{2k+1} dt &= \sum_{\substack{l=-2k-1 \\ l \text{ nieparz.}}}^{2k+1} \alpha_l \int_0^\xi e^{ilt} dt \\ &= \sum_{\substack{l=-2k-1 \\ l \text{ nieparz.}}}^{2k+1} \alpha_l \frac{(e^{i l \xi} - 1)}{i l} \\ &= \sum_{l=-2k-1}^{2k+1} \beta_l e^{ilt}.\end{aligned}$$

Widzimy więc, że  $g_k(\xi)$  jest wielomianem trygonometrycznym stopnia  $2k+1$ . Zakres wartości  $g_k$  ustalimy wyznaczając ekstrema.

$$g'_k(\xi) = -\frac{1}{c_k} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \sin(t)^{2k+1} dt = -\frac{1}{c_k} \sin(\xi)^{2k+1}.$$

Funkcja  $g_k$  rośnie więc na przedziałach postaci  $[(2n-1)\pi, 2n\pi]$ , a maleje na przedziałach postaci  $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ . Ma więc lokalne ściśle maksima w punktach  $2n\pi$  i lokalne, ściśle minima w punktach postaci  $(2n+1)\pi$ . Ponieważ jest  $2\pi$ -okresowa, więc wystarczy sprawdzić wartości w punktach  $0$  i  $\pi$ .

$$g_k(0) = 1, \quad g_k(\pi) = 1 - \frac{1}{c_k} c_k = 0.$$

$g_k$  ma więc maksimum  $1$  w punktach  $2n\pi$  i minimum  $0$  w punktach  $(2n+1)\pi$ . W innych punktach  $0 < g_k(\xi) < 1$ , czyli  $g_k$  spełnia (5.57). Udowodnimy teraz (5.58), przy czym wystarczy ograniczyć się do  $\xi > 0$ , ze względu na



okresowość.

$$\begin{aligned} g_k(\xi) + g_k(\xi + \pi) &= 1 - \frac{1}{c_k} \int_0^\xi \sin(t)^{2k+1} dt + 1 - \frac{1}{c_k} \int_0^{\xi+\pi} \sin(t)^{2k+1} dt \\ &= 2 - \frac{1}{c_k} \int_0^\xi \sin(t)^{2k+1} dt - \frac{1}{c_k} \int_0^{\xi+\pi} \sin(t)^{2k+1} dt. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Zauważmy, że

$$\int_0^{\xi+\pi} \sin(t)^{2k+1} dt = \int_{-\pi}^\xi \sin(t + \pi)^{2k+1} dt = - \int_{-\pi}^\xi \sin(t)^{2k+1} dt,$$

czyli, kontynuując (5.59) i korzystając z własności całki

$$\begin{aligned} &= 2 - \frac{1}{c_k} \int_0^\xi \sin(t)^{2k+1} dt + \frac{1}{c_k} \int_{-\pi}^\xi \sin(t)^{2k+1} dt \\ &= 2 + \frac{1}{c_k} \int_{-\pi}^0 \sin(t)^{2k+1} dt \\ &= 2 - \frac{1}{c_k} \int_0^\pi \sin(t)^{2k+1} dt \\ &= 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Mamy więc (5.58), czyli dla każdego  $k = 0, 1, 2, \dots$  skonstruowaliśmy odpowiednie  $g_k$ . Dla każdego  $k$  możemy łatwo wyliczyć współczynniki wielomianu  $g_k$ . Drugim krokiem w konstrukcji filtrów Daubechies jest następujące twierdzenie, które umożliwia „wyciągnięcie pierwiastka” z  $g_k$ .

**Twierdzenie 5.14.** *Niech  $g(\xi)$  będzie wielomianem trygonometrycznym*

$$g(\xi) = \sum_{n=-M}^M \alpha_n e^{in\xi}, \quad (5.60)$$

*takim, że  $g(\xi) \geq 0$ . Wtedy istnieje wielomian trygonometryczny  $m_0(\xi)$*

$$m_0(\xi) = \sum_{n=0}^M \beta_n e^{-in\xi}$$

*taki, że  $|m_0(\xi)|^2 = g(\xi)$ .*

*Dowód.* Dowód sprowadza się do tego, że pierwiastki  $g$  można pogrupować w pary, a następnie te pary można rozdzielić. Niech  $P(z)$  będzie wielomianem zespolonym danym wzorem

$$P(z) = \sum_{k=0}^{2M} \alpha_{k-M} z^k,$$

czyli, dla  $z$  na okręgu jednostkowym,  $z = e^{i\xi}$  mamy

$$P(e^{i\xi}) = (e^{i\xi})^M g(\xi).$$

$P(z)$  spełnia następujące równanie

$$\begin{aligned} z^{2M} \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} &= z^{2M} \overline{\sum_{k=0}^{2M} \alpha_{k-M} \bar{z}^{-k}} \\ &= z^{2M} \sum_{k=0}^{2M} \bar{\alpha}_{k-M} z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2M} \bar{\alpha}_{k-M} z^{2M-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2M} \bar{\alpha}_{M-k} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{2M} \alpha_{k-M} z^k \\ &= P(z). \end{aligned}$$

Po drodze skorzystaliśmy z tego, że  $g$  ma wartości rzeczywiste, a więc  $\alpha_{-k} = \bar{\alpha}_k$ . Wielomiany  $P(z)$  i  $\overline{P(1/\bar{z})}$  mają więc te same pierwiastki (różne od zera), z tymi samymi krotnościami. Niech  $r_1, \dots, r_l$  będą różnymi pierwiastkami  $P$ , leżącymi wewnątrz okręgu jednostkowego ( $|r_i| < 1$ ,  $i = 1, \dots, l$ ), o krotnościach  $n_1, \dots, n_l$ . Wtedy  $1/\bar{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  są różnymi pierwiastkami  $\overline{P(1/\bar{z})}$  leżącymi poza okręgiem jednostkowym, o krotnościach  $n_1, \dots, n_l$ .

$$r_1, \dots, r_l \quad \text{oraz} \quad 1/\bar{r}_1, \dots, 1/\bar{r}_l$$

są wszystkimi pierwiastkami  $P$  różnymi od 0 i nie leżącymi dokładnie na okręgu jednostkowym. Niech  $s_1, \dots, s_p$  będą różnymi pierwiastkami  $P$  leżącymi dokładnie na okręgu jednostkowym,  $|s_j| = 1$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Można uzasadnić, że krotności pierwiastków  $s_j$  są liczbami parzystymi. W skrócie, dodajemy  $\epsilon > 0$  do naszego wielomianu  $g(\xi)$  i staje się on ściśle dodatni. Odpowiadający mu wielomian nie ma więc zer na kole jednostkowym, tylko poza nim, występujące w parach. Gdy  $\epsilon \rightarrow 0$  pierwiastki, które przesuną się na okrąg jednostkowy zejdą się na nim parami, jeden przesunie się ze środka, drugi z zewnątrz. Można to uściślić. Krotności pierwiastków na okręgu jednostkowym oznaczmy więc przez  $2k_1, \dots, 2k_p$ . Wielomian  $P(z)$  nie ma pierwiastka w 0. To jest równoważne warunkowi  $\alpha_{-M} \neq 0$ , czyli temu, że

$M$  w (48) jest najmniejsze. Skoro  $P(z)$  nie ma innych pierwiastków oprócz wypisanych powyżej, więc możemy rozłożyć go na czynniki

$$P(z) = A \prod_{i=1}^l (z - r_i)^{n_i} (z - 1/\bar{r}_i)^{n_i} \prod_{j=1}^p (z - s_j)^{2k_j}.$$

Zrobimy następujące przekształcenia

$$(z - s_j) = -zs_j \left( \frac{1}{z} - \bar{s}_j \right), \quad \left( \text{gdzie } \bar{s}_j = \frac{1}{s_j} \right),$$

czyli

$$(z - s_j)^{2k_j} = (-zs_j)^{k_j} (z - s_j)^{k_j} \left( \frac{1}{z} - \bar{s}_j \right)^{k_j}.$$

Podobnie

$$\left( z - \frac{1}{\bar{r}_i} \right) = \frac{-z}{\bar{r}_i} \left( \frac{1}{z} - \bar{r}_i \right),$$

czyli

$$\begin{aligned} P(z) &= A \prod_{i=1}^l \left( \frac{-z}{\bar{r}_i} \right)^{n_i} \prod_{i=1}^l (z - r_i)^{n_i} \left( \frac{1}{z} - \bar{r}_i \right)^{n_i} \prod_{j=1}^p (-zs_j)^{k_j} \prod_{j=1}^p (z - s_j)^{k_j} \left( \frac{1}{z} - \bar{s}_j \right)^{k_j} \\ &= B z^{n_1 + \dots + n_l + k_1 + \dots + k_p} \prod_{i=1}^l (z - r_i)^{n_i} \left( \frac{1}{z} - \bar{r}_i \right)^{n_i} \prod_{j=1}^p (z - s_j)^{k_j} \left( \frac{1}{z} - \bar{s}_j \right)^{k_j} \end{aligned}$$

gdzie  $n_1 + \dots + n_l + k_1 + \dots + k_p$  jest połową sumy krotności wszystkich pierwiastków wielomianu  $P(z)$ , czyli połową stopnia  $P(z)$

$$n_1 + \dots + n_l + k_1 + \dots + k_p = \frac{2M}{M} = M.$$

Mamy więc

$$P(z) = z^M B \prod_{i=1}^l (z - r_i)^{n_i} \left( \frac{1}{z} - \bar{r}_i \right)^{n_i} \prod_{j=1}^p (z - s_j)^{k_j} \left( \frac{1}{z} - \bar{s}_j \right)^{k_j}.$$

Dla  $z$  na okręgu jednostkowym  $z = e^{i\xi}$  mamy więc

$$g(\xi) = B \prod_{i=1}^l (e^{i\xi} - r_i)^{n_i} \left( \frac{1}{e^{i\xi}} - \bar{r}_i \right)^{n_i} \prod_{j=1}^p (e^{i\xi} - s_j)^{k_j} \left( \frac{1}{e^{i\xi}} - \bar{s}_j \right)^{k_j},$$

ale  $1/e^{i\xi} = e^{-i\xi} = \overline{e^{i\xi}}$ , czyli

$$g(\xi) = B \prod_{i=1}^l |e^{i\xi} - r_i|^{2n_i} \prod_{j=1}^p |e^{i\xi} - s_j|^{2k_j}.$$

Ponieważ  $g(\xi) \geq 0$ , więc  $B \geq 0$ . Niech więc

$$m_0(\xi) = \sqrt{B} \prod_{i=1}^l (e^{-i\xi} - \bar{r}_i)^{n_i} \prod_{j=1}^p (e^{-i\xi} - \bar{s}_j)^{k_j}.$$

Zauważmy jeszcze na koniec, że znalezienie  $m_0$  wymaga rozłożenia wielomianu  $P(z)$  na czynniki liniowe. Często jest to robione numerycznie.  $\square$

**Uwaga 5.15.** Dla  $k = 0, 1, 2, \dots$  skonstruowaliśmy filtry  $g_k(\xi)$ , spełniające warunki powyższego twierdzenia z  $M = 2k + 1$ . Filtry  $m_0(\xi)$  które otrzymujemy z powyższego twierdzenia są więc postaci

$$m_0(\xi) = \sum_{n=0}^{2k+1} h_n e^{-in\xi}. \quad (5.61)$$

Są to standardowe filtry Daubechies, które służą do konstrukcji standardowych falek Daubechies. Korzystając z (5.61) i uwagi po dowodzie Twierdzenia 5.12 mamy, że dla ustalonego  $k$  (odpowiada to filtrowi długości  $2k + 2$ ) nośnik funkcji skalującej  $\varphi(x)$  zawiera się w przedziale  $[0, 2k + 1]$ , a nośnik falki  $\psi(x)$  zawiera się w przedziale  $[-k, k + 1]$ .

**Przykłady:** Policzmy współczynniki filtrów Daubechies długości 2 i 4. W przypadku filtrów Daubechies rozkład wielomianu  $P(z)$  jest trochę łatwiejszy. Wielomiany  $g_k(\xi)$  które skonstruowaliśmy mają pierwiastek rzędu  $k + 2$  w  $\pi$ , a więc wielomian  $P(z)$  ma pierwiastek rzędu co najmniej  $k + 2$  w  $-1$ . Niech  $k = 0$ .

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^\pi \sin(t) dt = 2, \\ g_0(\xi) &= 1 - \frac{1}{2} \int_0^\xi \sin(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\xi) = \frac{1}{4} e^{-i\xi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{i\xi} \\ P(z) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} z + \frac{1}{4} z^2 = \frac{1}{4} (z + 1)^2. \end{aligned}$$

$P(z)$  ma 1 podwójny pierwiastek na okręgu jednostkowym,  $z = -1$ , czyli  $l = 0$ ,  $p = 1$ ,  $k_1 = 2$ . Otrzymujemy

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2} (e^{-i\xi} + 1) = e^{-i\xi/2} \cos(\xi/2), \quad h_0 = h_1 = \frac{1}{2}, \quad h_k = 0, \quad k \neq 0, 1.$$

To jest filtr dolnoprzepustowy analizy Haara, który jest także najkrótszym z filtrów Daubechies.

Niech  $k = 1$ . Mamy

$$c_1 = \int_0^\pi \sin^3(t) dt = \frac{4}{3},$$

$$g_1(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cos(\xi) - \frac{1}{4} \cos^3(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{9}{16} \cos(\xi) - \frac{1}{16} \cos(3\xi),$$

$$P(z) = -\frac{1}{32} + \frac{9}{32} z^2 + \frac{1}{2} z^3 + \frac{9}{32} z^4 - \frac{1}{32} z^6.$$

Łatwo zauważyć, że  $P(z)$  ma pierwiastki rzeczywiste, na okręgu jednostkowym jest pierwiastek  $-1$  krotności 4, oraz poza okręgiem jednostkowym pierwiastki  $2 + \sqrt{3}$  i  $2 - \sqrt{3}$ . W naszych oznaczeniach  $l = 1$ ,  $n_1 = 1$ ,  $p = 1$ ,  $k_1 = 4$ . Otrzymujemy następujący wzór

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{32(2 + \sqrt{3})}} \left( -(2 + \sqrt{3}) - (3 + 2\sqrt{3}) e^{-i\xi} - \sqrt{3} e^{-i2\xi} + e^{-i3\xi} \right).$$

W literaturze współczynniki filtrów podaje się najczęściej pomnożone przez  $\sqrt{2}$ . Jak zobaczymy w następnym rozdziale w ten sposób oszczędza się mnożenie przez ten pierwiastek a algorytmie obliczeniowym.

Funkcji skalujących i falek odpowiadających filtrom Daubechies nie da się zapisać żadnym rozsądnym wzorem. Natomiast istnieje metoda numerycznego generowania ich przybliżonych wykresów. Jest to tak zwany algorytm kaskadowy, który opiszemy w następnym rozdziale.

## Falki w wymiarze $n > 1$

W  $\mathbb{R}^n$  baza falkowa ma postać

$$\left\{ 2^{\frac{jn}{2}} \psi^l(2^j x - \mathbf{n}); \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n, j \in \mathbb{Z}, l = 1, \dots, 2^n - 1 \right\} \quad (5.62)$$

Na przykład, w wymiarze  $n = 2$  baza falkowa generowana jest przez 3 falki. Dla  $\mathbb{R}^n$  można zdefiniować pojęcie analizy wielorozdzielczej MRA i przeprowadzić konstrukcję falek w sposób zupełnie analogiczny do konstrukcji w przypadku  $n = 1$ . Postępując tak zauważylibyśmy, że w sposób naturalny pojawia się  $2^n - 1$  filtrów górnoprzepustowych, przy minimalnych założeniach o regularności funkcji skalującej. Analizę wielorozdzielczą i związane z nią falki w wielu wymiarach można skonstruować używając analizy jednowymiarowej. Mając analizę w  $L^2(\mathbb{R})$  z funkcją skalującą  $\varphi(x)$  i falką  $\psi(x)$  możemy

zdefiniować funkcję skalującą  $\Phi(x, y)$  i falki  $\Psi^l(x, y)$ ,  $l = 1, 2, 3$  w  $L^2(\mathbb{R}^2)$  wzorami

$$\Phi(x, y) = \varphi(x) \varphi(y), \Psi^1(x, y) = \varphi(x) \psi(y), \Psi^2(x, y) = \psi(x) \varphi(y), \Psi^3(x, y) = \psi(x) \psi(y). \quad (5.63)$$

Sformułowanie definicji MRA w  $L^2(\mathbb{R}^2)$  i sprawdzenie, że funkcje (5.63) spełniają wszystkie warunki tej definicji zostawiamy jako ćwiczenie.

**Uwagi 5.16.** (i) w (5.62) zastosowaliśmy zamianę skali w postaci macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

Bazy falkowe można generować również używając innych macierzy  $A$ , w których, na przykład, rozciągnięcie połączone jest z jakimś obrotem.

