

Egzamin końcowy 2 termin
20.02.19

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Znajdź sumę szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}.$$

Rozwiązanie: Widzimy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1})''.$$

Oznaczamy

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1}) = \sum_{n=2}^{\infty} x^n.$$

Jest to funkcja, której dziedziną jest przedział zbieżności szeregu (łatwo zauważyć, że ten przedział to $(-1, 1)$), różniczkowalna nieskończenie wiele razy wewnątrz tego przedziału (czyli na $(-1, 1)$). Sumując szereg geometryczny dostajemy

$$F(x) = \frac{x^2}{1-x} = \frac{x(x-1) + (x-1) + 1}{1-x} = -x - 1 + \frac{1}{1-x},$$

a z drugiej strony wiemy, że szereg zadający F można różniczkować wyraz za wyrazem. Mamy więc:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} &= F''(x) \\ &= \left(-1 + \frac{1}{(1-x)^2} \right)' \\ &= \frac{2}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję:

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x},$$

i znajdź promień zbieżności powstałego szeregu potęgowego
(Uwaga: log to logarytm naturalny.)

Rozwiązanie: Mamy

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+x) - \log(1-x) \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \\ f''(x) &= (-1) \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \\ f'''(x) &= (-1)(-2) \frac{1}{(1+x)^3} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{(1+x)^n} + (n-1)! \frac{1}{(1-x)^n}. \end{aligned}$$

Widzimy więc, że dla $n \geq 1$

$$f^{(n)}(0) = (n-1)! (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & : n - \text{parz.}, \\ 2(n-1)! & : n - \text{nieparz.} \end{cases}$$

Mamy więc rozwinięcie w szereg Maclaurina ($f(0) = 0$)

$$f(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n-\text{nieparz}}} \frac{2}{n} x^n.$$

Mamy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2}{n}} = 1,$$

czyli promień zbieżności wynosi 1.

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź wartość największą i najmniejszą podanej funkcji na całej dziedzinie

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

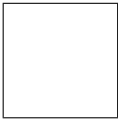
Rozwiązanie: Dziedziną funkcji jest cała prosta, funkcja jest różniczkowalna w każdym punkcie, więc ekstrema mogą wypaść tylko w punktach zerowych pochodnej

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \sin^3 x \cos x - 4 \cos^3 x \sin x \\ &= 4 \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) \\ &= 2 \sin 2x (-\cos 2x) \\ &= -\sin 4x. \end{aligned}$$

f jest okresowa o okresie π (tak naprawdę nawet $\frac{\pi}{2}$, ale zostawmy π), więc wystarczy znaleźć wartości największą i najmniejszą na przedziale $[0, \pi]$. Na tym przedziale pochodna ma zera w punktach $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$.

$$\begin{aligned} f(0) &= f(\pi) = 0 + 1 = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 + 0 = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wartość największa f to 1, a najmniejsza to $\frac{1}{2}$.



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Rozwiązanie: Jest to wyrażenie nieoznaczone postaci 1^∞ , więc przekształcamy je

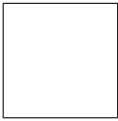
$$x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{1-x} \log x} = e^{\frac{\log x}{1-x}}.$$

Granica w wykładniku, gdy $x \rightarrow 1$ to wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$, więc stosujemy regułę de l'Hospitala

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{1-x} \stackrel{\text{de l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$

W takim razie,

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{1-x}} = e^{-1}.$$



Pierwsza litera nazwiska

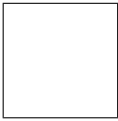
5

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź objętość bryły powstałej przez obrót obszaru pomiędzy parabolami $y = x^2$ i $x = y^2$, $0 \leq x \leq 1$ wokół osi OX .

Rozwiązanie: Obszar zawarty jest powyżej wykresu $y = x^2$ i poniżej wykresu $y = \sqrt{x}$.
Mamy więc

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x - x^4) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

6

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz całkę niewłaściwą (lub pokaż, że nie jest zbieżna):

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx.$$

Rozwiązanie: Liczymy całkę nieoznaczoną, na przykład przez podstawienie

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \arctan x \\ dt = \frac{1}{1+x^2} dx \end{array} \right\} \\ &= \int t dt \\ &= \frac{t^2}{2} + c \\ &= \frac{(\arctan x)^2}{2} + c. \end{aligned}$$

Liczymy:

$$\begin{aligned} \int_0^M \frac{\arctan x}{1+x^2} dx &= \frac{(\arctan x)^2}{2} \Big|_0^M \\ &= \frac{(\arctan M)^2}{2} - 0 \\ &\xrightarrow{M \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} \\ &= \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Całka jest więc zbieżna, i jest równa $\frac{\pi^2}{8}$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Korzystając z rozwinięcia funkcji e^x w szereg Taylora wokół 0 oblicz wartość \sqrt{e} z dokładnością 0,001.

(Wsk: Ile wyrazów rozwinięcia trzeba użyć?)

Rozwiązanie: Korzystamy z rozwinięcia

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Błąd dla $n+1$ początkowych wyrazów (licząc od zerowego) wynosi, dla pewnego $0 < \theta < 1$

$$\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{3}{(n+1)! 2^{n+1}}.$$

Próbujemy dla $n = 3$:

$$\frac{3}{4!2^4} = \frac{3}{24 \cdot 16} = \frac{1}{8 \cdot 16} = \frac{1}{128} > 0,001.$$

Błąd jest więc potencjalnie za duży. Próbujemy $n = 3$:

$$\frac{3}{5!2^5} = \frac{3}{120 \cdot 32} = \frac{1}{40 \cdot 32} = \frac{1}{1280} < 0,001.$$

Dla $n = 4$ błąd jest więc mniejszy niż wymagana dokładność 0,001.

$$\begin{aligned} \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} &\simeq 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} = \frac{24 + 12 + \frac{12}{4} + \frac{4}{8} + \frac{1}{16}}{24} \\ &= \frac{16 \cdot 24 + 12 \cdot 24 + 12 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 1}{16 \cdot 24} = \frac{384 + 288 + 48 + 8 + 1}{384} \\ &= \frac{729}{384}. \end{aligned}$$