Pierwsza litera nazwiska

Egzamin końcowy 1 termin
5.02.19

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność jednostajną na $(0,\infty)$ ciągu funkcyjnego:

$$f_n(x) = n\Big(\sqrt{x+\tfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\Big).$$

Rozwiązanie: Zauważmy:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n\Big(\sqrt{x+\tfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\Big) \\ &= n\,\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$f_n(x)$ jest więc zbieżny w każdym punkcie do $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Rozważmy teraz zbieżność jednostajną:

$$|f_n(x) - f(x)| = \Big|\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|.$$

Żeby zbieżność była jednostajna, to to wyrażenie powinno być małe, niezależnie od x. Weźmy $x = \frac{1}{n}$. Mamy

$$\begin{aligned} \big|f_n(\tfrac{1}{n}) - f(\tfrac{1}{n})\big| &= \left|\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n}}}\right| \\ &= \Big|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{n}}{2}\Big| \\ &= \sqrt{n}\,\Big|\frac{2-\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{2}+1)}\Big| \\ &= \sqrt{n}\frac{\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{2}+1)} \\ &= \sqrt{n}\frac{3-2\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że

$$\epsilon_n = \sup\{f_n(x) - f(x) :\ x \in (0,\infty)\} \geq c \cdot \sqrt{n}.$$

Zbieżność nie jest więc jednostajna, bo $\epsilon_n \nrightarrow 0$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, \qquad p \geq 0.$$

(Wskazówka: Spróbuj zastosować twierdzenie o zbieżności sum Riemanna.)

Rozwiązanie: Mamy:

$$\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right).$$

Widzimy, że jest to suma Riemanna funkcji $f(x) = x^p$ dla przedziału $[0,1]$, podziału $0 < 1/n < 2/n < \cdots < n/n = 1$ i wyboru punktów $t_i = x_i$ z przedziału $[x_{i-1}, x_i]$. Korzystając z twierdzenia o zbieżności sum Riemanna otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \int_0^1 x^p\,dx = \left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Niech

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.$$

Znajdź związek rekurencyjny I_n z I_{n-2} ($n \geq 2$).

Rozwiązanie: Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, \sin x \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, (-\cos x)' \, dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \, \cos^2 x \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, (1 - \sin^2 x) \, dx \\
&= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.
\end{aligned}$$

Przenosząc $(n-1)I_n$ na lewą stronę i dzieląc przez n otrzymujemy

$$I_n = \frac{n-1}{n} \, I_{n-2}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi $y = e^{-x}|\sin x|$, $y = 0$ oraz $x \geq 0$.

Rozwiązanie: Pole to jest równe całce niewłaściwej, i jest sumą „pagórków” (coraz mniejszych), wystających nad kolejnymi przedziałami postaci $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{N}$. Policzmy pole jednego takiego pagórka, a potem je wszystkie zsumujemy. Zauważmy, że $|\sin x|$ jest π-okresowa:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x}\,|\sin x|\,dx = \int_0^\pi e^{-(x+k\pi)}|\sin x|\,dx = e^{-k\pi}\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx.$$

Aby policzyć całkę, zastosujemy dwukrotnie całkowanie przez części

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx &= \int_0^\pi e^{-x}(-\cos x)'\,dx \\
&= -\cos x\, e^{-x}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx \\
&= e^{-\pi} + 1 - \int_0^\pi e^{-x}(\sin x)'\,dx \\
&= e^{-\pi} + 1 - \sin x\, e^{-x}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx \\
&= e^{-\pi} + 1 - \int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx.
\end{aligned}$$

Przenosząc całkę z prawej strony na lewą, i dzieląc przez 2 otrzymujemy

$$\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx = \frac{1+e^{-\pi}}{2}.$$

Ostatecznie,

$$\int_0^\infty e^{-x}\,|\sin x|\,dx = \frac{1+e^{-\pi}}{2}\sum_{k=0}^\infty e^{-k\pi} = \frac{1+e^{-\pi}}{2}\frac{1}{1-e^{-\pi}}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź granicę

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Rozwiązanie: Jest to wyrażenie nieoznaczone postaci 1^∞. Przekształcamy je:

$$x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{\log x}{1-x}}.$$

W wykładniku mamy wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$, więc stosujemy regułę de l'Hospitala

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{1-x} \overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$

W takim razie,

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{1-x}} = e^{-1}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia funkcji:

$$f(x) = \log(1 + x^2).$$

Uwaga: W powyższym wzorze log to logarytm naturalny.

Rozwiązanie: Liczymy 2 pochodną:

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1 + x^2) \\ f'(x) &= \frac{2x}{1 + x^2} \\ f''(x) &= \frac{2(1 + x^2) - 2x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}. \end{aligned}$$

Mianownik jest zawsze dodatni, więc o znaku decyduje licznik, i mamy: jeżeli $|x| \leq 1$ to funkcja jest wypukła, jeżeli $|x| \geq 1$ to funkcja jest wklęsła, oraz $x = \pm 1$ są punktami przegięcia.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Znajdź wartości największe i najmniejsze podanej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = |x^2 - 1| + x, \qquad [-2, 2].$$

Rozwiązanie: Funkcja kwadratowa $x^2 - 1$ zmienia znak w punktach ± 1 które należą do interesującego nas przedziału. W tych punktach f nie ma pochodnej. Mamy więc następujące punkty do sprawdzenia: ± 2 (końce przedziału) i ± 1 (nieróżniczkowalność). Musimy ustalić punkty, w których f' się zeruje. Są 2 przypadki:
$|x| \geq 1 \;\Rightarrow\; f(x) = x^2 - 1 + x \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x + 1$. W tym przypadku pochodna nie ma zer.
$|x| \leq 1 \;\Rightarrow\; f(x) = 1 - x^2 + x \;\Rightarrow\; f'(x) = -2x + 1$. Mamy dokładnie jeden punkt zerowy: $x = \frac{1}{2}$.

Sprawdzamy wartości f we wszystkich podejrzanych punktach:

$$f(-2) = 3 - 2 = 1, \quad f(2) = 3 + 2 = 5,$$
$$f(-1) = -1, \quad f(1) = 1,$$
$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

Wartość największa w takim razie to 5, przyjęta w $x = 2$, a wartość najmniejsza to -1, przyjęta w punkcie $x = -1$.