(ii) Bazy falkowe o zmiennych rozdzielonych takie, jak we wzorze (5.63) to tylko jeden szczególny rodzaj baz falkowych w wielu wymiarach. Często stosuje się bazy w których poszczególne falki mają szczególny kształt. Takie falki są użyteczne w wychwytywaniu w sygnale elementów o tego typu kształcie.

# Rozdział 6

## Algorytmy Numeryczne

### Algorytm Mallata

Algorytm Mallata jest podstawą dyskretnej transformaty falkowej (dyskretnej, to znaczy transformaty sygnałów będących ciągami próbek). Algorytm pozwala w sposób efektywny numerycznie obliczać współczynniki bazowe sygnału w jednej bazie na podstawie współczynników w innej bazie. Opiszemy teraz o jakie bazy chodzi.

Przypomnijmy, że dla danej analizy MRA i dowolnego  $j \in \mathbb{Z}$  przestrzeń  $V_j$  rozkłada się jako ortogonalna suma prosta podprzestrzeni

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}.$$

Zauważmy, że zgodnie z tym, co wiemy o analizie wielorozdzielczej, w przestrzeni  $V_j$  mamy bazę ortonormalną

$$\{\varphi_{j,n}(x); n \in \mathbb{Z}\}, \quad (6.1)$$

gdzie  $\varphi$  jest funkcją skalującą analizy. Dla  $j = 0$  jest to część definicji analizy wielorozdzielczej, dla pozostałych  $j \in \mathbb{Z}$  wynika z zamiany zmiennych  $x \mapsto 2^j x$ . Ponieważ  $j$  jest dowolne, to także w przestrzeni  $V_{j-1}$  mamy bazę o. n.

$$\{\varphi_{j-1,n}(x); n \in \mathbb{Z}\}.$$

W przestrzeni  $W_{j-1}$  mamy z kolei bazę o. n.

$$\{\psi_{j-1,n}(x); n \in \mathbb{Z}\},$$

gdzie  $\psi$  jest falką związaną z naszą analizą wielorozdzielczą. Przypomnijmy, że używamy następujących oznaczeń

$$\varphi_{j,n}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - n), \quad \psi_{j,n}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - n).$$

W przestrzeni  $V_j$  mamy więc do dyspozycji dwie różne bazy o. n., bazę (6.1), oraz bazę

$$\{\varphi_{j-1,n}(x), \psi_{j-1,n}(x); n \in \mathbb{Z}\}. \quad (6.2)$$

Algorytm Mallata pozwala obliczać współczynniki sygnału w jednej z tych baz przy pomocy współczynników w drugiej.

Niech  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , i wprowadźmy następujące oznaczenia na ciągi współczynników  $f$  w różnych bazach. Niech  $j \in \mathbb{Z}$  będzie dowolne, i niech

$$a_j(n) = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle, \quad d_j(n) = \langle f, \psi_{j,n} \rangle, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6.3)$$

Przypomnijmy, że  $\{h_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  i  $\{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  oznaczają filtry dolno- i górnoprzepustowy analizy wielorozdzielczej. Następujące twierdzenie przedstawia algorytm.

**Twierdzenie 6.1** (Mallat). *Transformata:*

$$\begin{aligned} a_{j-1}(k) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{h_{n-2k}} a_j(n), \\ d_{j-1}(k) &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{g_{n-2k}} a_j(n). \end{aligned} \quad (6.4)$$

*Transformata odwrotna:*

$$a_j(n) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-2k} a_{j-1}(k) + \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{n-2k} a_{j-1}(k). \quad (6.5)$$

**Uwaga 6.2.** (a) *Zauważmy, że algorytm odwołuje się tylko do filtrów dolno- i górnoprzepustowego. Same wartości funkcji  $\varphi$  i  $\psi$  nigdzie nie są potrzebne. Zauważmy też, że wzory powyższe są tym efektywniejsze numerycznie, im krótsze są filtry, a jeżeli są nieskończone to im szybciej maleją.*

(b) *Zwróćmy uwagę na współczynniki  $\sqrt{2}$  występujące w powyższych wzorach. W praktyce po prostu filtry  $\{h_n\}$  i  $\{g_n\}$  normalizuje się w ten sposób, że  $\sqrt{2}$  jest już w nich zawarte. Oszczędza się w ten sposób ciągłego mnożenia przez ten współczynnik. Filtry Daubechies generowane przez polecenie `daubcwf()` pakietu `RWT` są właśnie tak znormalizowane, na przykład filtr Haara to  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ , a nie, tak jak na naszym wykładzie  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .*

*Dowód (twierdzenia Mallata).* Przypomnijmy wzory

$$\begin{aligned} h_n &= \left\langle \frac{1}{2} \varphi \left( \frac{\cdot}{2} \right), \varphi(\cdot - n) \right\rangle, \\ g_n &= \left\langle \frac{1}{2} \psi \left( \frac{\cdot}{2} \right), \varphi(\cdot - n) \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.6)$$



Liczba całkowita  $n$  jest dowolna, więc w pierwszym ze wzorów (6.6) wpiszmy w jej miejsce  $n - 2l$ , gdzie  $n, l \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned}
h_{n-2l} &= \left\langle \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{\cdot}{2}\right), \varphi(\cdot - (n - 2l)) \right\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \overline{\varphi(x - n + 2l)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{x - 2l}{2}\right) \overline{\varphi(x - n)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{x}{2} - l\right) \overline{\varphi(x - n)} dx.
\end{aligned}$$

Dokonujemy zamiany zmiennych  $x \mapsto 2^j x$ . Granice całkowania nie zmieniają się

$$\begin{aligned}
h_{n-2l} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \varphi(2^{j-1}x - l) \overline{\varphi(2^j x - n)} 2^j dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} 2^{\frac{j-1}{2}} \varphi(2^{j-1}x - l) 2^{\frac{j}{2}} \overline{\varphi(2^j x - n)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{j-1,l}(x) \overline{\varphi_{j,n}(x)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \varphi_{j-1,l}, \varphi_{j,n} \rangle.
\end{aligned}$$

Podobnie wyprowadzamy wzór dla  $g_{n-2l}$  i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} h_{n-2l} &= \langle \varphi_{j-1,l}, \varphi_{j,n} \rangle, \\
\sqrt{2} g_{n-2l} &= \langle \psi_{j-1,l}, \varphi_{j,n} \rangle.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Obliczyliśmy współczynniki bazowe funkcji  $\varphi_{j-1,l}$  i  $\psi_{j-1,l}$  w bazie (6.1), więc funkcje te mają rozwinięcia

$$\begin{aligned}
\varphi_{j-1,l} &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{n-2l} \varphi_{j,n}, \\
\psi_{j-1,l} &= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{n-2l} \varphi_{j,n}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Wzory te wstawiamy do definicji naszych ciągów

$$\begin{aligned}
a_{j-1}(k) &= \langle f, \varphi_{j-1,k} \rangle \\
&= \left\langle f, \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{n-2k} \varphi_{j,n} \right\rangle \\
&= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{h_{n-2k}} \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \\
&= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{h_{n-2k}} a_j(n).
\end{aligned}$$

Podobnie obliczamy  $d_{j-1}(k)$ . W ten sposób pokazaliśmy pierwszą część twierdzenia.

Wzory (6.7) możemy też potraktować jako wzory na współczynniki bazowe funkcji  $\varphi_{j,n} \in V_j$  w bazie (6.2). W takim razie

$$\begin{aligned}
\varphi_{j,n} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \varphi_{j,n}, \varphi_{j-1,k} \rangle \varphi_{j-1,k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \varphi_{j,n}, \psi_{j-1,k} \rangle \psi_{j-1,k} \\
&= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{h_{n-2k}} \varphi_{j-1,k} + \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{g_{n-2k}} \psi_{j-1,k}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Możemy więc obliczyć współczynniki bazowe  $f$

$$\begin{aligned}
a_j(n) &= \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \\
&= \left\langle f, \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{h_{n-2k}} \varphi_{j-1,k} + \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{g_{n-2k}} \psi_{j-1,k} \right\rangle \\
&= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-2k} \langle f, \varphi_{j-1,k} \rangle + \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{n-2k} \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle \\
&= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-2k} a_{j-1}(k) + \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{n-2k} d_{j-1}(k),
\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Przyjrzyjmy się wzorom. Niech ciągi  $\{\tilde{h}_n\}$  i  $\{\tilde{g}_n\}$  mają współczynniki

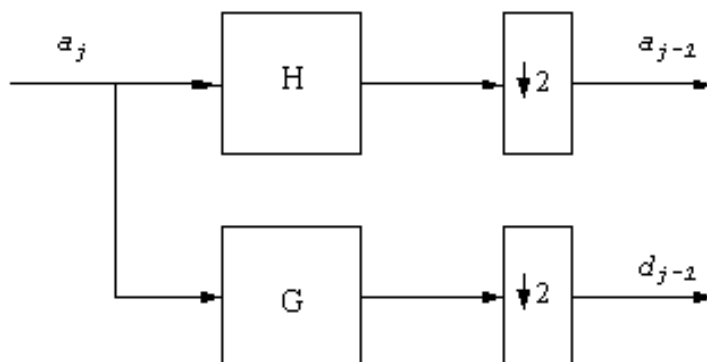
$$\tilde{h}_n = \overline{h_{-n}}, \quad \tilde{g}_n = \overline{g_{-n}}.$$

Wtedy, zgodnie z twierdzeniem Mallata

$$a_{j-1}(k) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_{2k-n} a_j(n) = \sqrt{2} (\tilde{h} * a_j)(2k),$$

$$d_{j-1}(k) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{2k-n} a_j(n) = \sqrt{2} (\tilde{g} * a_j)(2k).$$

Obliczenie ciągów  $a_{j-1}$  i  $d_{j-1}$  sprowadza się więc do sploty wyjściowego ciągu  $a_j$  z ciągami  $\tilde{h}$  i  $\tilde{g}$ , a następnie wybrania co drugiego elementu powstałych ciągów (i pomnożenia przez  $\sqrt{2}$ ). Odrzucenie co drugiego wyrazu po angielsku nazywa się *downsampling*. W teorii przetwarzania sygnału operacje na sygnale często opisuje się przy pomocy schematów blokowych. Naszą operację możemy przedstawić schematycznie następująco (operatory  $H$  i  $G$  to sploty z filtrami  $\{\tilde{h}_n\}$  i  $\{\tilde{g}_n\}$ , oraz pomnożenie przez  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ )



Rysunek 6.1: Jeden krok dyskretnej transformaty falkowej.

Podobnie przyjrzyjmy się drugiej części twierdzenia Mallata. Wprowadźmy następujące oznaczenie. Jeżeli dany jest ciąg  $\{\alpha_n\}$ , to przez  $\{\alpha'_n\}$  oznaczamy jego „rozrzedzenie”:

$$\alpha'_n = \begin{cases} \alpha_{n/2} & : n - \text{parzyste} \\ 0 & : n - \text{nieparzyste.} \end{cases}$$

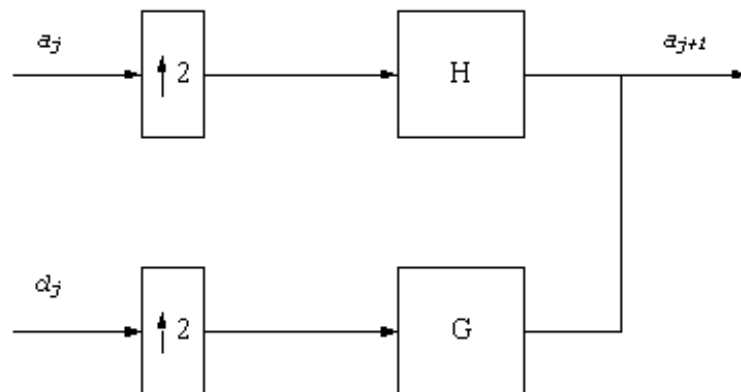
Ciąg  $\{\alpha_n\}$  został więc „przepleciony” zerami:

$$\dots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots \quad \Rightarrow \quad \dots, \alpha_{-1}, 0, \alpha_0, 0, \alpha_1, 0, \alpha_2, \dots$$

Wzór (6.5) można wtedy zapisać

$$\begin{aligned}
 a_j(n) &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-2k} a_{j-1}(k) + \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{n-2k} d_{j-1}(k) \\
 &= \sqrt{2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ parzyste}}}^{\infty} h_{n-k} a_{j-1}(k/2) + \sqrt{2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ parzyste}}}^{\infty} g_{n-k} d_{j-1}(k/2) \\
 &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{n-k} a'_{j-1}(k) + \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_{n-k} d'_{j-1}(k) \\
 &= \sqrt{2} (h * a'_{j-1})(k) + \sqrt{2} (g * d'_{j-1})(k).
 \end{aligned}$$

Zauważmy więc, że 1 krok odwrotnej transformaty falkowej sprowadza się najpierw do rozrzedzenia sygnałów wejściowych  $a_{j-1}$  i  $d_{j-1}$  (po angielsku *upsampling*), a następnie splotu każdego sygnału z odpowiednim ciągiem, i w końcu złożenia (sumy). Sploty są w zasadzie z tymi samymi ciągami co w transformacie. Odwrotną transformatę możemy przedstawić w postaci schematu blokowego (tutaj operatory  $H$  i  $G$  to sploty z filtrami  $\{h_n\}$  i  $\{g_n\}$ , oraz pomnożenie przez  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ )



Rysunek 6.2: Jeden krok odwrotnej dyskretnej transformaty falkowej.

## Sygnały dyskretne

Sygnały dyskretne to ciągi wartości  $\{f_n\}$ , skończone lub nie (tymczasem rozważamy sygnały 1-wymiarowe). Najczęściej taki ciąg wartości to ciąg próbek jakiegoś sygnału ciągłego, na przykład dźwięku. Analiza falkowa takiego sygnału polega wyborze analizy wielorozdzielczej (czyli wyborze falki),

następnie umieszczeniu tego sygnału w przestrzeni  $V_0$ , a następnie obliczeniu współczynników bazowych w bazie falkowej (ciągów  $\{d_j\}$ ). Numerycznie cały ten proces sprowadza się do prostego i szybkiego algorytmu rekurencyjnego, w którym wartości funkcji skalującej ani falki w ogóle się nie pojawiają. Jedynym elementem analizy wielorozdzielczej występującym w obliczeniach są filtry dolno- i górnoprzepustowy. Algorytm opiera się na twierdzeniu Mallata i nazywa się algorytmem Mallata. Niech naszym sygnałem będzie ciąg  $\{f_n\}$ . Wybrawszy analizę wielorozdzielczą przyporządkujemy sygnałowi funkcję  $f \in V_0$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \varphi(x - n). \quad (6.10)$$

Takie przyporządkowanie jest bardzo naturalne. Najczęściej wartości  $f_n$  są próbkami jakiejś ciągłej wartości fizycznej, pobieranymi w regularnych odstępach czasu. Czujnik pobierający próbkę z reguły pobierając ją dokonuje uśrednienia wartości w jakimś przedziale czasu. Cały proces pobrania próbek i przyporządkowania im elementu  $f \in V_0$  jest więc rzutem wyjściowego sygnału ciągłego na  $V_0$ . W sumie bardzo naturalna i łagodna operacja, jeżeli analizę wielorozdzielczą dobierzemy właściwie do charakteru badanego sygnału.

Dyskretna transformata falkowa dyskretnego sygnału  $\{f_n\}$  to zbiór współczynników bazowych

$$\{d_j(n) = \langle f, \psi_{j,n} \rangle; j, n \in \mathbb{Z}, j \leq -1\}. \quad (6.11)$$

Widzimy więc, że obliczenie transformaty sprowadza się do rekurencyjnego stosowania twierdzenia Mallata, z  $a_0 = \{f_n\}$ . Sygnał można odtworzyć z jego transformaty falkowej (6.11) stosując rekurencyjnie drugą część twierdzenia Mallata. W praktyce sygnał analizowany jest zawsze skończony i algorytm Mallata ma skończoną liczbę kroków.

