

Egzamin końcowy 1 termin
5.02.19

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność jednostajną na $(0, \infty)$ ciągu funkcyjnego:

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right).$$

Rozwiązanie: Zauważmy:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) \\ &= n \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$f_n(x)$ jest więc zbieżny w każdym punkcie do $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Rozważmy teraz zbieżność jednostajną:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right|.$$

Żeby zbieżność była jednostajna, to to wyrażenie powinno być małe, niezależnie od x . Weźmy $x = \frac{1}{n}$. Mamy

$$\begin{aligned} \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| &= \left| \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n}}} \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2} + 1} - \frac{\sqrt{n}}{2} \right| \\ &= \sqrt{n} \left| \frac{2 - \sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{2} + 1)} \right| \\ &= \sqrt{n} \frac{\sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{2} + 1)} \\ &= \sqrt{n} \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że

$$\epsilon_n = \sup\{f_n(x) - f(x) : x \in (0, \infty)\} \geq c \cdot \sqrt{n}.$$

Zbieżność nie jest więc jednostajna, bo $\epsilon_n \not\rightarrow 0$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, \quad p \geq 0.$$

(Wskazówka: Spróbuj zastosować twierdzenie o zbieżności sum Riemanna.)

Rozwiązanie: Mamy:

$$\frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^p \right).$$

Widzimy, że jest to suma Riemanna funkcji $f(x) = x^p$ dla przedziału $[0, 1]$, podziału $0 < 1/n < 2/n < \dots < n/n = 1$ i wyboru punktów $t_i = x_i$ z przedziału $[x_{i-1}, x_i]$. Korzystając z twierdzenia o zbieżności sum Riemanna otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Niech

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.$$

Znajdź związek rekurencyjny I_n z I_{n-2} ($n \geq 2$).

Rozwiązanie: Całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (-\cos x)' \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Przenosząc $(n-1)I_n$ na lewą stronę i dzieląc przez n otrzymujemy

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi $y = e^{-x}|\sin x|$, $y = 0$ oraz $x \geq 0$.

Rozwiązanie: Pole to jest równe całce niewłaściwej, i jest sumą „pagórków” (coraz mniejszych), wystających nad kolejnymi przedziałami postaci $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{N}$. Policzmy pole jednego takiego pagórka, a potem je wszystkie zsumujemy. Zauważmy, że $|\sin x|$ jest π -okresowa:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} e^{-(x+k\pi)} |\sin x| dx = e^{-k\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx.$$

Aby policzyć całkę, zastosujemy dwukrotnie całkowanie przez części

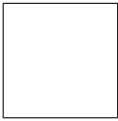
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx &= \int_0^{\pi} e^{-x} (-\cos x)' dx \\ &= -\cos x e^{-x} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx \\ &= e^{-\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^{-x} (\sin x)' dx \\ &= e^{-\pi} + 1 - \sin x e^{-x} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx \\ &= e^{-\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx. \end{aligned}$$

Przenosząc całkę z prawej strony na lewą, i dzieląc przez 2 otrzymujemy

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}.$$

Ostatecznie,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |\sin x| dx = \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\pi} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \frac{1}{1 - e^{-\pi}}.$$



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź granicę

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Rozwiązanie: Jest to wyrażenie nieoznaczone postaci 1^∞ . Przekształcamy je:

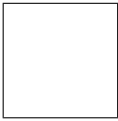
$$x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{\log x}{1-x}}.$$

W wykładniku mamy wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$, więc stosujemy regułę de l'Hospitala

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{1-x} \stackrel{\text{de l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$

W takim razie,

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{1-x}} = e^{-1}.$$



Pierwsza litera nazwiska

6

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia funkcji:

$$f(x) = \log(1 + x^2).$$

Uwaga: W powyższym wzorze log to logarytm naturalny.

Rozwiązanie: Liczymy 2 pochodną:

$$f(x) = \log(1 + x^2)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(1 + x^2) - 2x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Mianownik jest zawsze dodatni, więc o znaku decyduje licznik, i mamy: jeżeli $|x| \leq 1$ to funkcja jest wypukła, jeżeli $|x| \geq 1$ to funkcja jest wklęsła, oraz $x = \pm 1$ są punktami przegięcia.

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Znajdź wartości największe i najmniejsze podanej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = |x^2 - 1| + x, \quad [-2, 2].$$

Rozwiązanie: Funkcja kwadratowa $x^2 - 1$ zmienia znak w punktach ± 1 które należą do interesującego nas przedziału. W tych punktach f nie ma pochodnej. Mamy więc następujące punkty do sprawdzenia: ± 2 (końce przedziału) i ± 1 (nieróżniczkowalność). Musimy ustalić punkty, w których f' się zeruje. Są 2 przypadki:

$|x| \geq 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1 + x \Rightarrow f'(x) = 2x + 1$. W tym przypadku pochodna nie ma zer.

$|x| \leq 1 \Rightarrow f(x) = 1 - x^2 + x \Rightarrow f'(x) = -2x + 1$. Mamy dokładnie jeden punkt zerowy: $x = \frac{1}{2}$.

Sprawdzamy wartości f we wszystkich podejrzanych punktach:

$$f(-2) = 3 - 2 = 1, \quad f(2) = 3 + 2 = 5,$$

$$f(-1) = -1, \quad f(1) = 1,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

Wartość największa w takim razie to 5, przyjęta w $x = 2$, a wartość najmniejsza to -1 , przyjęta w punkcie $x = -1$.