Pierwsza litera nazwiska

Kolokwium
7.12.18

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność i ew. zbieżność absolutną szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}.$$

Rozwiązanie: Zbadamy najpierw zbieżność absolutną, czyli zbieżność szeregu wartości bezwzględnych.

$$\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}\right| = \frac{\sqrt{n}}{n+100} \geq \frac{\sqrt{n}}{n+100\,n} = \frac{1}{101}\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{101}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Z kryterium porównawczego widzimy, że szereg wartości bezwzględnych nie jest zbieżny, a więc szereg wyjściowy nie jest zbieżny absolutnie. Rozważmy teraz samą zbieżność. Szereg jest naprzemienny, więc skorzystamy z kryterium Leibniza. Potrzebujemy

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1+100} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+100},$$

(dodatkowo zauważamy, że $\sqrt{n}/(n+100) \to 0$). Mamy

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} \leq \frac{n+1+100}{n+100}$$
$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{n+100}$$
$$1+\frac{1}{n} \leq 1+\frac{2}{n+100}+\frac{1}{(n+100)^2}.$$

Zauważmy, że dla $n \geq 100$ mamy $n+100 \leq 2n$, czyli

$$\frac{1}{n} \leq \frac{2}{n+100}.$$

Nierówność więc zachodzi. Początkowe wyrazy nie mają wpływu na zbieżność szeregu, więc szereg, jako naprzemienny jest zbieżny z kryterium Leibniza (ale nie absolutnie).

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź punkty różniczkowalności i nieróżniczkowalności funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\big(1/x\big) & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Dla wszystkich $x \neq 0$ dana funkcja jest różniczkowalna jako złożenie oraz iloczyn funkcji różniczkowalnych. Do rozpatrzenia pozostaje punkt $x = 0$. Zbadamy istnienie pochodnej w 0 z definicji:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} h \sin\big(1/h\big). \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$-|h| \leq h \sin\big(1/h\big) \leq |h|,$$

więc z 3 funkcji granica istnieje (i jest równa 0). Funkcja jest więc różniczkowalna w każdym punkcie.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź wartości najmniejszą i największą podanej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}, \qquad [0, 3].$$

Rozwiązanie: Mamy do rozważenia wartości funkcji na końcach przedziału, czyli w 0 i 3, w punktach nieróżniczkowalności czyli 0 i 2 (wykładnik $2/3 < 1$) oraz w ew. punktach zerowania się pochodnej. Liczymy pochodną, aby znaleźć te punkty.

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(x^2 - 2x\right)^{-1/3}(2x - 2).$$

Widzimy, że jedynym punktem, w którym pochodna się zeruje jest $x = 1$.

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 0, \quad f(3) = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}.$$

Wartość najmniejsza to 0, a wartość największa to $\sqrt[3]{9}$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź granicę funkcji:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}.$$

Rozwiązanie: Jest to wyrażenie nieoznaczone postaci $\frac{0}{0}$, więc stosujemy regułę de l'Hospitala:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} &\overset{\text{d l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3\sin^2 x\cos x} \\
&= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\frac{1}{\cos x} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ostatnia granica w przedostatniej linijce to również wyrażenie nieoznaczone, ale nie musimy stosować ponownie de l'Hospitala, ponieważ tą granicę znamy.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n10^{n+2}}.$$

Rozwiązanie: Ustalamy x i stosujemy kryterium d'Alemberta:

$$\left|\frac{x^{2(n+1)-1}}{(n+1)\,10^{n+3}} \cdot \frac{n\,10^{n+2}}{x^{2n-1}}\right| = |x|^2\,\frac{n}{n+1}\,\frac{1}{10} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{|x|^2}{10}.$$

Widzimy, że szereg jest zbieżny, jeżeli $|x|^2 < 10$ i rozbieżny, jeżeli $|x|^2 > 10$. Wnioskujemy, że promień zbieżności jest równy $\sqrt{10}$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Dla jakich wartości a, b punkt $(1,3)$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji:

$$f(x) = ax^3 + bx^2.$$

Rozwiązanie: Jeżeli punkt $(1,3)$ jest punktem wykresu, to $f(1) = 3$. Mamy więc pierwsze równanie:

$$a + b = 3.$$

Liczymy drugą pochodną:

$$f''(x) = (3ax^2 + 2bx)' = 6ax + 2b.$$

To jest funkcja liniowa, więc w swoim miejscu zerowym zmienia znak. Taki punkt jest więc punktem przegięcia wykresu f. Jeżeli 1 ma być miejscem zerowym f'', to musi być

$$6a + 2b = 0.$$

Mamy więc drugie równanie, i rozwiązując prosty układ 2 równań otrzymujemy $a = -\frac{3}{2}$ i $b = \frac{9}{2}$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Dla $x > 0$ udowodnij nierówności:

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x.$$

(log to logarytm naturalny!)

Rozwiązanie: Rozważamy lewą nierówność:

$$f(x) = \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}, \qquad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0.$$

W takim razie, z tw. o wartości średniej, dla $x > 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) > 0, \qquad c \in (0, x),$$

a więc $f(x) > 0$. Podobnie prawa nierówność:

$$f(x) = x - \log(1+x), \qquad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0.$$

W takim razie, z tw. o wartości średniej, dla $x > 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) > 0, \qquad c \in (0, x),$$

a więc $f(x) > 0$.