## Sygnały skończone

W przypadku sygnału skończonego składającego się z  $N$  próbek

$$\{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$$

algorytm wygląda następująco. Algorytm ma zastosowanie do sygnałów, których długość jest potęgą 2, więc najpierw ewentualnie wydłużamy sygnał, poprzez dodanie zer, tak, aby jego długość była potęgą 2, niech  $N = 2^J$ . Następnie określamy wyjściowy ciąg  $a_0$ , jako  $N$ -perioodyzację sygnału:

$$a_0(n) = f_n, \quad n = 0, \dots, N - 1,$$

oraz

$$a_0(n + kN) = a_0(n), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Łatwo zauważyć, że zastosowanie 1 kroku transformaty falkowej do nam 2 ciągi

$$\{a_{-1}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty} \quad \text{i} \quad \{d_{-1}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty},$$

które są okresowe o okresach dwukrotnie krótszych

$$a_{-1}(n + N/2) = a_{-1}(n), \quad d_{-1}(n + N/2) = d_{-1}(n).$$

Wynika to wprost ze wzorów, na przykład

$$\begin{aligned} a_{-1}(n + N/2) &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{h_{k-2(n+N/2)}} a_0(k) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{h_{k-2n-N}} a_0(k) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{h_{k-2n}} a_0(k + N) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{h_{k-2n}} a_0(k) \\ &= a_{-1}(n). \end{aligned}$$

Ze względu na tą okresowość sygnały  $a_{-1}$  i  $d_{-1}$  są o połowę krótsze, bo wystarczy zapamiętywać tylko jeden okres każdego ciągu. Iterując procedurę, czyli stosując twierdzenie Mallata kolejno do ciągów  $a_j$  okresowych o coraz krótszych okresach, po  $J$  krokach uzyskujemy kompletną transformatę falkową wyjściowego sygnału  $\{f_0, \dots, f_{N-1}\}$ :

$$a_{-J}(0), d_{-J}(0), d_{-J+1}(0), d_{-J+1}(1), \dots, d_{-1}(0), \dots, d_{-1}(N/2 - 1).$$

Odwrotną transformatę obliczamy podobnie. Każdy ze skończonych ciągów  $d_j$  przedłużamy okresowo do ciągu nieskończonego, następnie stosujemy  $J$  razy twierdzenie Mallata. W każdym kroku rekonstruujemy ciąg  $a_j$ , o coraz dłuższym okresie.

## Algorytm kaskadowy

Przypomnijmy, że analizy wielorozdzielcze Daubechies, a, co za tym idzie, falki Daubechies skonstruowaliśmy konstruując odpowiednie filtry dolnoprzepustowe  $m_0$ . Dzięki własnościom tych konkretnych filtrów mogliśmy udowodnić ważne własności funkcji skalujących i falek, takie jak na przykład

ograniczony nośnik (to znaczy, że funkcje znikają poza skończonym przedziałem), oraz różniczkowalność. Wspominaliśmy, że funkcje skalujących i falek Daubechies nie da się zapisać żadnym jawnym wzorem (z wyjątkiem przypadku filtru długości 2, dla którego funkcje te są funkcjami Haara). Nie ma to znaczenia dla algorytmu Mallata, w którym występują tylko współczynniki filtrów. Bardzo łatwo można jednak obliczyć przybliżone wartości funkcji skalującej i falek, dla dowolnej analizy wielorozdzielczej, dla której te funkcje są wystarczająco regularne (czyli różniczkowalne odpowiednią ilość razy). Dzięki temu, na przykład, można narysować wykresy tych funkcji. Do przybliżonego obliczenia wartości służy tak zwany algorytm kaskadowy, oparty na algorytmie Mallata.

Zilustrujemy teraz algorytm kaskadowy, rysując wykresy funkcji skalujących i falek Daubechies. Funkcja skalująca Daubechies jest ciągła, ma ograniczony nośnik, oraz

$$1 = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx < \infty$$

(ograniczmy się do przypadku filtrów dłuższych niż 2). Mamy następujący fakt

**Fakt 6.3.** *Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest ciągła, to dla każdego  $x \in \mathbb{R}$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) 2^j \overline{\varphi(2^j y)} dy \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(x).$$

*Jeżeli  $f(x)$  jest ciągła jednostajnie, to zbieżność jest jednostajna, a jeżeli  $f(x)$  jest ciągła w sensie Höldera, czyli*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad \text{dla jakiegoś } 0 < \alpha \leq 1,$$

*to zbieżność jest wykładnicza*

$$\left| f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) 2^j \overline{\varphi(2^j y)} dy \right| \leq C' 2^{-j\alpha}.$$

*Dowód.* Niech  $[-R, R]$  będzie przedziałem, poza którym  $\varphi(x) \equiv 0$ . Na przykład, z Uwagi 5.13 wynika, że dla filtru o długości  $2k$  mamy  $R = 2k$ . Ustalmy  $x$  oraz  $\epsilon > 0$  i niech  $N \in \mathbb{N}$  będzie takie, że

$$\forall j \geq N \quad |y| < 2^{-j} R \Rightarrow |f(x) - f(x+y)| < \epsilon.$$

Dla  $j \geq N$  mamy wtedy oszacowanie

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) 2^j \overline{\varphi(2^j y)} dy \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f(x+y)) 2^j \overline{\varphi(2^j y)} dy \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x+y)| 2^j |\varphi(2^j y)| dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x+2^{-j}y)| |\varphi(y)| dy \\
&= \int_{-R}^R |f(x) - f(x+2^{-j}y)| |\varphi(y)| dy \\
&\leq \epsilon \int_{-R}^R |\varphi(y)| dy \\
&\leq C\epsilon,
\end{aligned}$$

gdzie

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(y)| dy.$$

Zauważmy, że wszystkie tezy faktu wynikają z powyższego oszacowania.  $\square$

Funkcja skalująca i falka Daubechies są różniczkowalne, a więc spełniają warunek Höldera z  $\alpha = 1$ . Zbieżność w powyższym falcie jest więc dla nich wykładnicza, czyli szybka. Niech  $x$  będzie liczbą diadyczną, czyli liczbą postaci  $x = 2^{-J}n$ ,  $J \in \mathbb{Z}$ . Wtedy

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \lim_{j \rightarrow \infty} 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-J}n + y) \overline{\varphi(2^j y)} dy \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) 2^{j/2} \overline{\varphi(2^j y - 2^{-J+j}n)} dy \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} 2^{j/2} \langle \varphi, \varphi_{j, 2^{-J+j}n} \rangle,
\end{aligned}$$

czyli, w punktach diadycznych  $2^{-J}n$ , dla odpowiednio dużego  $j \geq J$

$$\varphi(2^{-J}n) \simeq 2^{j/2} \langle \varphi, \varphi_{j, 2^{-J+j}n} \rangle = 2^{j/2} a_j(2^{j-J}n), \quad (6.12)$$

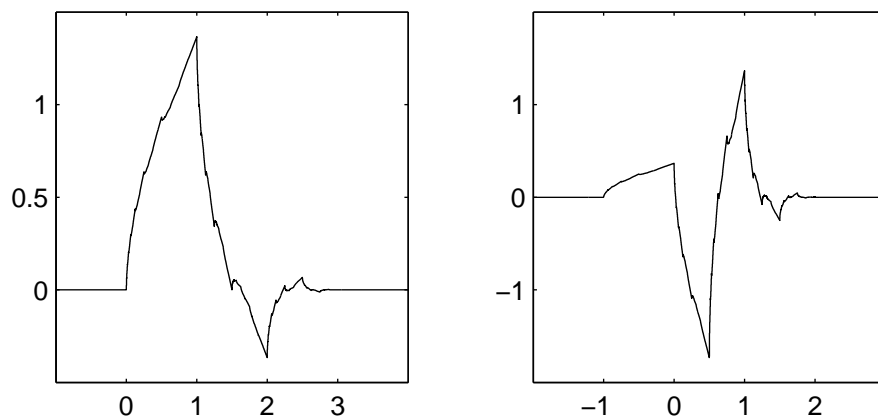
gdzie ciąg  $a_j$  z twierdzenia Mallata jest obliczony dla  $f = \varphi$ . Ciąg ten możemy obliczyć dla dowolnego  $j > 0$  korzystając z drugiej części twierdzenia Mallata. Wiemy, że dla  $f = \varphi$  ciąg  $a_0$  składa się z 1 w zerze i poza tym samych zer, a ciągi  $d_j$  składają się z samych zer, dla  $j \geq 0$ . Aby narysować wykres  $\varphi(x)$  postępujemy więc następująco. Wybieramy  $J \in \mathbb{Z}$  odpowiednio duże, w zależności od potrzebnej dokładności. Wartość  $J$  decyduje o tym, jak gęsta



jest siatka liczb postaci  $2^{-J}n$ , ale także o dokładności przybliżenia (6.12), w którym weźmiemy  $j = J$ . Następnie stosujemy twierdzenie Mallata  $J$  razy. Podobnie postępujemy w celu narysowania wykresu falek. Wychodzimy od ciągów

$$a_0(k) \equiv 0, \quad d_0(k) = \delta_0(k), \quad (\text{jedynka w } 0 \text{ i same } 0 \text{ poza tym}),$$

oraz  $d_j(k) \equiv 0$  dla  $j \geq 1$ . Następnie stosujemy twierdzenie Mallata  $J$  razy. Na obrazkach pokazujemy kilka przykładów. W każdym przypadku stosowaliśmy  $J = 15$ .



Rysunek 6.3: Funkcja skalująca i falka Daubechies, filtry długości 4.

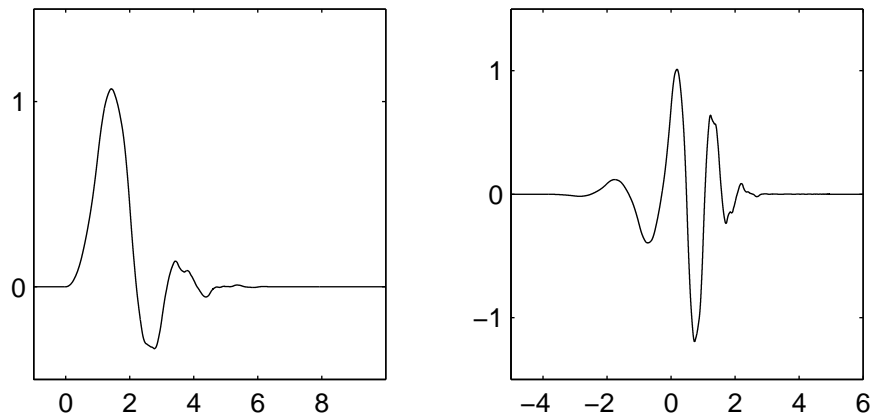
Wykresy funkcji skalujących zostały wygenerowane przy pomocy następującego skryptu w Matlabie. Należy wybrać  $N$  w 1 linijce (długość filtra), oraz  $J$  w linijce 5 (dokładność).

```
N=20; %długość filtra, musi być parzysta
A=-1; %lewy zakres wykresu funkcji skalującej, musi być ujemny
B=N; %prawy zakres wykresu funkcji skalującej, musi być > N-1
h=daubcwf(N);
J=15;
a=2^J*(N-1);
dx=2^(-J);
X=[floor(A):dx:floor(B)];
phi=zeros(1,size(X,2));
offset=-floor(A)/dx;
phi=zeros(1,a+1);
temp=zeros(1,a+1);
```

```

phi(1)=1;
for j=1:J
    temp=phi;
    for n=0:a
        c=0;
        par=n-2*floor(n/2);
        for l=par:2:N-1
            ind=(n-l)/2;
            if (ind>=0)\&(ind<=a)
                c=c+h(l+1)*temp(ind+1);
            end;
        end;
        phi(n+1)=c;
    end;
end;
for i=1:a+1
    phi1(offset+i)=phi(i);
end;
phi1=sqrt(2^J)*phi1;
plot(X,phi1,'black');

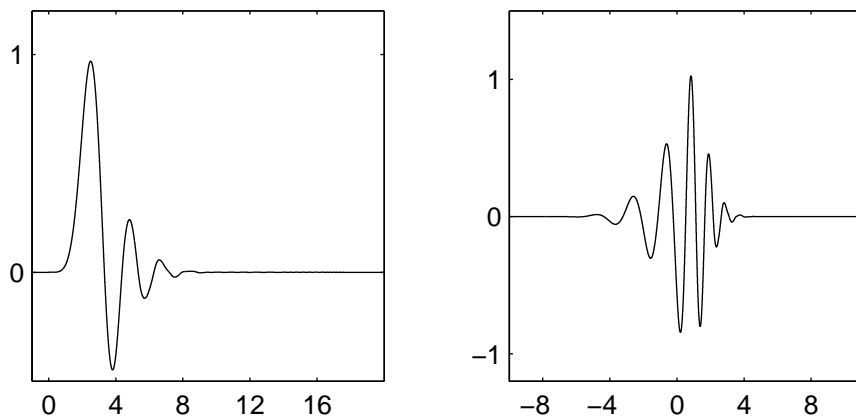
```



Rysunek 6.4: Funkcja skalująca i falka Daubechies, filtry długości 10.

## Próbkowanie i kwantyzacja

Sygnaly dyskretne (czyli skończone lub nieskończone ciągi wartości) w praktyce powstają jako wynik próbkowania sygnałów ciągłych. Naturalne pyta-



Rysunek 6.5: Funkcja skalująca i falka Daubechies, filtry długości 20.

nie, jakie się pojawia, to czy i w jakim stopniu taki ciąg próbek reprezentuje wyjściowy sygnał. Na przykład, czy i w jaki sposób sygnał ciągły można z takich próbek odtworzyć. Podstawowym twierdzeniem związanym z próbkowaniem jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 6.4** (Shannon-Whittaker). *Jeżeli funkcja  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ma ograniczone spektrum częstotliwościowe, to znaczy dla pewnego  $T_0$*

$$\hat{f}(\xi) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad \xi \notin [-T_0, T_0],$$

to funkcja ta jest całkowicie reprezentowana przez ciąg próbek (w jednakowych odstępach)  $\{f(np)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , jeżeli próbkowanie jest wystarczająco gęste, a dokładnie jeżeli  $p \leq \frac{\pi}{T_0}$ . Wartości funkcji można odtworzyć z próbek przy pomocy wzoru

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(np) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{p}x - \pi n\right), \quad (6.13)$$

gdzie funkcja interpolująca  $\operatorname{sinc}(\cdot)$  dana jest wzorem

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

**Uwagi:** (i) Zauważmy, że funkcja interpolująca

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{p}x - \pi n\right)$$

jest równa 0 w punktach postaci  $x = kp$ , dla  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq n$ , oraz jest równa 1 dla  $x = np$ . Od razu więc widać, że prawa strona (6.13) zgadza się z lewą w

punktach postaci  $kp$ , czyli prawa strona jest funkcją interpolującą wartości pomiędzy próbkami.

(ii) Powyższe twierdzenie mówi nam, że interpolacja wartości pomiędzy próbkami odtwarza funkcję wyjściową, jeżeli ta ma odpowiednio ograniczone spektrum częstotliwościowe. Większość funkcji występujących w praktyce jest tego typu, i dlatego twierdzenie Shannona-Whittakera jest ważne. Można jednak badać inne przestrzenie funkcji (na przykład *spliny*, dla których funkcja interpolująca, żeby odtwarzać dokładnie wyjściowy sygnał analogowy, musi mieć inną postać.

(iii) Ciekawe jest pytanie o odtwarzanie funkcji z próbek pobieranych nieregularnie. W tym przypadku również można udowodnić ważne twierdzenia wyjaśniające sprawę, i dające inżynierom praktyczne narzędzia.

(iv) Powyższe twierdzenie jest sformułowane w ten sposób, że podaje jak często trzeba próbkować sygnał wyjściowy, o spektrum częstotliwościowym ograniczonym do  $T_0$ , żeby móc sygnał odtworzyć. Można to przeformułować: jeżeli próbki pobierane są w odstępach  $p$ , to jaka jest maksymalna częstotliwość sygnału, która zostanie odtworzona bez zniekształceń. Jest to tak zwana częstotliwość Nyquista i, jak łatwo odczytać z twierdzenia Shannona-Whittakera, wynosi  $\frac{\pi}{p}$ . Uwaga: częstotliwość, o której mówimy tutaj, to w języku inżynierów tak zwana częstotliwość kołowa. Częstotliwość, którą najczęściej posługują się inżynierowie (czyli 1/okres) to nasza częstotliwość podzielona przez  $2\pi$ . W języku inżynierów częstotliwość Nyquista wynosi więc  $\frac{1}{2p}$ .

(v) Można zastanowić się, co się dzieje, jeżeli sygnał próbkowany jest za rzadko, w stosunku do zakresu swoich składowych częstotliwościowych. Prawa strona (6.13) jest wtedy zaledwie przybliżeniem lewej strony, a zniekształcenia (czyli błąd tego przybliżenia) mają charakterystyczną postać, i noszą nazwę *aliasingu*. Wrócimy jeszcze do zjawiska aliasingu.

