Pierwsza litera nazwiska

Kolokwium 3
4.01.19

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz całkę:

$$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx.$$

Rozwiązanie: Podstawiamy:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx &= \left\{ \begin{array}{c} t = \tan x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right\} \\ &= \int \sqrt{t}\, dt \\ &= \frac{2}{3}\, t^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3}\, \tan^{2/3} x + C.\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz całkę:

$$\int \frac{\log x}{x^3}\,dx.$$

(Uwaga: log to logarytm naturalny.)

Rozwiązanie: Zauważamy, że:

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3} = \Big(-\frac{1}{2}\,x^{-2}\Big)',$$

i całkujemy przez części:

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{x^3}\,dx &= \int \log x \Big(-\frac{1}{2}\,x^{-2}\Big)'\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{\log x}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,x^{-2}\,dx\\ &= -\frac{\log x}{2\,x^2} + \frac{1}{2}\int x^{-3}\,dx\\ &= -\frac{\log x}{2x^2} - \frac{1}{4}\,x^{-2} + C\\ &= -\,\frac{2\log x + 1}{4\,x^2} + C.\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Używając wzoru Taylora znajdź najlepsze oszacowanie błędu przybliżenia:

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}.$$

Rozwiązanie: Używamy wzoru Taylora dla $f(x) = e^x$ w 0 i mamy

$$e = f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{f^{(5)}(\theta)}{5!}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

czyli błąd przybliżenia to

$$\frac{e^\theta}{5!} = \frac{e^\theta}{120} \leq \frac{e}{120}.$$

To jest najlepsze możliwe oszacowanie przy pomocy wzoru Taylora, bo o θ nie wiemy nic poza $0 < \theta < 1$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$$

z dokładnością do $0,001$ korzystając ze wzoru Taylora dla funkcji e^x.

Rozwiązanie: Dla $f(x) = e^x$ mamy $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = f(-\frac{1}{4})$. Piszemy więc, zgodnie ze wzorem Taylora:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = f\Big(-\frac{1}{4}\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\Big(-\frac{1}{4}\Big)^k + \frac{f^{(n)}(-\frac{\theta}{4})}{n!}\Big(-\frac{1}{4}\Big)^n.$$

Błąd przybliżenia:

$$\Big|\frac{f^{(n)}(-\frac{\theta}{4})}{n!}\Big(-\frac{1}{4}\Big)^n\Big| = \frac{e^{-\frac{\theta}{4}}}{n!}\,\frac{1}{4^n} < \frac{1}{n!\cdot 4^n}.$$

Dla jakiego najmniejszego n to wyrażenie jest $\leq 0,001$? Spróbujmy $n = 4:$

$$24 \cdot 4^4 = 96 \cdot 64 > 6000.$$

Czyli OK. Spróbujmy $n = 3:$

$$6 \cdot 4^3 = 6 \cdot 64 = 384 < 1000.$$

Czyli błąd jest za duży. A więc najmniejsze możliwe n to 4. Liczymy przybliżenie:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \simeq 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\big(-\frac{1}{4}\big)^2 + \frac{1}{6}\,\big(-\frac{1}{4}\big)^3 = \frac{299}{384}.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Rozwiń funkcję
$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$$
w szereg Maclaurina i znajdź promień zbieżności tego szeregu.

Rozwiązanie: Rozkładamy f na ułamki proste:
$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \frac{3}{1-x} + \frac{2}{1+2x},$$
i wyznaczmy n-tą pochodną:
$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{n!\ 2^{n+1}}{(1+2x)^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = n! + (-1)^n\, n!\, 2^{n+1}.$$
Otrzymujemy więc rozwinięcie w szereg Maclaurina:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n\, 2^{n+1})\, x^n.$$
Promień zbieżności obliczymy korzystając z kryt. d'Alemberta. Ustalamy $x \neq 0$ i liczymy:
$$\left| \frac{1 + (-1)^{n+1}\, 2^{n+2}}{1 + (-1)^n\, 2^{n+1}}\ \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \frac{2 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 + \frac{1}{2^{n+1}}}\, |x| \ \longrightarrow\ 2|x|.$$
Z kryt. d'Alemberta wynika więc, że szereg jest zbieżny dla $|x| < \frac{1}{2}$ i rozbieżny dla $|x| > \frac{1}{2}$. Promień zbieżności wynosi więc $\frac{1}{2}$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Oblicz całkę:

$$\int \frac{5^{\sqrt{x}}\, dx}{\sqrt{x}}.$$

Rozwiązanie: Całkujemy przez podstawienie:

$$\begin{aligned}
\int \frac{5^{\sqrt{x}}\, dx}{\sqrt{x}} &= \left\{ \begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ 2dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{array} \right\} \\
&= 2 \int 5^t \, dt \\
&= 2\, \frac{5^t}{\log 5} + C \\
&= 2\, \frac{5^{\sqrt{x}}}{\log 5} + C.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 7. Oblicz całkę:

$$\int x\, e^{x^2} (x^2+2)\, dx.$$

Rozwiązanie: Zaczynamy przez podstawienie:

$$\int x\, e^{x^2} (x^2+2)\, dx = \left\{ \begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int e^t (t+2)\, dt,$$

a następnie przez części:

$$\frac{1}{2} \int e^t (t+2)\, dt = \frac{1}{2} e^t (t+2) - \frac{1}{2} \int e^t\, dt = \frac{1}{2} e^t (t+2) - \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2+1) + C.$$