Pierwsza litera nazwiska

1

Kolokwium 1
9.11.18

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność:

$$\frac{6-3x}{2+x} > 1$$

Rozwiązanie: Rozpatrujemy przypadki $x < -2$ i $x > -2$ ($x = -2$ jest wykluczony):
<u>$x < -2$</u>:

$$\begin{aligned} \frac{6-3x}{2+x} &> 1 \\ 6-3x &< 2+x \\ 4 &< 4x \\ 1 &< x. \end{aligned}$$

W tym przypadku nie ma rozwiązań.
<u>$x > -2$</u>:

$$\begin{aligned} \frac{6-3x}{2+x} &> 1 \\ 6-3x &> 2+x \\ 4 &> 4x \\ x &< 1, \end{aligned}$$

czyli w tym przypadku rozwiązaniami są $x \in (-2, 1)$. Ostatecznie, rozwiązaniem jest przedział $(-2, 1)$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź kresy górny i dolny zbioru
$$A = \left\{ \frac{1}{2n} + \frac{3}{k^2}; n, k \in \mathbf{N},\ n, k > 0 \right\}.$$

Rozwiązanie: Zaczniemy od $\inf A$. Zauważmy, że wszystkie elementy A są dodatnie. 0 jest więc ograniczeniem A od dołu. Chcemy pokazać, że jest największym ograniczeniem od dołu. Weźmy dowolne $\delta > 0$. Weźmy liczbę $n \in \mathbf{N}$ taką, że $n > 1/\delta$ (czyli $1/2n < \delta/2$). Taka liczba istnieje, bo zbiór $\mathbf{N}$ nie jest ograniczony od góry. Podobnie, znajdźmy $k \in \mathbf{N}$ takie, że $k > \sqrt{6/\delta}$ (czyli $3/k^2 < \delta/2$). Taką liczbę znajdziemy podobnie jak poprzednią. Wtedy:
$$\frac{1}{2n} + \frac{3}{k^2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$
Znaleźliśmy więc element A mniejszy od δ, więc δ nie jest ograniczeniem od dołu. Ponieważ δ była dowolna dodatnia, więc 0 jest największym ograniczeniem A od dołu: $0 = \inf A$. Teraz, skoro $n \geq 1$, $k \geq 1$ to $\forall\ k, n \in \mathbf{N}, k, n > 0$ mamy
$$\frac{1}{2n} + \frac{3}{k^2} \leq \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{3}{1^2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{1} = \frac{7}{2}.$$
Liczba $\frac{7}{2}$ jest więc ograniczeniem A od góry, i najmniejszym takim ograniczeniem, bo $\frac{7}{2} \in A$. Mamy więc $\sup A = \frac{7}{2}$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz:

$$\frac{4-3\,\mathbf{i}}{3-2\,\mathbf{i}}.$$

Rozwiązanie: Oznaczmy iloraz przez $u+\mathbf{i}v$. Tak więc

$$\frac{4-3\,\mathbf{i}}{3-2\,\mathbf{i}} = u+\mathbf{i}\,v$$

$$4-3\,\mathbf{i} = (3-2\,\mathbf{i})(u+\mathbf{i}\,v) = (3u+2v)+\mathbf{i}\,(-2u+3v).$$

Mamy więc układ równań

$$\begin{cases} 3u+2v & = 4 \\ -2u+3v & = -3. \end{cases}$$

Rozwiązujemy to, i otrzymujemy

$$u+\mathbf{i}\,v = \frac{18}{13} - \mathbf{i}\,\frac{1}{13}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź granicę ciągu:

$$a_n = \frac{n^2+2}{n^3+1} + \frac{n^2+4}{n^3+2} + \frac{n^2+6}{n^3+3} + \cdots + \frac{n^2+2n}{n^3+n}$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że składników w sumie jest n, i każdy jest mniejszy lub równy

$$\frac{n^2+2n}{n^3+1},$$

oraz większy lub równy

$$\frac{n^2+2}{n^3+n}.$$

Mamy więc:

$$\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = n \cdot \frac{n^2+2}{n^3+n} \le a_n \le n \cdot \frac{n^2+2n}{n^3+1} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^3}}.$$

Ciągi po lewej i prawej stronie zbiegają do 1, więc $\{a_n\}$ też zbiega do 1, z 3 ciągów.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Pokaż, że jeżeli $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ oraz ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, to

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

Rozwiązanie: Ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, czyli

$$\exists\ M\ \forall\ n \in \mathbf{N} \quad |b_n| \leq M.$$

Jeżeli wszystkie $b_n = 0$ to ciąg $(a_n \cdot b_n)$ jest stale równy 0, i zadanie jest zrobione. Jeżeli nie, to $M > 0$. Niech $\epsilon > 0$ będzie dane. Z faktu, że $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\exists\ n_0 \in \mathbf{N}\ \forall\ n \geq n_0 \quad |a_n| < \epsilon/M.$$

Wtedy, dla $n \geq n_0$

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq |a_n| \cdot M < \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon.$$

A więc, z definicji, $(a_n \cdot b_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt[3]{n-1}}$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$\frac{1}{(2n+1)\sqrt[3]{n-1}} \leq \frac{1}{2n\sqrt[3]{n-1}} \leq \frac{1}{2n\sqrt[3]{n-n/2}},$$

przy czym druga nierówność jest prawdziwa dla $n \geq 2$. Mamy więc, dla $n \geq 2$

$$\frac{1}{(2n+1)\sqrt[3]{n-1}} \leq \frac{1}{2^{1-1/3}} \, \frac{1}{n^{4/3}},$$

więc nasz szereg jest zbieżny z kryterium porównawczego, bo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$$

jest zbieżny $(4/3 > 1)$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n\, n^4}.$$

Rozwiązanie: Stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\left| \frac{\dfrac{3^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)^4}}{\dfrac{3^n}{2^n n^4}} \right| = \frac{3}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^4 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2}.$$

Szereg jest więc rozbieżny, bo $3/2 > 1$.