*Dowód twierdzenia Shannona-Whittakera.* Załóżmy, że

$$\hat{f}(\xi) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad \xi \notin [-T_0, T_0],$$

Niech  $T \geq T_0$ , i niech funkcja pomocnicza  $g(\xi)$  będzie dana wzorem

$$g(\xi) = \hat{f}\left(\frac{T}{\pi}\xi\right), \quad \xi \in [-\pi, \pi],$$

a następnie tak zdefiniowaną w przedziale  $[-\pi, \pi]$  funkcję  $g$  przedłużamy jako okresową o okresie  $2\pi$  na całą prostą  $\mathbb{R}$ . Zauważmy, że  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . To proste,  $\hat{f}$  jest całkowalna z kwadratem na prostej, a więc też na przedziale

$[-T_0, T_0]$ , a całka kwadratu  $g$  na przedziale  $[-\pi, \pi]$  jest jej równa, po zamianie zmiennych. Funkcję  $g$  rozwijamy w szereg Fouriera

$$g(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) e^{in\xi}, \quad \text{w } L^2(\mathbb{T}),$$

a współczynniki Fouriera mają następującą postać:

$$\begin{aligned} \hat{g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) e^{-in\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}\left(\frac{T}{\pi} \xi\right) e^{-in\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{f}(\xi) e^{-in \frac{\pi}{T} \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-in \frac{\pi}{T} \xi} d\xi \\ &= \frac{\pi}{T} f\left(-n \frac{\pi}{T}\right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że wszystkie całki „po drodze” są absolutnie zbieżne, więc możemy skorzystać ze wzoru na odwrotną transformatę Fouriera. Wykorzystaliśmy też fakt, że  $\hat{f}$  jest zerem poza przedziałem  $[-T, T] \supseteq [-T_0, T_0]$ , więc całka z  $\hat{f}$  po przedziale  $[-T, T]$  i po całej prostej są sobie równe. Z definicji funkcji  $g$  mamy

$$\begin{aligned} \hat{f}\left(\frac{T}{\pi} \xi\right) &= g(\xi) \cdot \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi) e^{in\xi} \\ &= \frac{\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-n \frac{\pi}{T}\right) \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi) e^{in\xi}. \end{aligned}$$

W końcu obliczymy wartość  $f(x)$  wykorzystując odwrotną transformatę Fo-

uriera.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{T}{\pi}\xi\right) e^{ix\frac{T}{\pi}\xi} \frac{T}{\pi} d\xi \\
&= \frac{T}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi) e^{ix\frac{T}{\pi}\xi} d\xi \\
&= \frac{T}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{ik\xi + ix\frac{T}{\pi}\xi} d\xi \\
&= \frac{T}{2\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi(k+x\frac{T}{\pi})} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{\pi}{T}k\right) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi(k+x\frac{T}{\pi})} d\xi \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{T}k\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi(x\frac{T}{\pi}-k)} d\xi \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{T}k\right) \operatorname{sinc}\left(\pi\left(x\frac{T}{\pi}-k\right)\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{T}k\right) \operatorname{sinc}(Tx - \pi k)
\end{aligned}$$

Niech teraz  $p = \frac{\pi}{T}$ , i koniec dowodu. □

## Aliasing

Próbkowanie zamienia sygnał ciągłej zmiennej na ciąg dyskretnych wartości. Transformata Fouriera sygnału na prostej to funkcja na prostej, natomiast, jak wiemy, transformata Fouriera dyskretnego ciągu wartości to funkcja na prostej, okresowa o okresie  $2\pi$ . Zastanówmy się chwilę, jak te dwie transformaty są powiązane. Niech  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , i niech  $s_n = f(pn)$ , czyli  $\{s_n\}$  jest ciągiem próbek pobieranych w odstępach  $p > 0$ . Korzystając z odwrotnej

transformaty Fouriera (pomińmy szczegóły techniczne), mamy

$$\begin{aligned}
 s_n = f(p n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i p n \xi} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi p} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{1}{p} \xi\right) e^{i n \xi} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi p} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}\left(\frac{1}{p}(\xi + 2l\pi)\right) e^{i n \xi} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{p} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{1}{p}(\xi + 2l\pi)\right) e^{i n \xi} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{p} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{1}{p}(-\xi + 2l\pi)\right) e^{-i n \xi} d\xi.
 \end{aligned}$$

Próbki  $s_n$  są więc współczynnikami Fouriera funkcji  $2\pi$  okresowej

$$F(\xi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{1}{p}(-\xi + 2l\pi)\right),$$

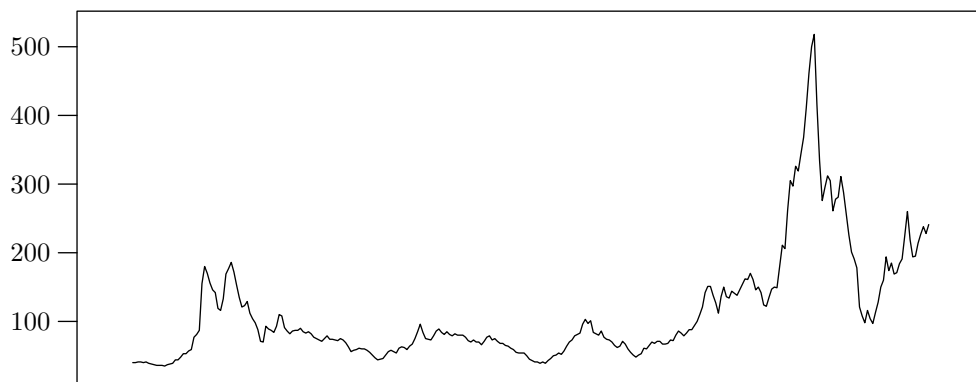
a więc suma szeregu Fouriera o współczynnikach  $s_n$  to funkcja  $F(\xi)$ . Mamy więc pierwszą obserwację: spektrum częstotliwościowe próbek funkcji  $f$  pobieranych w odstępach  $p$  to  $2\pi$  periodyzacja funkcji  $\frac{1}{p}\hat{f}\left(\frac{1}{p}\cdot\right)$ . Sens twierdzenia Shannona-Whittakera jest teraz jaśniejszy. Jeżeli  $\hat{f}\left(\frac{1}{p}\cdot\right)$  jest zerem poza  $[-\pi, \pi]$ , to periodyzacja nie zmienia  $\hat{f}$  na przedziale  $[-\pi, \pi]$ . Funkcję  $\hat{f}$  można „odzyskać” z  $F$  przez obcięcie do przedziału  $[-\pi, \pi]$ . Rozważmy teraz, jaki jest związek pomiędzy transformatą ciągu, a transformatą funkcji interpolowanej wzorem

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(np) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{p}x - \pi n\right).$$

# Rozdział 7

## Zastosowania falek

Na tym kursie będziemy sprawdzać w praktyce przydatność analizy falkowej w badaniu danych finansowych. Typowym przykładem będzie wykres ceny czegoś w czasie. Jest to sygnał jednowymiarowy, i będziemy szukać w nim składowych dużej skali czasowej (typu kilku lat), średniej skali czasowej (typu kilku miesięcy) i małej skali czasowej (typu dni). Składowe o dużej skali czasowej wiążą się ze zjawiskami o charakterze fundamentalnym, na przykład długoterminowy trend ceny jakiegoś metalu jest funkcją jego autentycznej wartości. Trend średnioterminowy wiąże się ze zjawiskami spekulacyjnymi, i przypuszczalnie ma korelację ze wskaźnikami dostępności pieniądza (stopami procentowymi). Krótkoterminowe zjawiska są często zupełnie przypadkowe. Wyodrębnienie takich składowych o różnej skali może służyć do szukania korelacji pomiędzy różnymi sygnałami. Na przykład w jaki sposób wysokość stóp procentowych związana jest z ceną różnych akcji czy surowców. Podstawą dalszej analizy jest zawsze rozkład sygnału w bazie falkowej.

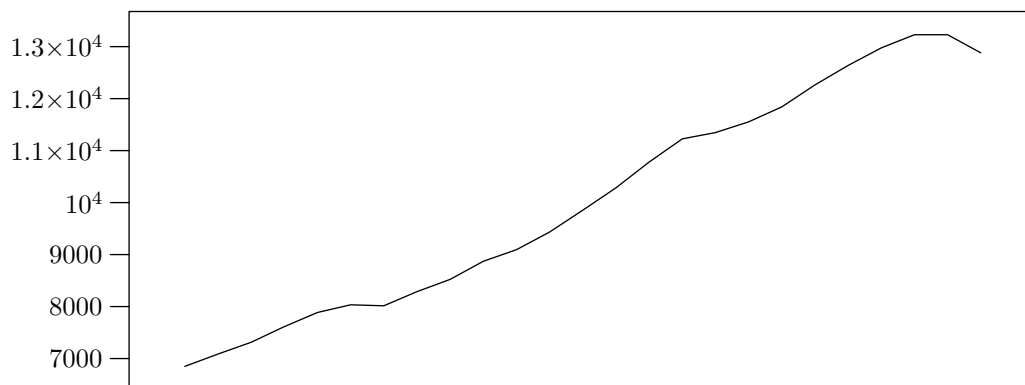


Rysunek 7.1: Cena niklu w ostatnich 25 latach (US\$/10kg).

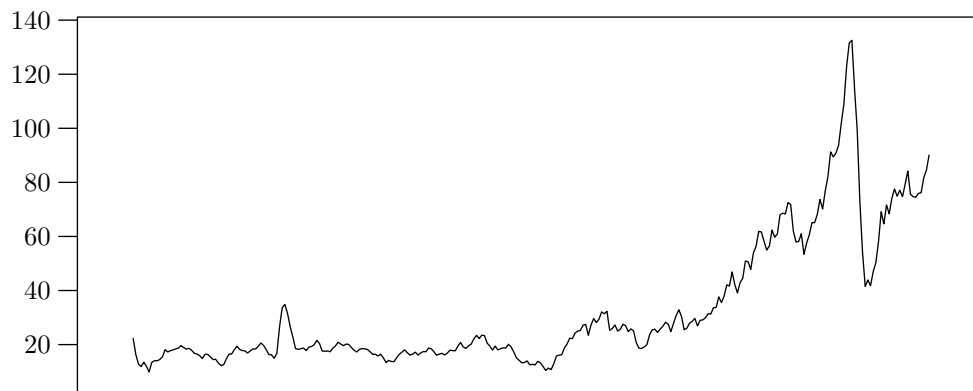


Analiza falkowa sygnału takiego jak na Rys. 7.1 sprowadza się do obliczania średniej biegnącej odpowiedniej długości, oraz składowych dopełniczych tej średniej.

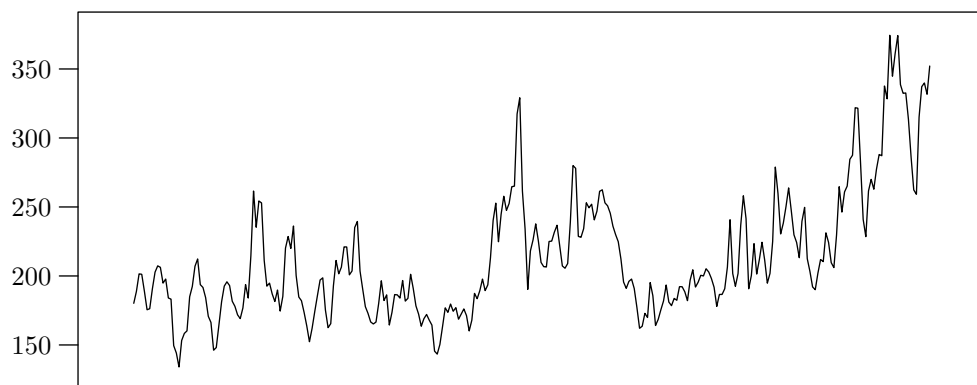
Drugim zagadnieniem, do badania którego zastosujemy analizę falkową jest zależność pomiędzy ceną i popytem. Każdy z sygnałów (ceny pewnego produktu i zużycie tego produktu) zostanie poddany analizie, i spróbujemy znaleźć korelacje pomiędzy współrzędnymi czasowo-skalowymi.



Rysunek 7.2: Amerykański produkt narodowy brutto w ostatnich 25 latach (mld. US\$ z 2005 r.).



Rysunek 7.3: Cena ropy naftowej w ostatnich 25 latach (US\$/baryłkę).



Rysunek 7.4: Cena herbaty w ostatnich 25 latach (US\$/t).

## Rozdział 8

# Materiały na laboratorium

### Odczytywanie, zapisywanie i wyświetlanie obrazków w Matlabie

Obrazki w postaci cyfrowej występują w kilku rodzajach. Są tak zwane formaty indeksowane, gdzie każdemu pikselowi (elementowi obrazu) przypisywana jest liczba (najczęściej 1 bajt) będąca numerem koloru na liście. Lista kolorów, tak zwana paleta, najczęściej składa się z 256 kolorów, które reprezentowane są przez 3 bajty, odpowiadające zawartości składowej czerwonej, zielonej i niebieskiej. Przykładami formatów indeksowanych są formaty `bmp` i `gif`. Format `gif` zawiera obraz oraz paletę w postaci skompresowanej (bezsstratnie). W tym formacie w jednym pliku obrazów może być kilka, i każdy może mieć własną paletę. Jeżeli obrazów jest kilka, to całość może być animowana. Jeden z kolorów może być zadeklarowany jako przezroczysty. Plik w formacie `bmp` zawiera obraz i paletę, najczęściej w postaci nieskompresowanej. Sam format dopuszcza prostą kompresję, ale w praktyce nie spotyka się skompresowanych plików w formacie `bmp`. Drugim rodzajem obrazów cyfrowych są obrazy w odcieniach szarości. Obrazy tego typu najczęściej zapisywane są w jednym z formatów indeksowanych, z użyciem standardowej palety. Standardowa paleta zawiera równomiernie rozłożone odcienie szarości (3 bajty kolorów składowych równe sobie), od koloru (0,0,0), czyli czerni (indeks 0) do (255,255,255), czyli bieli (indeks 255). Trzecim rodzajem obrazów cyfrowych są tak zwane obrazy *true color*, w których każdemu pikselowi bezpośredni przypisane są 3 bajty określające zawartość 3 kolorów składowych. Obrazy tego typu zapisywane są w formatach `tiff` (skompresowane bezstratnie) i `jpeg` (skompresowane stratnie).

W tym laboratorium będziemy zajmowali się obrazami drugiego typu, to znaczy obrazami w odcieniach szarości. Kolorowe obrazy indeksowane nie

mogą być sensownie przetwarzane przy pomocy stosowanych przez nas metod, ponieważ numery kolorów w palecie nie mają związku z własnościami „kolorystycznymi”. Innymi słowy, to, że dwa kolory mają bliskie sobie indeksy nie oznacza, że są do siebie podobne. Oczywiście kolorowy obrazek w formacie indeksowanym można najpierw przekształcić do formatu *true color* lub odcieni szarości, i wtedy obrabiać. Obrazki *true color* można przetwarzać traktując każdy kolor składowy (tak zwany kanał) jako oddzielny obrazek. Lepiej jest najpierw przekształcić kanały z tak zwanej przestrzeni RGB (kanały to składowe czerwone, zielone i niebieskie) do przestrzeni  $YC_bC_r$  (kanały to mieszanki kolorów składowych, przy czym  $Y$  to kanał luminancji, czyli najważniejsza składowa zawierająca odcienie szarości,  $C_b$  i  $C_r$  to kanały chrominancji, odpowiednio niebieski i czerwony). Przekształcenia pomiędzy przestrzeniami RGB i  $C_bC_r$  implementuje się przy pomocy konkretnej, odwracalnej macierzy  $3 \times 3$ . Być może starczy nam czasu na zajęcie się obrazkami kolorowymi, wtedy poznamy więcej szczegółów na temat zarządzania barwami.

Do wczytania obrazka służy funkcja `imread`. Jeżeli chcemy wczytać obraz `Lena.bmp`, który jest w bieżącym katalogu, wydajemy instrukcję

```
A=imread('Lena.bmp','bmp');
```

Powstaje w ten sposób macierz pikseli o wartościach od 0 do 255. Będziemy korzystali z formatów `gif` i `bmp`. Są to tak zwane formaty indeksowane, to znaczy wartość piksela jest numerem koloru w palecie. W obrazach z których będziemy korzystali paleta jest zawsze taka sama, standardowa. Składa się z 256 odcieni szarości, zmieniających się jednostajnie od czerni (pierwszy kolor palety, odpowiada mu indeks 0) do bieli (256 kolor, o indeksie 255). Jeżeli użyjemy innej palety to nasz obraz będzie miał zmienione kolory. Wczytując obrazek możemy wczytać też jego paletę, zakodowaną wraz z obrazkiem w pliku (dotyczy to, oczywiście formatów indeksowanych, takich jak `gif` lub `bmp`), wywołując funkcję `imread` w następujący sposób:

```
[A,MAP]=imread('goldhill.gif','gif');
```

Paleta obrazka składa się z trójek bajtów, reprezentujących intensywność kolorów czerwonego, zielonego i niebieskiego w skali od 0 do 255. Przy wczytywaniu do tablicy `MAP` (`MAP` jest tablicą 256 na 3, o wartościach typu `double`) te wartości są przeskalowane do zakresu  $[0,1]$ . Taki jest format używanej przez Matlab palety (tak zwanej `colormap`): dowolna ilość wierszy, 3 kolumny, i wartości typu `double` z przedziału  $[0,1]$ .

Otrzymana macierz pikseli `A` zawiera dane typu `uint8`. Niektórych obliczeń w Matlabie nie można wykonywać na liczbach typu `uint8` i najpierw trzeba je przekształcić do typu `double`.

```
B=double(A);
```

Podstawowe funkcje pakietu RWT, z którego będziemy korzystać nie mogą operować na danych typu `uint8`, więc nasze dane typu `uint8` zawsze będziemy przed obliczeniami przekształcać na `double`. To nic nie kosztuje. Zmieniany jest tylko typ danych, wartości pozostają bez zmian.

