Pierwsza litera nazwiska



**Egzamin końcowy 2 termin**
**20.02.19**

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 1.** Znajdź sumę szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}.$$

**Rozwiązanie:** Widzimy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n+1}\right)''.$$

Oznaczamy

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n+1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} x^n.$$

Jest to funkcja, której dziedziną jest przedział zbieżności szeregu (łatwo zauważyć, że ten przedział to $(-1,1)$), różniczkowalna nieskończenie wiele razy wewnątrz tego przedziału (czyli na $(-1,1)$). Sumując szereg geometryczny dostajemy

$$F(x) = \frac{x^2}{1-x} = \frac{x(x-1)+(x-1)+1}{1-x} = -x-1+\frac{1}{1-x},$$

a z drugiej strony wiemy, że szereg zadający $F$ można różniczkować wyraz za wyrazem. Mamy więc:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} &= F''(x)\\ &= \Big(-1+\frac{1}{(1-x)^2}\Big)'\\ &= \frac{2}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska



**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 2.** Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję:

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x},$$

i znajdź promień zbieżności powstałego szeregu potęgowego
(Uwaga: log to logarytm naturalny.)

**Rozwiązanie:** Mamy

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(1+x) - \log(1-x)\\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\\
f''(x) &= (-1)\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\\
f'''(x) &= (-1)(-2)\frac{1}{(1+x)^3} + 1\cdot 2\cdot \frac{1}{(1-x)^3}\\
&\vdots\\
f^{(n)} &= (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n} + (n-1)!\frac{1}{(1-x)^n}.
\end{aligned}$$

Widzimy więc, że dla $n \geq 1$

$$f^{(n)}(0) = (n-1)!(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 & : n \text{ - parz.,}\\ 2(n-1)! & : n \text{ - nieparz.} \end{cases}$$

Mamy więc rozwinięcie w szereg Maclaurina ($f(0) = 0$)

$$f(x) = \sum_{\substack{n=1\\ n\text{-nieparz}}} \frac{2}{n}x^n.$$

Mamy

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{n}} = 1,$$

czyli promien zbieżności wynosi 1.

Pierwsza litera nazwiska



**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 3.** Znajdź wartość największą i najmniejszą podanej funkcji na całej dziedzinie

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

**Rozwiązanie:** Dziedziną funkcji jest cała prosta, funkcja jest różniczkowalna w każdym punkcie, więc ekstrema mogą wypaść tylko w punktach zerowych pochodnej

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x \\ &= 4\sin x \cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) \\ &= 2\sin 2x(-\cos 2x) \\ &= -\sin 4x. \end{aligned}$$

$f$ jest okresowa o okresie $\pi$ (tak naprawdę nawet $\frac{\pi}{2}$, ale zostawmy $\pi$), więc wystarczy znaleźć wartości największąi najmniejszą na przedziale $[0, \pi]$. Na tym przedziale pochodna ma zera w punktach $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi>$.

$$\begin{aligned} f(0) &= f(\pi) = 0 + 1 = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 + 0 = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wartość największa $f$ to 1, a najmniejsza to $\frac{1}{2}$.

Pierwsza litera nazwiska



**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 4.** Oblicz granicę
$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

**Rozwiązanie:** Jest to wyrażenie nieoznaczone postaci $1^\infty$, więc przekształcamy je
$$x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{1-x}\log x} = e^{\frac{\log x}{1-x}}.$$
Granica w wykładniku, gdy $x \to 1$ to wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$, więc stosujemy regułę de l'Hospitala
$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{1-x} \overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1.$$
W takim razie,
$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}} = e^{-1}.$$

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 5.** Znajdź objętość bryły powstałej przez obrót obszaru pomiędzy parabolami $y = x^2$ i $x = y^2$, $0 \leq x \leq 1$ wokół osi $OX$.

**Rozwiązanie:** Obszar zawarty jest powyżej wykresu $y = x^2$ i poniżej wykresu $y = \sqrt{x}$. Mamy więc

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x - x^4) dx \\ &= \pi \Big( \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \Big) \Big|_0^1 \\ &= \pi \Big( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \Big) \\ &= \frac{3\pi}{10}. \end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska



**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 6.** Oblicz całkę niewłaściwą (lub pokaż, że nie jest zbieżna):

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx.$$

**Rozwiązanie:** Liczymy całkę nieoznaczoną, na przykład przez podstawienie

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \arctan x \\ dt = \frac{1}{1+x^2} dx \end{array} \right\} \\
&= \int t\,dt \\
&= \frac{t^2}{2} + c \\
&= \frac{(\arctan x)^2}{2} + c.
\end{aligned}$$

Liczymy:

$$\begin{aligned}
\int_0^M \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx &= \frac{(\arctan x)^2}{2}\Big|_0^M \\
&= \frac{(\arctan M)^2}{2} - 0 \\
&\xrightarrow{M\to\infty} \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2} \\
&= \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

Całka jest więc zbieżna, i jest równa $\frac{\pi^2}{8}$.

Pierwsza litera nazwiska



**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 7.** Korzystając z rozwinięcia funkcji $e^x$ w szereg Taylora wokół 0 oblicz wartość $\sqrt{e}$ z dokładnością $0,001$.
(Wsk: Ile wyrazów rozwinięcia trzeba użyć?)

**Rozwiązanie:** Korzystamy z rozwinięcia

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots.$$

Błąd dla $n+1$ początkowych wyrazów (licząc od zerowego) wynosi, dla pewnego $0 < \theta < 1$

$$\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{3}{(n+1)!\,2^{n+1}}.$$

Próbujemy dla $n = 3$ :

$$\frac{3}{4!2^4} = \frac{3}{24 \cdot 16} = \frac{1}{8 \cdot 16} = \frac{1}{128} > 0,001.$$

Błąd jest więc potencjalnie za duży. Próbujemy $n = 3$ :

$$\frac{3}{5!2^5} = \frac{3}{120 \cdot 32} = \frac{1}{40 \cdot 32} = \frac{1}{1280} < 0,001.$$

Dla $n = 4$ błąd jest więc mniejszy niż wymagana dokładność $0,001$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} &\simeq 1 + \frac{1}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{1}{2})^4}{4!} = \frac{24 + 12 + \frac{12}{4} + \frac{4}{8} + \frac{1}{16}}{24} \\
&= \frac{16 \cdot 24 + 12 \cdot 24 + 12 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 1}{16 \cdot 24} = \frac{384 + 288 + 48 + 8 + 1}{384} \\
&= \frac{729}{384}.
\end{aligned}$$