

Pierwsza litera nazwiska

1

Kolokwium 1
9.11.18

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność:

$$\frac{6 - 3x}{2 + x} > 1$$

Rozwiązanie: Rozpatrujemy przypadki $x < -2$ i $x > -2$ ($x = -2$ jest wykluczony):
 $x < -2$:

$$\begin{aligned}\frac{6 - 3x}{2 + x} &> 1 \\ 6 - 3x &< 2 + x \\ 4 &< 4x \\ 1 &< x.\end{aligned}$$

W tym przypadku nie ma rozwiązań.
 $x > -2$:

$$\begin{aligned}\frac{6 - 3x}{2 + x} &> 1 \\ 6 - 3x &> 2 + x \\ 4 &> 4x \\ x &< 1,\end{aligned}$$

czyli w tym przypadku rozwiązaniami są $x \in (-2, 1)$. Ostatecznie, rozwiązaniem jest przedział $(-2, 1)$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$A = \left\{ \frac{1}{2n} + \frac{3}{k^2}; n, k \in \mathbf{N}, n, k > 0 \right\}.$$

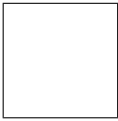
Rozwiązanie: Zaczniemy od $\inf A$. Zauważmy, że wszystkie elementy A są dodatnie. 0 jest więc ograniczeniem A od dołu. Chcemy pokazać, że jest największym ograniczeniem od dołu. Weźmy dowolne $\delta > 0$. Weźmy liczbę $n \in \mathbf{N}$ taką, że $n > 1/\delta$ (czyli $1/2n < \delta/2$). Taka liczba istnieje, bo zbiór \mathbf{N} nie jest ograniczony od góry. Podobnie, znajdziemy $k \in \mathbf{N}$ takie, że $k > \sqrt{6/\delta}$ (czyli $3/k^2 < \delta/2$). Taką liczbę znajdziemy podobnie jak poprzednią. Wtedy:

$$\frac{1}{2n} + \frac{3}{k^2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Znaleźliśmy więc element A mniejszy od δ , więc δ nie jest ograniczeniem od dołu. Ponieważ δ była dowolna dodatnia, więc 0 jest największym ograniczeniem A od dołu: $0 = \inf A$. Teraz, skoro $n \geq 1, k \geq 1$ to $\forall k, n \in \mathbf{N}, k, n > 0$ mamy

$$\frac{1}{2n} + \frac{3}{k^2} \leq \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{3}{1^2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{1} = \frac{7}{2}.$$

Liczba $\frac{7}{2}$ jest więc ograniczeniem A od góry, i najmniejszym takim ograniczeniem, bo $\frac{7}{2} \in A$. Mamy więc $\sup A = \frac{7}{2}$.



Pierwsza litera nazwiska

3

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz:

$$\frac{4 - 3\mathbf{i}}{3 - 2\mathbf{i}}$$

Rozwiązanie: Oznaczmy iloraz przez $u + \mathbf{i}v$. Tak więc

$$\frac{4 - 3\mathbf{i}}{3 - 2\mathbf{i}} = u + \mathbf{i}v$$

$$4 - 3\mathbf{i} = (3 - 2\mathbf{i})(u + \mathbf{i}v) = (3u + 2v) + \mathbf{i}(-2u + 3v).$$

Mamy więc układ równań

$$\begin{cases} 3u + 2v &= 4 \\ -2u + 3v &= -3. \end{cases}$$

Rozwiązujemy to, i otrzymujemy

$$u + \mathbf{i}v = \frac{18}{13} - \mathbf{i} \frac{1}{13}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź granicę ciągu:

$$a_n = \frac{n^2 + 2}{n^3 + 1} + \frac{n^2 + 4}{n^3 + 2} + \frac{n^2 + 6}{n^3 + 3} + \cdots + \frac{n^2 + 2n}{n^3 + n}$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że składników w sumie jest n , i każdy jest mniejszy lub równy

$$\frac{n^2 + 2n}{n^3 + 1},$$

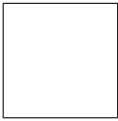
oraz większy lub równy

$$\frac{n^2 + 2}{n^3 + n}.$$

Mamy więc:

$$\frac{1 + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = n \cdot \frac{n^2 + 2}{n^3 + n} \leq a_n \leq n \cdot \frac{n^2 + 2n}{n^3 + 1} = \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^3}}.$$

Ciągi po lewej i prawej stronie zbiegają do 1, więc $\{a_n\}$ też zbiega do 1, z 3 ciągów.



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Pokaż, że jeżeli $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ oraz ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

Rozwiązanie: Ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, czyli

$$\exists M \forall n \in \mathbf{N} \quad |b_n| \leq M.$$

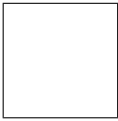
Jeżeli wszystkie $b_n = 0$ to ciąg $(a_n \cdot b_n)$ jest stale równy 0, i zadanie jest zrobione. Jeżeli nie, to $M > 0$. Niech $\epsilon > 0$ będzie dane. Z faktu, że $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \geq n_0 \quad |a_n| < \epsilon/M.$$

Wtedy, dla $n \geq n_0$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq |a_n| \cdot M < \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon.$$

A więc, z definicji, $(a_n \cdot b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.



Pierwsza litera nazwiska

6

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt[3]{n-1}}$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$\frac{1}{(2n+1)\sqrt[3]{n-1}} \leq \frac{1}{2n\sqrt[3]{n-1}} \leq \frac{1}{2n\sqrt[3]{n-n/2}},$$

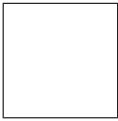
przy czym druga nierówność jest prawdziwa dla $n \geq 2$. Mamy więc, dla $n \geq 2$

$$\frac{1}{(2n+1)\sqrt[3]{n-1}} \leq \frac{1}{2^{1-1/3}} \frac{1}{n^{4/3}},$$

więc nasz szereg jest zbieżny z kryterium porównawczego, bo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$$

jest zbieżny ($4/3 > 1$).



Pierwsza litera nazwiska

7

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n^4}.$$

Rozwiązanie: Stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\left| \frac{\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)^4}}{\frac{3^n}{2^n n^4}} \right| = \frac{3}{2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^4 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1+1/n} \right)^4 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2}.$$

Szereg jest więc rozbieżny, bo $3/2 > 1$.