Do zapisu macierzy do pliku graficznego służy funkcja `imwrite`:

```
imwrite(A, 'lena.bmp', 'bmp');
```

Macierz `A` powinna być typu `uint8`. Można ją do tego typu przekształcić z dowolnego innego (na przykład `double`) używając funkcji `uint8`

```
A=uint8(B);
```

Funkcja `uint8` zaokrągla liczby `double` do najbliższej całkowitej, p czym obcina zakres do przedziału  $[0,255]$ . Jeżeli funkcję `imwrite` zastosujemy do tablicy o wartościach typu `double` to wartości zostaną najpierw pomnożone przez 255, a następnie przekształcone przy pomocy funkcji `uint8`. Wartości poniżej 0 przejdą na 0 a powyżej 1 na 255. Cały używany przez macierz `A` zakres wartości powinien więc się zawierać w przedziale  $[0,1]$ . Dlatego przed zapisem do pliku warto ręcznie obrobić wartości macierzy `A` tak, aby zawierały się w przedziale  $[0,1]$ . Na przykład, niech

$$M = \max_{i,j} A(i, j), \quad N = \min_{i,j} A(i, j),$$

i

$$A'(i, j) = \frac{A(i, j) - N}{M - N}.$$

Po takim przekształceniu wartości macierzy `A'` są w przedziale  $[0,1]$ , a ponieważ przekształcenie wartości jest liniowe więc obraz „graficznie” nie uległ zmianie. Wraz z macierzą do pliku zapisywana jest także standardowa paleta, składająca się z 256 równomiernie rozłożonych odcieni szarości (dotyczy to formatów indeksowanych, takich jak `bmp`). Jeżeli chcemy zapisać inną paletę możemy użyć instrukcji

```
imwrite(A,MAP, 'lena.bmp', 'bmp');
```

gdzie `MAP` jest dowolną `colormapą` Matlaba. Zostanie ona przeskalowana do formatu palety odpowiedniego pliku graficznego, ucięta do 256 wierszy jeżeli jest dłuższa, i uzupełniona wierszami zer, jeżeli jest krótsza niż 256 kolorów. Matlab nie zapisuje plików w formacie `gif`.

Macierz `A` można wyświetlić jako obraz nie zapisując jej do pliku graficznego. Służy do tego instrukcja `image`

```
image(A);
```

Wartości wyświetlanej macierzy  $A$  są traktowane jako indeksy do bieżącej colormapy Matlaba. Jeżeli są typu `uint8` to są bezpośrednio traktowane jako indeksy kolorów. Jeżeli są typu `double` to najpierw odejmowana jest od nich 1, następnie są zaokrąglane do najbliższej liczby całkowitej, a następnie obcinane na poziomie 0 i 255. Tak powstałe wartości są traktowane jako indeksy kolorów. Wygodną instrukcją jest też `imagesc`. Wartości tablicy  $A$  są najpierw przeskalowane liniowo, tak, żeby najmniejsza wartość (może być ujemna) przyjęła wartość 0 a największa 255. Tak otrzymane wartości są zaokrąglane w dół do liczb całkowitych, i traktowane jako indeksy kolorów bieżącej colormapy. Jeżeli chcemy przeskalować inaczej, możemy użyć składni

```
imagesc(A, [a, b]);
```

wtedy zakres  $[a, b]$  zostanie rozciągnięty liniowo do zakresu  $[0, 255]$ .

Do podglądu naszych obrazów będzie nam potrzebna standardowa colormapa, którą musimy sami wygenerować:

```
szara=zeros(256,3);  
for i=1:256  
    szara(i,1)=(i-1)/255;  
    szara(i,2)=szara(i,1);  
    szara(i,3)=szara(i,1);  
end;
```

Następnie ustalamy bieżącą colormapę instrukcją

```
colormap(szara);
```

Colormapa pozostaje ustalona dla danego okna obrazka aż do jego zamknięcia. Przy następnym otwarciu colormapę trzeba ustawić ponownie. Można najpierw załadować obrazek, a następnie wydać instrukcję `colormap`. Dopóki nie zamkniemy okna obrazka ta sama colormapa będzie stosowana do wszystkich kolejno ładowanych obrazków. Naszą colormapę *szara* możemy zachować w pliku instrukcją `save`, i na następnych zajęciach załadować z pliku instrukcją `load`. Matlab ma pewną ilość predefiniowanych colormap, jedną z nich jest colormapa domyślna. Zawiera ona tylko 64 kolory. W przypadku gdy ustalona colormapa ma mniej kolorów niż zakres wartości wyświetlanej macierzy  $A$ , to brakujące kolory są zastępowane czarnym. Obrazki w domyślnej colormapie są bardzo niewyraźne. Inne standardowe colormapy to `gray`, `hot`, `cool`, `copper` czy `pink`. Standardowe colormapy są z reguły krótsze niż 256

kolorów, ale każdej z powyższych nazw można użyć do wygenerowania colormapy dowolnej długości. Na przykład zamiast podanej powyżej procedury generowania colormapy „szara” można w Matlabie użyć instrukcji

```
szara=gray(256);
```

albo do ustawienia bieżącej colormapy instrukcji

```
colormap(gray(256));
```

## Podstawowe operacje na obrazkach

Wypróbujemy niektóre typowe przekształcenia na obrazkach. Niektóre z operacji występujących w przykładowych skryptach można w Matlabie wykonać prościej, wykorzystując wbudowane funkcje. Na przykład w Matlabie są specjalne funkcje zwracające największą i najmniejszą wartość współczynników tablicy. W prezentowanych skryptach raczej wszystko wykonywane jest „na piechotę”.

### Rozjaśnij

Zwiększamy wartość pikseli. Wartości powyżej 255 będą ucięte

```
A=imread('Lena.bmp','bmp');  
B=double(A);  
B=1.2*B;  
A=uint8(B);  
imwrite(A,'Lena2a.bmp','bmp');
```

### Przyciemnij

Zmniejszamy wartość pikseli:

```
A=imread('Lena.bmp','bmp');  
B=double(A);  
B=B/1.2;  
A=uint8(B);  
imwrite(A,'Lena2b.bmp','bmp');
```



Rysunek 8.1: Lekkie rozjaśnienie.



Rysunek 8.2: Lekkie przyciemnienie.

## Zwiększ kontrast

Znajdziemy największą i najmniejszą wartość pikseli. Następnie przekształcimy, liniowo, obraz tak, żeby najmniejsza wartość wynosiła 0 a największa 255. W ten sposób maksymalizujemy kontrast. Jeżeli kontrast był już maksymalny to operacja nie daje żadnego efektu.

```
A=imread('Lena.bmp','bmp');  
B=double(A);  
min=B(1,1);  
max=B(1,1);  
for i=1:512
```



```

for j=1:512
    if B(i,j)>max
        max=b(i,j);
    end;
    if B(i,j)<min
        min=B(i,j);
    end;
end;
end;
c=255/(max-min);
for i=1:512
    for j=1:512
        B(i,j)=(B(i,j)-min)*c;
    end;
end;
A=uint8(B);
imwrite(A,'Lena2c.bmp','bmp');

```



Rysunek 8.3: Zwiększony kontrast.

Częstą operacją jest korekta kontrastu tylko w pewnym zakresie jasności. Na przykład przekształcenie  $B(i, j) \mapsto B(i, j)^\gamma$  zwiększa kontrast w zakresie czerni jeżeli  $\gamma < 1$  i w zakresie jasnym, jeżeli  $\gamma > 1$  (obraz musi być wcześniej znormalizowany, tak aby  $0 \leq B(i, j) \leq 1$ ).

### Zmniejsz kontrast

Wartości pikseli pomnożymy przez 0.8 i dodamy do nich 25:

```

A=imread('Lena.bmp','bmp');
B=double(A);
for i=1:512
    for j=1:512
        B(i,j)=25+0.8*B(i,j);
    end;
end;
A=uint8(B);
imwrite(A,'Lena2d.bmp','bmp');

```



Rysunek 8.4: Zmniejszony kontrast.

## Binaryzacja

Każdemu pikselowi przyporządkowujemy wartość 0 jeżeli jego wartość jest poniżej progu i 255 jeżeli powyżej.

## Powiel obraz, używając odbicia

Rozszerzymy obraz w poziomie, uzupełniając prawą połówkę lustrzanym odbiciem lewej:

```

B=zeros(512,1024);
A=imread('Lena.bmp','bmp');
for i=1:512
    for j=1:512
        B(i,j)=A(i,j);

```



Rysunek 8.5: Binaryzacja na poziomach 50, 100, 150 i 200.

```

        B(i,1025-j)=A(i,j);
    end;
end;
A=uint8(B);
imwrite(A,'Lena2e.bmp','bmp');

```

## Wycięcie fragmentu

Wytniemy kwadratowy fragment obrazka, zastępując resztę białym tłem:

```

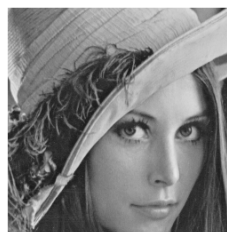
A=imread('Lena.bmp','bmp');
for i=1:128
    for j=1:128
        A(i,j)=255;
    end
end

```



Rysunek 8.6: Odbicie poziome.

```
A(513-i,j)=255;r  
A(j,i)=255;  
A(j,513-i)=255;  
end;  
end;  
imwrite(A,'Lena2f.bmp','bmp');
```



Rysunek 8.7: Wycięcie fragmentu.

## Wycięcie gładkie

Wytniemy kwadratowy kawałek obrazka, ale tym razem przejście do białego tła będzie płynne:

```
A=imread('Lena.bmp','bmp');
B=double(A);
mask=zeros(512,1);
for i=1:256
    if (i>108)\&(i<129)
        mask(i)=(i-108)/21;
        mask(513-i)=mask(i);
    end;
    if i>128
        mask(i)=1;
        mask(513-i)=1;
    end;
end;
for i=1:512
    for j=1:512
        B(i,j)=255-mask(i)*mask(j)*(255-B(i,j));
    end;
end;
A=uint8(B);
imwrite(A,'Lena2g.bmp','bmp');
```



Rysunek 8.8: Wycięcie fragmentu z gładkim przejściem do tła.

## Zaszumienie

Dodamy do obrazka tak zwany „biały szum”, to znaczy do każdego piksela niezależnie dodamy liczbę losową o rozkładzie normalnym o średniej 0 i jakimś odchyleniu. W Matlabie jest funkcja `randn` która generuje liczbę pseudolosową o rozkładzie normalnym (gaussowskim), o średniej 0 i odchyleniu standardowym 1. Można też użyć składowi `randn(512)`, która od razu generuje tablicę  $512 \times 512$  liczb pseudolosowych, niezależnych o tym samym rozkładzie. W naszym przykładzie tak wygenerowane liczby mnożymy przez 20, w ten sposób rozkład generowanych zmiennych ma odchylenie standardowe 20. Wielkość odchylenia jest związana ze stopniem zaszumienia. Takie zaszumienie symuluje zniekształcenie obrazka często występujące w praktyce, przy przesyłaniu sygnałów, lub przy rejestracji bardzo słabych sygnałów.

```
A=imread('Lena.bmp','bmp');
B=double(A);
for i=1:512
    for j=1:512
        B(i,j)=B(i,j)+20*randn;
    end;
end;
A=uint8(B);
imwrite(A,'Lena2h.bmp','bmp');
```



Rysunek 8.9: Zaszumienie obrazka,  $\sigma^2 = 20$ .

## Rozmycie

Obrazek zostaje rozmyty, pozbawiony ostrości. Jest to zabieg stosowany na przykład jako wstępna obróbka przed algorytmem wykrywania krawędzi. Efektem rozmycia jest osłabienie niektórych rodzajów szumu (na przykład szumu białego). Krawędzie też zostają osłabione (rozmyte), ale z reguły w mniejszym stopniu niż szum.

```
A=imread('Lena.bmp','bmp');
B=double(A);
C=zeros(512);
mask=[2 4 5 4 2;4 9 12 9 4;5 12 15 12 5;4 9 12 9 4;2 4 5 4 2];
mask=mask/159;
for i=1:512
    for j=1:512
        suma=0;
        for k=-2:2
            for l=-2:2
                if (i-k<513)\&(j-l<513)\&(i-k>0)\&(j-l>0)
                    prod=B(i-k,j-l);
                else
                    prod=0;
                end;
                suma=suma+mask(k+3,l+3)*prod;
            end;
        end;
        C(i,j)=suma;
    end;
end;
A=uint8(C);
imwrite(A,'Lena2i.bmp','bmp');
```

Dwa często stosowane filtry Gaussa (maski),  $3 \times 3$  i  $5 \times 5$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 5 & 12 & 15 & 12 & 5 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

filtry te należy podzielić przez sumę współczynników, odpowiednio 16 i 159.



Rysunek 8.10: Rozmycie filtrem Gaussa 5x5.



Rysunek 8.11: Rozmycie filtrem Gaussa 3x3.

## Filtr medianowy

Czasem chcielibyśmy osłabić szum w obrazku, ale bez ogólnego „zmiękczenia”. Można wtedy zastosować tak zwany filtr medianowy. Odczytujemy wartość piksela i jego sąsiadów (na przykład najbliższych sąsiadów). Tak otrzymane wartości sortujemy. Pikselowi przypisujemy wartość znajdującą się w środku posortowanej listy (jeżeli mamy parzystą liczbę wartości, to pikselowi przyporządkowujemy średnią arytmetyczną wartości w środku posortowanej listy). Filtr medianowy dobrze usuwa niektóre rodzaje szumu, na przykład tak zwany „speckle noise”, bez ogólnego „zmiękczenia” obrazka.

```
A=imread('Lena.bmp','bmp');
```



```

B=double(A);
C=zeros(512);
lista=zeros(9,1);
for i=2:511
    for j=2:511
        m=1;
        for k=-1:1
            for l=-1:1
                lista(m)=B(i+k,j+l);
                m=m+1;
            end;
        end;
        for k=1:8
            for l=1:9-k
                if lista(l)>lista(l+1)
                    t=lista(l);
                    lista(l)=lista(l+1);
                    lista(l+1)=t;
                end;
            end;
        end;
        C(i,j)=lista(5);
    end;
end;
A=uint8(C);
imwrite(A,'Lena2j.bmp','bmp');

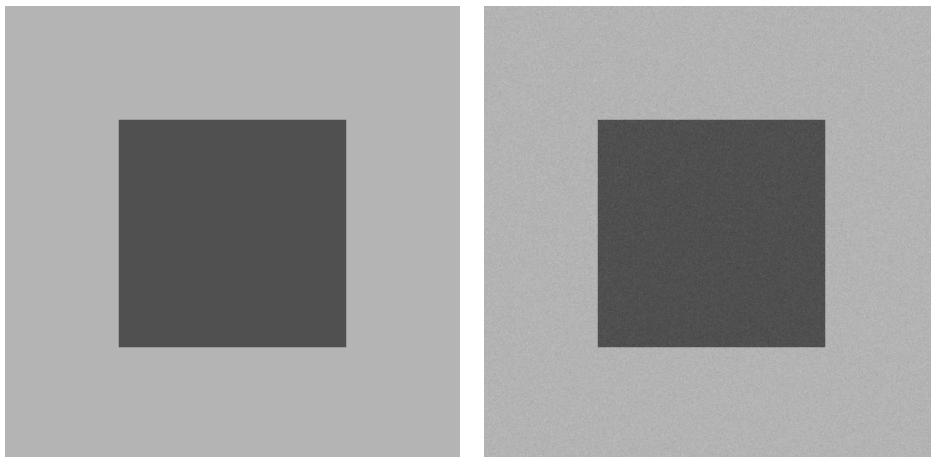
```

Zastosowanie filtru medianowego, podobnie jak filtru Gaussa daje efekt osłabienia szumu białego. Efekt ten najlepiej widać na obrazku kontrastowym. Obrazek `test` składa się z pikseli o wartości 80 i 180 (dosyć ciemne i dosyć jasne), i ma wyraźne krawędzie. Do obrazka dodajemy nieco szumu (odchylenie standardowe 5), a następnie stosujemy filtr Gaussa z maską  $5 \times 5$ , oraz filtr medianowy, też o głębokości  $5 \times 5$ . Na obrazkach możemy porównać efekty.

Oba filtry osłabiają szum, ale filtr Gaussa zmiękcza krawędzie, natomiast filtr medianowy pozostawia krawędzie nienaruszone, jedynie „obgryza” narożniki. Łatwo sobie wytłumaczyć jak to się dzieje.



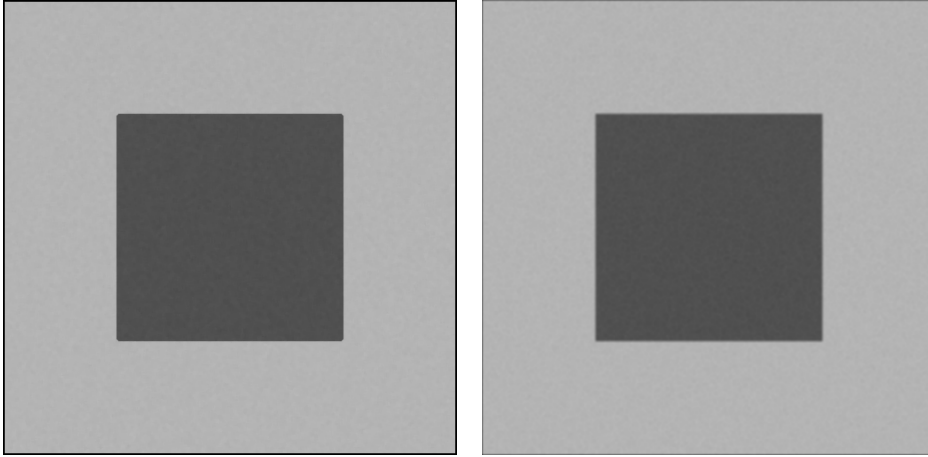
Rysunek 8.12: Filtr medianowy, obejmujący najbliższych sąsiadów.



Rysunek 8.13: Obraz testowy, bez szumu i z lekkim szumem,  $\sigma^2 = 5$ .

## Transformata Fouriera

Transformata Fouriera to jest nasze główne narzędzie na wykładzie. W praktycznej obróbce obrazków nie będziemy stosowali transformaty Fouriera. W praktyce lepsza jest transformata falkowa. Spróbujmy obliczyć transformatę Fouriera obrazka. W Matlabie są funkcje `fft` i `fft2` obliczające 1- i 2-wymiarową transformatę Fouriera, używające algorytmu szybkiej transformaty. Transformata ma wartości zespolone, nawet dla sygnałów, które mają wartości tylko rzeczywiste. Żeby zwizualizować transformatę osobno wyświetlimy tablicę modułów wartości, i osobno tablicę argumentów (faz) wartości. Do obliczania modułu używamy funkcji `abs(X)`, którą można stosować do



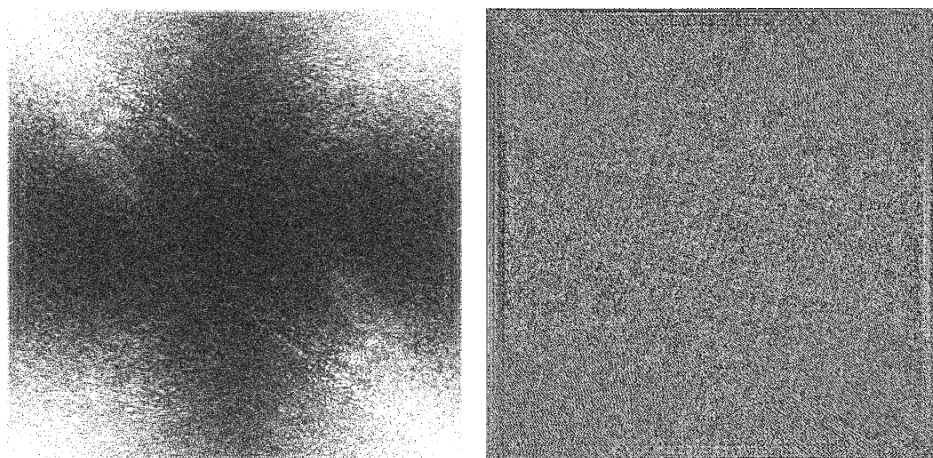
Rysunek 8.14: Z lewej zastosowano filtr medianowy, a z prawej filtr Gaussa, oba o wielkości  $5 \times 5$ .

zmiennych typu rzeczywistego i zespolonego, a do obliczania argumentu używamy funkcji `angle`, która zwraca argument jako kąt w zakresie  $(-\pi, \pi]$ .

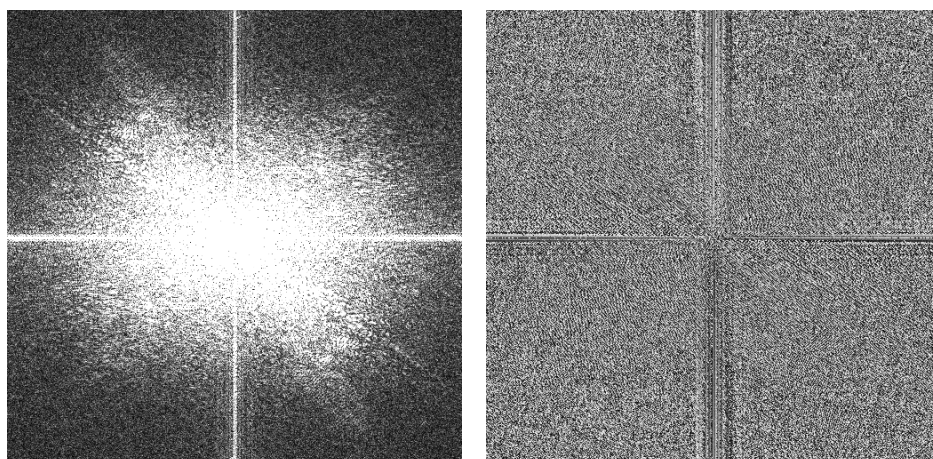
```
A=imread('Lena.bmp','bmp');
B=double(A);
C=fft2(B);
A=uint8(abs(C)/20);
imwrite(A,'Lena3a.bmp','bmp');
A=uint8((pi+angle(C))*128/pi);
imwrite(A,'Lena3b.bmp','bmp');
```

Na obrazku 3.1 współczynniki odpowiadające niskim częstotliwościom rozmieszczone są w rogach obrazka. Czasem obraz częstotliwościowy przedstawia się ze współczynnikami niskich częstotliwości umieszczonymi w centrum. W Matlabie jest specjalna funkcja do takiego przesunięcia obrazka `fftshift(C)`. Na obrazku 3.2 przedstawiona jest tak przesunięta transformata Fouriera.

Transformata Fouriera nie jest lokalna. To znaczy, że nawet jeżeli dwa obrazki różnią się tylko na jakimś małym obszarze, to ich transformaty różnią się wszędzie. Na obrazku 3.3 widzimy obraz Leny, z niewielką modyfikacją w okolicach środka. Obok przedstawiony jest obraz modułu różnicy transformaty Fouriera Leny zwykłej i zmodyfikowanej.



Rysunek 8.15: Moduł i argument transformaty Fouriera Leny.



Rysunek 8.16: Moduł i argument transformaty Fouriera, niskie częstotliwości w środku obrazka.

## Kodowanie pasmowe

Typowym przekształceniem obrazka jest tak zwane kodowanie pasmowe. Zerujemy te współczynniki transformaty Fouriera, które leżą w wybranych obszarach. Tradycyjnie różne obszary geometryczne transformaty Fouriera nazywają się pasmami, i stąd nazwa. Typowym przykładem kodowania pasmowego jest filtr dolnoprzepustowy. Zerujemy wszystkie współczynniki transformaty Fouriera, które leżą poza pewnym, powiedzmy kwadratowym otoczeniem początku układu. Fig. 3.4 pokazuje maskę przykładowego filtra dolnoprzepustowego, oraz przefiltrowany obraz. Obraz jest zupełnie dobrej



Rysunek 8.17: Lena z niewielką modyfikacją (prawe oko). Obok moduł różnicy transformaty Fouriera Leny zwykłej i zmodyfikowanej.

jakości, jeżeli wziąć pod uwagę, że został odtworzony z 12544 współczynników (pozostałe zostały wyzerowane), co stanowi ok. 4,78% całości. Jedyne co optycznie przeszkadza, to okresowo powielone, „drgające” krawędzie.



Rysunek 8.18: Maska filtru dolnoprzepustowego, i przekształcona Lena. Stopień kompresji. wynosi ok. 21 (obraz po prawej ma w rezultacie ok. 0,38 bita na piksel (bpp))

```
clear;
mask=zeros(512);
for i=200:311
```

```

    for j=200:311
        mask(i,j)=1;
    end
end;
A=imread('Lena.bmp','bmp');
B=double(A);
C=fft2(B);
C=fftshift(C);
C=mask.*C;
C=ifftshift(C);
B=ifft2(C);
A=uint8(abs(B));
imwrite(A,'low.bmp','bmp');
mask=255*mask;
A=uint8(mask);
imwrite(A,'mask.bmp','bmp');

```

## Rice Wavelet Toolbox

Naszym narzędziem do analizy falkowej obrazków jest darmowy toolbox falkowy (Rice wavelet toolbox) napisany przez grupę ludzi na uniwersytecie Rice. Można go znaleźć w sieci używając słowa kluczowego „rwt”. Będziemy używali następujących funkcji z tego pakietu: `mdwt` - transformata falkowa, `midwt` - odwrotna transformata falkowa oraz `daubcqf` - program generujący filtry falkowe Daubechies. Funkcje używamy następująco

```
h0=daubcqf(N);
```

lub

```
[h0,h1]=daubcqf(N);
```

$N$  jest długością filtru, musi być liczbą parzystą. Dłuższe filtry powinny dawać lepsze rezultaty, ale działają wolniej, i generują większe błędy zaokrągleń. Typowe długości to 2,6,10. Będziemy porównywać nasze algorytmy dla różnych długości filtrów. Uzyskane przy pomocy funkcji `daubcqf` filtry stanowią parametr transformaty falkowej i transformaty odwrotnej. Podajemy tylko współczynniki filtru  $h0$  (dolnoprzepustowego), Matlab sam wyliczy współczynniki pasującego filtru  $h1$ .

```
[B,L]=mdwt(A,h0,L);      [A,L]=midwt(B,h0,L);
```



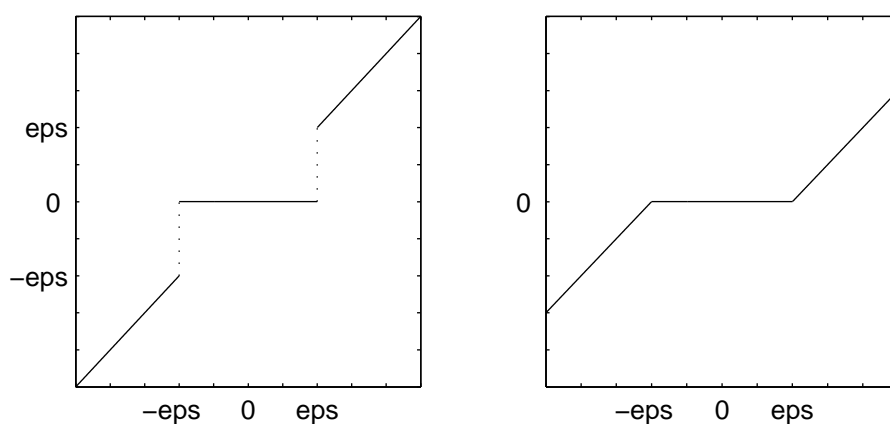
Rysunek 8.19: Transformata falkowa głębokości 1 i głębokości 9 (silnie rozjaśniona)

$A$  jest obrazkiem, który powinien być kwadratowy o boku będącym potęgą 2.  $L$  jest parametrem określającym głębokość transformaty. Wartość parametru  $L$  powinna być taka sama dla transformaty i transformaty odwrotnej — w przeciwnym razie obraz nie będzie prawidłowo zrekonstruowany. Wartość  $L$  może się zawierać w przedziale od 1 do  $\log_2 N$ , gdzie  $N$  jest długością (w pikselach) boku obrazu. Transformata `mdwt` i transformata odwrotna `midwt` wymagają danych typu `double`. Jeżeli zastosujemy ją do danych typu `uint8` (takich, jakie zwraca `imread`), to transformaty albo będą źle policzone, albo program się wysypie. Przetransformowany obraz możemy obejrzeć instrukcją `image`, pamiętając o ustawieniu odpowiedniej colormapy, i o ewentualnym przekształceniu zakresu wartości transformaty do przedziału  $[0,255]$ .

## Kompresja obrazów

Nasze podejście do kompresji będzie bardzo proste. Pierwsza obserwacja jest taka, że transformata falkowa obrazu jest prawie cała czarna. Większość współczynników (dla realistycznego obrazu, takiego jak fotografia) jest bardzo mała. Ustalimy sobie próg  $\epsilon$ , i wszystkie współczynniki o wartości bezwzględnej poniżej progu zmienimy na 0. W ten sposób w obrazku pozostanie niewiele niezerowych współczynników. Format obrazu z którym pracujemy (`.bmp`) nie kompresuje danych, więc efektów kompresji nie zauważymy w rozmiarze kompresowanego pliku. Dlatego będziemy obliczali stopień kompresji w sposób uproszczony. Każdy wyzerowany współczynnik policzymy, i na koniec podzielimy przez ilość wszystkich pikseli.

Zerowanie współczynników o wartościach poniżej ustalonego progu będziemy nazywać progowaniem (po angielsku „thresholding”). Będziemy rozważać dwa rodzaje progowania, tak zwane progowanie twarde i progowanie miękkie. Różnicę objaśniają wykresy funkcji progujących. Programowanie twarde jest koncepcyjnie prostsze, ale wprowadza do obrazka sztuczne nieciągłości. Z kolei progowanie miękkie obniża kontrast transformaty, i w przypadku wysokich progów należy kontrast wyrównać przed zastosowaniem transformaty odwrotnej.



Rysunek 8.20: Progowanie twarde i miękkie

Będziemy porównywać subiektywną, optyczną jakość obrazów skompresowanych filtrami Daubechies różnej długości, o różnym stopniu kompresji, i skompresowanych z użyciem obu metod progowania. Przykładowe procedury mogą więc być następujące.

```
A=imread('Lena.bmp','bmp');
A=double(A);
N=6;% 2,10 itp
h0=daubcwf(N);
L=9;
[B,L]=mdwt(A,h0,L);
eps=50;% 30, 100 itp
il=0;
for i=1:512
    for j=1:512
        if abs(B(i,j))<eps
            B(i,j)=0;
            il=il+1;
        end
    end
end
```



```

        end;
    end;
end;
A=midwt(B,h0,L);
image(A);
100*il/(512*512)

```

Progowanie miękkie możemy zaimplementować następująco

```

if B(i,j)>0
    B(i,j)=B(i,j)-eps;
    if B(i,j)<0
        B(i,j)=0;
        il=il+1;
    end;
else;
    B(i,j)=B(i,j)+eps;
    if B(i,j)>0
        B(i,j)=0;
        il=il+1;
    end;
end;
end;

```

Jeżeli będziemy używać dużej wartości proggu  $\epsilon$ , to należy wyrównać poziomy. To znaczy, należy przed progowaniem znaleźć

$$M = \max_{i,j} |B(i,j)|,$$

a następnie, po progowaniu pomnożyć

$$B(i,j) = B(i,j) * M / (M - \epsilon).$$

Powinniśmy eksperymentować z  $\epsilon$  tak, aby uzyskać typowe wartości stopnia kompresji: 90%, 95%, 98%. W przypadku trafienia we właściwy stopień kompresji obraz skompresowany należy zapisać, nadając mu nazwę umożliwiającą identyfikację stopnia kompresji, długości filtru i rodzaju progowania. postaramy się wyciągnąć wnioski na temat roli długości filtru oraz stopnia progowania. Porównajmy wyniki dla kilku różnych obrazków. Wypróbujmy ten algorytm również na obrazkach typu grafika komputerowa.

## Wykrywanie krawędzi - algorytm Canny'ego

Algorytm Canny'ego wykrywa krawędzie przy pomocy tak zwanej metody gradientowej. Pierwszym krokiem algorytmu jest wstępne lekkie rozmycie ob-

razu. Celem tego rozmycia jest ograniczenie szumu w obrazie. Zmiękczeniu ulegną też krawędzie, ale w mniejszym stopniu niż szum. Rozmycie możemy przeprowadzić przy pomocy filtra Gaussa lub medianowego, opisanych wcześniej.



Rysunek 8.21: Przykładowy obraz, porównanie detalu przed i po rozmyciu filtrem Gaussa  $5 \times 5$

Po zmiękczeniu obliczamy numeryczne pochodne cząstkowe, względem zmiennej poziomej i pionowej. Pochodne cząstkowe zapisujemy w nowych tablicach  $G_x$  i  $G_y$ . Pochodne można obliczyć na różne sposoby, na przykład używając tak zwanych masek Prewitta:

$$D_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po obliczeniu pochodnych cząstkowych obliczamy moduł gradientu  $G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$ , oraz kierunek gradientu  $T = \arctan(G_y/G_x)$ . W poniższym przykładzie obraz zapisany jest w tablicy  $B$  o rozmiarze  $m \times n$ . Kierunki gradientu zostały skwantyzowane do 4 możliwych: 1 - kierunek poziomy, 2 - kierunek ukośny w górę i prawo, 3 - kierunek pionowy i 4 - kierunek ukośny w dół i prawo. Dodatkowo do tablicy kierunków  $T$  wpisujemy 0 w przypadku gdy obie pochodne cząstkowe w danym punkcie są zerami. Zauważmy, że nie zajmujemy się skrajnymi, brzegowymi pikselami.

```
for i=2:m-1
    for j=2:n-1
        Gx(i,j)=0;
```

```

Gy(i,j)=0;
for k=1:3
    for l=1:3
        Gx(i,j)=Gx(i,j)+Dx(k,l)*B(i+k-2,j+l-2);
        Gy(i,j)=Gy(i,j)+Dy(k,l)*B(i+k-2,j+l-2);
    end;
end;
G(i,j)=sqrt(Gx(i,j)^2+Gy(i,j)^2);
if G(i,j)==0
    T(i,j)=0;
elseif Gx(i,j)==0
    T(i,j)=3;
else t=atan(Gy(i,j)/Gx(i,j));
end;
if (t>=-(pi/8))&(t<(pi/8))
    T(i,j)=1;
elseif (t>=(pi/8))&(t<(3*pi/8))
    T(i,j)=2;
elseif (t>=(3*pi/8))|(t<-(3*pi/8))
    T(i,j)=3;
else
    T(i,j)=4;
end;
end;
end;

```

W kolejnym kroku odrzucamy wszystkie punkty, w których moduł gradientu nie jest lokalnym maksimum *w kierunku gradientu*. Ma to ten efekt, że krawędzie uzyskują grubość 1 piksela. Do nowej tablicy, **Gthin** przepisujemy wartości tablicy **G**, za wyjątkiem tych odrzuconych, w których miejsce wpisujemy 0.

```

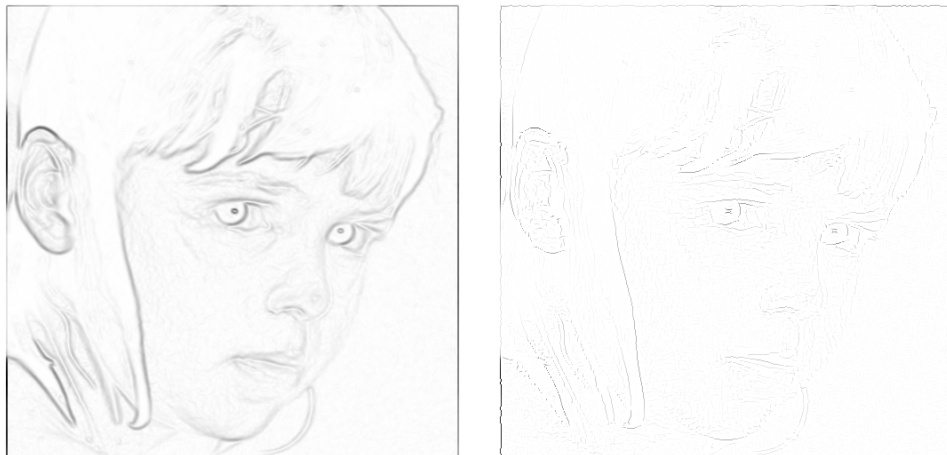
for i=2:m-1
    for j=2:n-1
        if T(i,j)==0
            a=G(i,j);
            b=a;
        elseif T(i,j)==1
            a=G(i,j-1);
            b=G(i,j+1);
        elseif T(i,j)==2
            a=G(i-1,j+1);

```

```

        b=G(i+1,j-1);
    elseif T(i,j)==3
        a=G(i-1,j);
        b=G(i+1,j);
    else
        a=G(i-1,j-1);
        b=G(i+1,j+1);
    end;
    if (a>G(i,j))|(b>G(i,j))
        Gthin(i,j)=0;
    else Gthin(i,j)=G(i,j);
    end;
end;
end;
end;

```



Rysunek 8.22: Obraz modułów gradientu, oraz ten sam obraz po eliminacji nie-maksimów

Następnie przeprowadzamy pierwsze progowanie. Wybieramy poziom odcięcia `thresh_high`, i do tablicy `edge` wpisujemy wartość 255 w tych punktach, gdzie `Gthin>thresh_high`. To są pewne krawędzie. Następnie przeprowadzamy ponowne progowanie. Ustalamy mniejszy próg, `thresh_low`, i przeglądamy te punkty, w których `Gthin>thresh_low`. Jeżeli w kierunku przypuszczalnej krawędzi (kierunek ten wyznaczamy jako prostopadły do kierunku zapisanego w tablicy `T`) znajduje się punkt już zaliczony do krawędzi to bieżący punkt też zaliczamy do krawędzi. Tą operację przeprowadzamy rekurencyjnie, gdyż ilość punktów zaliczonych do krawędzi cały czas rośnie, i musimy rozważyć ich sąsiadów. Z tego względu najpierw do tablicy `edge`

wpisujemy dla piksela krawędzi wartość 127, a dopiero po sprawdzeniu jego sąsiadów w kierunku krawędzi, „zatwierdzamy” tę wartość na 255. Możemy to zrobić na przykład tak.

```
edge=zeros(m,n);
for i=2:m-1
    for j=2:n-1
        if Gthin(i,j)>thresh_high
            edge(i,j)=127;
        end;
    end;
end;
t = 1;
while t == 1
    t = 0;%resetujemy t, żeby zapewnić wyjście z pętli
    for i=2:m-1
        for j=2:n-1
            if edge(i,j) == 127
                if T(i,j) == 3% pionowy
                    i1 = i;
                    j1 = j-1;
                    i2 = i;
                    j2 = j+1;
                    i3 = i-1;
                    j3 = j-1;
                    i4 = i+1;
                    j4 = j+1;
                    i5 = i+1;
                    j5 = j-1;
                    i6 = i-1;
                    j6 = j+1;
                elseif T(i,j) == 4% ukośny SE
                    i1 = i;
                    j1 = j-1;
                    i2 = i;
                    j2 = j+1;
                    i3 = i-1;
                    j3 = j;
                    i4 = i+1;
                    j4 = j;
                    i5 = i+1;
```

```

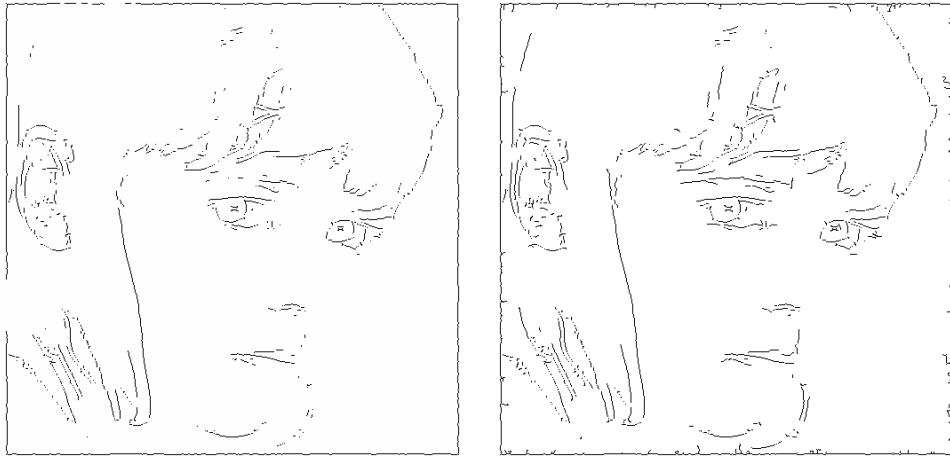
    j5 = j-1;
    i6 = i-1;
    j6 = j+1;
elseif T(i,j) == 1% poziomy
    i1 = i-1;
    j1 = j;
    i2 = i+1;
    j2 = j;
    i3 = i-1;
    j3 = j-1;
    i4 = i+1;
    j4 = j+1;
    i5 = i+1;
    j5 = j-1;
    i6 = i-1;
    j6 = j+1;
elseif T(i,j) == 2% ukośny NE
    i1 = i;
    j1 = j-1;
    i2 = i;
    j2 = j+1;
    i3 = i-1;
    j3 = j-1;
    i4 = i+1;
    j4 = j+1;
    i5 = i;
    j5 = j-1;
    i6 = i;
    j6 = j+1;
else
    i1 = i;
    j1 = j;
    i2 = i;
    j2 = j;
    i3 = i;
    j3 = j;
    i4 = i;
    j4 = j;
    i5 = i;
    j5 = j;
    i6 = i;

```

```

        j6 = j;
    end;
    if (Gthin(i1,j1) > thresh_low) & (edge(i1,j1) == 0)
        edge(i1,j1) = 127;% dodatkowy pikselkrawędzi
        t=1;
    end;
    if (Gthin(i2,j2) > thresh_low) & (edge(i2,j2) == 0)
        edge(i2,j2) = 127;% dodatkowy pikselkrawędzi
        t=1;
    end;
    if (Gthin(i3,j3) > thresh_low) & (edge(i3,j3) == 0)
        edge(i3,j3) = 127;% dodatkowy pikselkrawędzi
        t=1;
    end;
    if (Gthin(i4,j4) > thresh_low) & (edge(i4,j4) == 0)
        edge(i4,j4) = 127;% dodatkowy pikselkrawędzi
        t=1;
    end;
    if (Gthin(i5,j5) > thresh_low) & (edge(i5,j5) == 0)
        edge(i5,j5) = 127;% dodatkowy pikselkrawędzi
        t=1;
    end;
    if (Gthin(i6,j6) > thresh_low) & (edge(i6,j6) == 0)
        edge(i6,j6) = 127;% dodatkowy pikselkrawędzi
        t=1;
    end;
    edge(i,j) = 255;
end;
end;
end;
end;

```



Rysunek 8.23: Krawędzie po pierwszym progowaniu i po dodatkowym progowaniu



# Rozdział 9

## Dodatek – kilka całek

### Jądro Gaussa-Weierstrassa

Niech

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

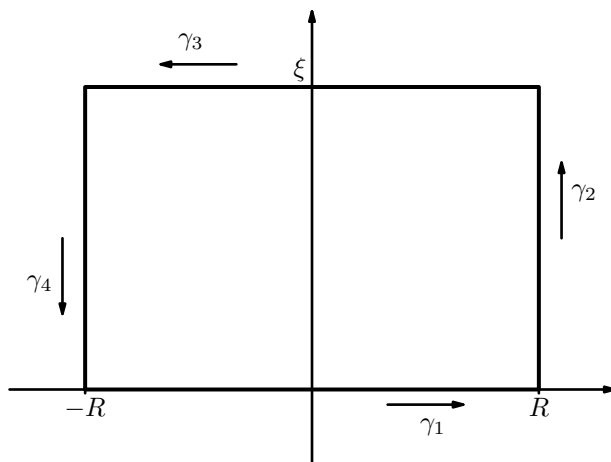
W bieżącym rozdziale obliczyliśmy transformatę Fouriera  $w$  korzystając z triku używającego równań różniczkowych. Obecnie policzymy tą transformatę używając innego triku, teorii funkcji analitycznych. Myślę, że znajomość różnych trików jest przydatna, jeżeli, na przykład, musimy policzyć jakąś nową całkę. Będziemy korzystać z twierdzenia Cauchy'ego. Jeżeli  $F$  jest funkcją zmiennej zespolonej, analityczną w jakimś obszarze (bez dziur), to całka z  $F$  po konturze zamkniętym (czyli po krzywej kawałkami gładkiej i nie przecinającej się) leżącym w obszarze analityczności jest 0.

Wiemy, że

$$\hat{w}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

Ponieważ jądro Gaussa-Weierstrassa jest parzyste, więc jego transformata też jest parzysta. Wystarczy więc policzyć  $\hat{w}(\xi)$  dla  $\xi > 0$ . Niech więc  $\xi > 0$ . Ustalmy  $R > 0$ , i zdefiniujmy następujący kontur  $\gamma$  na płaszczyźnie. Kontur będzie się składał z 4 kawałków

- $\gamma_1 : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}; \gamma_1(t) = t,$
- $\gamma_2 : [0, \xi] \rightarrow \mathbb{C}; \gamma_2(t) = R + it,$
- $\gamma_3 : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}; \gamma_3(t) = -t + i\xi,$
- $\gamma_4 : [0, \xi] \rightarrow \mathbb{C}; \gamma_4(t) = -R + i(\xi - t).$



Rysunek 9.1: Kontur  $\gamma$  dla transformaty jądra Gaussa-Weierstrassa.

Rozważmy  $\hat{w}(\xi)$

$$\begin{aligned}\hat{w}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - ix\xi + \frac{\xi^2}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} dx \\ &= \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx.\end{aligned}$$

Niech naszą funkcją analityczną będzie  $F(z) = e^{-z^2/2}$ .  $F$  jest analityczna na całej płaszczyźnie, bez punktów osobliwych. Całka po dowolnym konturze zamkniętym wynosi więc 0. Policzmy całkę po naszym konturze  $\gamma$ .

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} F(z) dz &= \int_{-R}^R e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \\ \int_{\gamma_3} F(z) dz &= \int_{-R}^R e^{-\frac{(-t+i\xi)^2}{2}} (-1) dt = - \int_{-R}^R e^{-\frac{(t+i\xi)^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

Gdy  $R \rightarrow \infty$  pierwsza całka, jak wiemy, dąży do  $\sqrt{2\pi}$ , a druga, zgodnie z obliczeniami powyżej, do  $-\sqrt{2\pi}e^{\xi^2/2}\hat{w}(\xi)$ . Pozostałe dwie całki tylko osza-

cujemy, i pokażemy, że obie dążą do 0, gdy  $R \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} F(z) dz \right| &= \left| \int_0^\xi e^{-\frac{(R+it)^2}{2}} i dt \right| \\ &\leq \int_0^\xi e^{-\frac{R^2-t^2}{2}} dt \\ &= e^{-\frac{R^2}{2}} \int_0^\xi e^{\frac{t^2}{2}} dt \\ &\leq e^{-\frac{R^2}{2}} \xi e^{\frac{\xi^2}{2}}. \end{aligned}$$

Podobnie dla  $\gamma_4$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_4} F(z) dz \right| &= \left| \int_0^\xi e^{-\frac{(-R+i(\xi-t))^2}{2}} (-i) dt \right| \\ &\leq \int_0^\xi e^{-\frac{R^2-(\xi-t)^2}{2}} dt \\ &= e^{-\frac{R^2}{2}} \int_0^\xi e^{\frac{(\xi-t)^2}{2}} dt \\ &\leq e^{-\frac{R^2}{2}} \xi e^{\frac{\xi^2}{2}}. \end{aligned}$$

Dla ustalonego  $\xi$  widzimy, że obie całki dążą do 0 gdy  $R \rightarrow \infty$ . A więc,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_\gamma F(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} F(z) dz + \dots \\ &\quad \dots + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_4} F(z) dz = \sqrt{2\pi} - \sqrt{2\pi} e^{\frac{\xi^2}{2}} \hat{w}(\xi). \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc to, co chcieliśmy

$$\hat{w}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

## Jądro Poissona

W przypadku 1-wymiarowym jądro Poissona dane jest wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

Transformatę Fouriera  $f$  obliczymy jak zwykle, całkując po odpowiednim konturze. Tej metody nie da się zastosować w przypadku wielowymiarowym.

W związku z tym przypadek wielowymiarowy rozpatrzmy osobno. Dla jądra Gaussa-Weierstrassa przypadek wielowymiarowy sprowadza się od razu do jednowymiarowego. W przypadku jądra Poissona jest inaczej. Oba jądra są ważne w zastosowaniach. Jądro Gaussa-Weierstrassa wiąże się, na przykład, z rozkładem temperatur (widzieliśmy to w akapicie o równaniu ciepła), a jądro Poissona z tak zwanymi funkcjami harmonicznymi, które są stacjonarnymi (niezmiennymi w czasie) rozkładami temperatur.

Funkcja  $f$  jest całkowna, i będziemy chcieli policzyć jej transformatę Fouriera

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} dx.$$

$f$  jest parzysta, więc  $\hat{f}$  też jest parzysta. Wystarczy więc obliczyć  $\hat{f}(0)$  i  $\hat{f}(\xi)$  dla  $\xi < 0$ . Wartość w zerze jest prosta:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \arctan(x)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \pi = 1.$$

W celu policzenia transformaty dla  $\xi < 0$  naszą funkcją analityczną będzie

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-iz\xi}}{1+z^2}.$$

Funkcja  $F$  jest analityczna na całej płaszczyźnie poza zerami mianownika, czyli punktami  $\pm i$ . Nasz kontur całkowania będzie otaczał jeden z tych punktów, więc skorzystamy z twierdzenia o residuach: całka po konturze zamkniętym jest równa sumie residuów w otoczonych przez kontur biegunach, razy  $2\pi i$ . W swoich punktach osobliwych  $F$  ma bieguny jednokrotne, więc residua są łatwe do policzenia

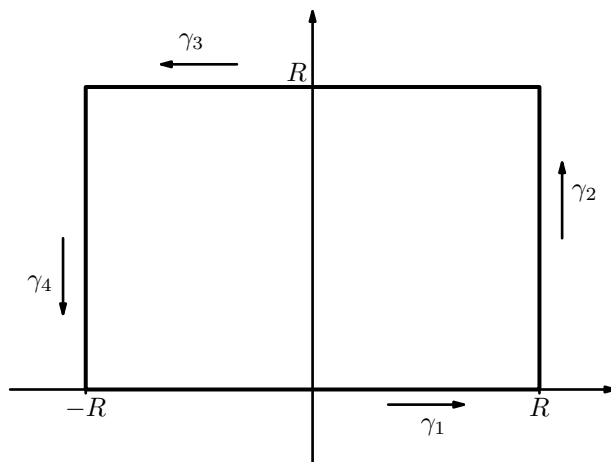
$$\text{Res}_{z=\pm i} F(z) = \lim_{z \rightarrow \pm i} (z \mp i) F(z).$$

Zdefiniujemy teraz kontur  $\gamma$ , który, jak zwykle, będzie się składał z 4 części.

- $\gamma_1(t) = t$  dla  $t \in [-R, R]$ ,
- $\gamma_2(t) = R + it$  dla  $t \in [0, R]$ ,
- $\gamma_3(t) = -t + iR$  dla  $t \in [-R, R]$ ,
- $\gamma_4(t) = -R + (R-t)i$  dla  $t \in [0, R]$ .

Dla każdego  $R > 1$  kontur  $\gamma$  otacza  $i$  i nie otacza  $-i$ , a więc, zgodnie z twierdzeniem o residuach

$$\int_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)e^{-iz\xi}}{\pi(z+i)(z-i)} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{-iz\xi}}{\pi(z+i)} = e^{\xi}.$$



Rysunek 9.2: Kontur  $\gamma$  dla transformaty jądra Poissona.

Pokażemy teraz, że całki z  $F$  po  $\gamma_i$  dążą do zera gdy  $R \rightarrow \infty$ , dla  $i = 2, 3, 4$ .

$\gamma_2$ :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_2} F(z) dz \right| &= \left| \frac{i}{\pi} \int_0^R \frac{e^{-i(R+it)\xi}}{1 + (R+it)^2} dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{e^{t\xi}}{|1 + (R+it)^2|} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{e^{t\xi}}{|1 + R^2 - t^2 + 2iRt|} dt \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{e^{t\xi}}{1 + R^2 - t^2} dt.
 \end{aligned}$$

Podobnie  $\gamma_4$ :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma_4} F(z) dz \right| &= \left| \frac{-i}{\pi} \int_0^R \frac{e^{-i(-R+(R-t)i)\xi}}{1 + (-R+(R-t)i)^2} dt \right| \\
 &= \left| \frac{-i}{\pi} \int_0^R \frac{e^{-i(-R+ti)\xi}}{1 + R^2 - t^2 - 2tRi} dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{e^{t\xi}}{|1 + (R+it)^2|} dt \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{e^{t\xi}}{1 + R^2 - t^2} dt.
 \end{aligned}$$

Obie całki mają więc wspólne oszacowanie. Oszacujmy dalej

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{e^{t\xi}}{1+R^2-t^2} dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{R/2} \frac{e^{t\xi}}{1+R^2-t^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{R/2}^R \frac{e^{t\xi}}{1+R^2-t^2} dt \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{R/2} \frac{dt}{R^2-t^2} + \frac{1}{\pi} e^{R\xi/2} \int_{R/2}^R dt \\
&\leq \frac{1}{\pi} \frac{1}{R} \int_0^{1/2} \frac{dt}{1-t^2} + \frac{1}{\pi} \frac{R}{2} e^{R\xi/2} \\
&\leq \frac{2}{3\pi} \frac{1}{R} + \frac{R e^{R\xi/2}}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Skoro  $\xi < 0$  to oba składniki dążą do zera gdy  $R \rightarrow \infty$ .

$\gamma_3$  :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_3} F(z) dz \right| &= \left| \frac{-1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{-i(-t+iR)\xi}}{1+(-t+iR)^2} dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{R\xi}}{|1+t^2-R^2-2tRi|} dt \\
&= \frac{2e^{R\xi}}{\pi} \int_0^R \frac{dt}{|1+t^2-R^2-2tRi|} \\
&= \frac{2e^{R\xi}}{\pi} \int_0^{R/2} \frac{dt}{R^2-t^2-1} + \frac{2e^{R\xi}}{\pi} \int_{R/2}^R \frac{dt}{2tR},
\end{aligned}$$

(dla  $R > 2/\sqrt{3}$ ). Dalej

$$\leq \frac{2e^{R\xi}}{\pi} \frac{R/2}{3/4 R^2 - 1} + \frac{2e^{R\xi}}{\pi} \frac{R/2}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Podsumowując, pokazaliśmy, że

$$e^\xi = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} F(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{-it\xi}}{1+t^2} dt = \hat{f}(\xi).$$

Biorąc pod uwagę, że rachunki przeprowadziliśmy przy założeniu  $\xi < 0$ , oraz że  $\hat{f}$  jest parzysta, otrzymaliśmy w końcu

$$\hat{f}(\xi) = e^{-|\xi|}.$$

## Jądro Poissona $n \geq 1$

W ogólnym przypadku  $n$  wymiarów jądro Poissona dane jest wzorem

$$P(x) = \alpha_n \frac{1}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}}, \quad |x| = |(x_1, \dots, x_n)| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

gdzie współczynniki normalizujące  $\alpha_n$  dane są przez

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{(n-2)!!} \frac{1}{\omega_{n-1}} & : \quad n - \text{parzyste} \\ \frac{(n-1)!!}{(n-2)!!} \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{2}{\pi} & : \quad n - \text{nieparzyste.} \end{cases}$$

W powyższym wzorze  $k!!$  oznacza iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do  $k$  o tej samej parzystości co  $k$ .  $\omega_k$  oznacza powierzchnię sfery jednostkowej w przestrzeni  $\mathbb{R}^{k+1}$ . Innymi słowy,  $\omega_1$  to obwód okręgu jednostkowego w  $\mathbb{R}^2$ , czyli  $2\pi$ ,  $\omega_2$  to powierzchnia sfery jednostkowej w  $\mathbb{R}^3$ , czyli  $4\pi/3$ , i tak dalej. Współczynniki  $\alpha_n$  są tak dobrane, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x) dx = 1.$$

Dla  $n = 1$  udowodniliśmy już to powyżej

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 1.$$

Dla  $n = 2$  mamy

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1+|x|^2)^{3/2}}.$$

Do obliczenia całki z  $P(x)$  użyjemy współrzędnych biegunowych:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} P(x) dx dy &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(1+r^2)^{3/2}} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(1+r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} (-2) t^{-1/2} \Big|_1^{\infty} = 1. \end{aligned}$$

Przypadek dowolnego  $n \geq 3$  udowodnimy indukcyjnie. Krok indukcyjny będzie o dwa wymiary, dlatego potrzebujemy dwóch punktów początkowych, parzystego i nieparzystego. Użyjemy współrzędnych biegunowych w prze-

strzeni  $\mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} P(x) dx &= \alpha_n \int_{\Sigma_{n-1}} \int_0^\infty \frac{r^{n-1} dr}{(1+r^2)^{(n+1)/2}} d\theta \\ &= \alpha_n \omega_{n-1} \int_0^\infty r^{n-1} (1+r^2)^{-\frac{n+1}{2}} dr \\ &= \alpha_n \omega_{n-1} \frac{-1}{n-1} \int_0^\infty r^{n-2} \left( (1+r^2)^{-\frac{n-1}{2}} \right)' dr \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^{\frac{n-1}{2}}} \xrightarrow[r \rightarrow 0^+]{r \rightarrow \infty} 0,$$

a więc całkując przez części otrzymujemy

$$= \frac{\alpha_n \omega_{n-1}}{-1} (n-2) \int_0^\infty r^{n-3} (1+r^2)^{-\frac{n-1}{2}} dr = \alpha_n \omega_{n-1} \frac{n-2}{n-1} \int_0^\infty r^{n-3} (1+r^2)^{-\frac{n-1}{2}} dr.$$

Używając indukcji widzimy, że

$$\widehat{P}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x) dx = 1.$$

Niech, dla  $r > 0$

$$P_r(x) = \frac{1}{r^n} P\left(\frac{x}{r}\right) = \alpha_n \frac{r}{(r^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}}.$$

Wtedy, jak można mniejszym lub większym wysiłkiem sprawdzić,  $P_r$  spełnia równanie różniczkowe Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 P_r(x)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P_r(x)}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 P_r(x)}{\partial x_n^2} = 0.$$

Stosując transformatę Fouriera otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widehat{P}_r(\xi)}{\partial r^2} &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \widehat{P}_r(\xi) \\ &= |\xi|^2 \widehat{P}_r(\xi). \end{aligned}$$

Zauważmy, że  $P(x)$  zależy tylko od długości  $|x|$ , więc podobną własność ma  $\widehat{P}$

$$\widehat{P}_r(\xi) = \widehat{P}_r(|\xi|).$$



Dla ustalonego  $t = |\xi|$  oznaczmy

$$f_t(r) = \widehat{P}_r(\xi).$$

Wtedy, zgodnie z tym, co pokazaliśmy powyżej,  $f_t$  spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{d^2 f_t(r)}{dr^2} = t^2 f_t(r),$$

( $t$  jest ustalonym parametrem, a  $r > 0$  jest zmienną). Z teorii równań różniczkowych zwyczajnych wiemy, że równanie takie ma rozwiązanie ogólne postaci

$$f_t(r) = c_1 e^{tr} + c_2 e^{-tr}.$$

Wiedząc, że  $\widehat{P}_r \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $c_1$  musi być równe zero. Zauważmy też, że

$$c_2 = f_0(1) = \widehat{P}(0) = 1.$$

Podsumowując,

$$\widehat{P}(\xi) = f_{|\xi|}(1) = e^{-|\xi|}.$$

## Funkcja sinc( $x$ )

Udowodnimy kilka faktów o funkcji

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Jest to funkcja całkowalna z kwadratem (bo  $|f(x)|^2 \leq \min\{1, 1/x^2\}$ ), niecałkowalna, ale całkowalna w sensie niewłaściwym. Wszystko to można wynioskować z twierdzenia Plancherela, oraz własności transformaty Fouriera. Wiemy, że  $f$  jest transformatą Fouriera funkcji

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2} \chi_{[-1,1]}(x).$$

Była to jedna z pierwszych policzonych w tym skrypcie transformat. Gdyby  $f$  była całkowalna, to  $\hat{f}$ , a więc i  $\check{f}$  musiałyby być ciągłe, a nie jest.  $f$  nie może więc być całkowalna. Fakt, że jest całkowalna w sensie niewłaściwym wynika z twierdzenia Plancherela, i wzoru na odwrócenie transformaty w  $L^2(\mathbb{R})$

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

a więc

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f(x) dx = \frac{1}{2} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f(x) dx = \frac{2\pi}{2} \check{f}(0) = \frac{\pi}{2}. \quad (9.1)$$

Naszym pierwszym celem będzie bezpośrednio pokazanie powyższych faktów, bez używania tego wszystkiego, co o transformacie Fouriera wiemy. Tak jak wspominałem wcześniej, znajomość różnych trików przyda się, kiedy będziemy chcieli policzyć jakąś nietypową całkę. Do obliczenia całki niewłaściwej (9.1) użyjemy całek z funkcji analitycznych. Najpierw uzasadnimy, że  $f$  nie jest całkowna. Niech  $M \in \mathbb{N}$  będzie dowolną liczbą naturalną.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x} dx &\geq \int_\pi^{M\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{M-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \\ &= \sum_{k=1}^{M-1} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{(x+k\pi)} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^{M-1} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{k\pi} dx \\ &= \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

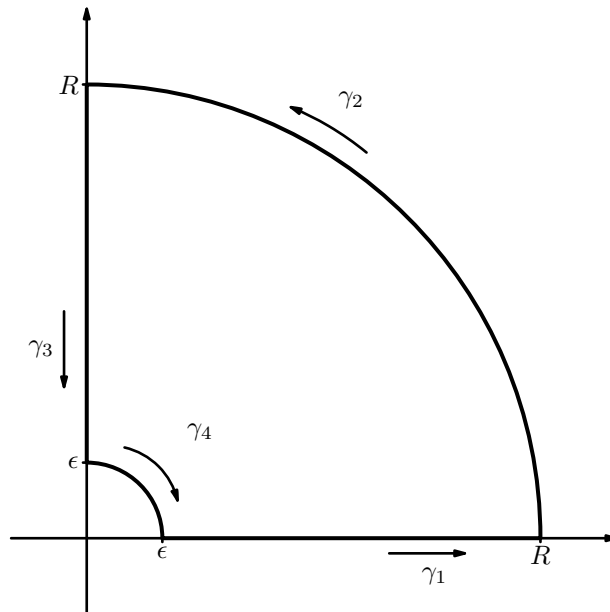
Ponieważ  $M$  jest dowolne, a szereg harmoniczny jest rozbieżny, więc  $f$  nie jest całkowna. Rozważmy następującą funkcję zmiennej zespolonej

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{z}.$$

Jest to funkcja analityczna na całej płaszczyźnie, z wyjątkiem 0. Określmy sobie teraz kontur  $\gamma$  na płaszczyźnie, nie przechodzący przez zero i nie otaczający zera. Ustalmy  $\epsilon$  i  $R$ ,  $0 < \epsilon < R$ . Kontur  $\gamma$  składa się z 4 kawałków o następujących parametryzacjach:

- $\gamma_1(t) = t$  dla  $t \in [\epsilon, R]$ ,
- $\gamma_2(t) = Re^{it}$  dla  $t \in [0, \pi/2]$ ,

- $\gamma_3(t) = (R - t)i$  dla  $t \in [0, R - \epsilon]$ ,
- $\gamma_4(t) = ie^{-it}$  dla  $t \in [0, \pi/2]$ .



Rysunek 9.3: Kontur  $\gamma$ .

Wiemy, że całka z funkcji  $F$  po konturze  $\gamma$  wynosi 0. W szczególności jej część urojona też wynosi 0. Policzmy osobno części urojone każdej z całek

$$\int_{\gamma_i} F(z) dz, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Ich suma musi wynieść 0.

$\gamma_1$  :

$$\Im \int_{\gamma_1} F(z) dz = \Im \int_{\epsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt = \int_{\epsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

$\gamma_3$  :

$$\begin{aligned} \Im \int_{\gamma_3} F(z) dz &= \Im \left( (-i) \int_0^{R-\epsilon} \frac{e^{i(R-t)i}}{(R-t)i} dt \right) \\ &= \Im \left( - \int_0^{R-\epsilon} \frac{e^{-(R-t)}}{(R-t)} dt \right) \\ &= \Im \left( - \int_0^{R-\epsilon} \frac{e^{-(R-t)}}{(R-t)} dt \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

gdyż całka jest czysto rzeczywista.

$\gamma_2$ :

$$\begin{aligned} \Im \int_{\gamma_2} F(z) dz &= \Im \ i R \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i R e^{it}}}{R e^{it}} e^{it} dt \\ &= \Im \ i \int_0^{\pi/2} e^{i R (\cos(t) + i \sin(t))} dt \\ &= \Im \ i \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin(t)} (\cos(R \cos(t)) + i \sin(R \cos(t))) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin(t)} \cos(R \cos(t)) dt. \end{aligned}$$

$\gamma_4$ :

$$\begin{aligned} \Im \int_{\gamma_4} F(z) dz &= \Im \ \epsilon \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i \epsilon e^{-it}}}{i \epsilon e^{-it}} e^{-it} dt \\ &= \Im \ -i \int_0^{\pi/2} e^{-\epsilon (\cos(t) - i \sin(t))} dt \\ &= -\Re \int_0^{\pi/2} e^{-\epsilon \cos(t)} (\cos(\epsilon \sin(t)) + i \sin(\epsilon \sin(t))) dt \\ &= - \int_0^{\pi/2} e^{-\epsilon \cos(t)} \cos(\epsilon \sin(t)) dt. \end{aligned}$$

W przypadku  $\gamma_2$  i  $\gamma_4$  całek przypuszczalnie nie da się policzyć dokładnie, ale nam wystarczą granice, które da się policzyć. Podsumowując, otrzymaliśmy następujący wzór:

$$\int_{\epsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\pi/2} e^{-\epsilon \cos(t)} \cos(\epsilon \sin(t)) dt - \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin(t)} \cos(R \cos(t)) dt. \quad (9.2)$$

Zauważmy, że gdy  $\epsilon \rightarrow 0^+$  to w pierwszej całce z prawej strony funkcja podcałkowa dąży do 1, i jest ograniczona przez 1, a więc korzystając z twierdzenia o zbieżności ograniczonej mamy

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\pi/2} e^{-\epsilon \cos(t)} \cos(\epsilon \sin(t)) dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2},$$

(w rzeczywistości zbieżność pod całką jest nawet jednostajna). W drugiej całce zauważmy, że

$$|e^{-R \sin(t)} \cos(R \cos(t))| \leq e^{-R \sin(t)} \leq e^{-\frac{2Rt}{\pi}}, \quad \text{gdyż } \frac{2t}{\pi} \leq \sin(t), \quad \text{dla } t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

A więc,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin(t)} \cos(R \cos(t)) dt \right| &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2Rt}{\pi}} dt \\ &= -\frac{\pi}{2R} \left( e^{-\frac{2Rt}{\pi}} \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{\pi}{2R} (e^{-R} - 1) \\ &= \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}). \end{aligned}$$

Widzimy więc, że gdy  $R \rightarrow \infty$  całka dąży do zera. Podstawiając obie te granice do (9.2) otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0^+}} \int_{\epsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$