

Pierwsza litera nazwiska

1

**Kolokwium 3**  
**4.01.19**

Nazwisko i imię:

**Zadanie 1.** Oblicz całkę:

$$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x} dx.$$

**Rozwiązanie:** Podstawiamy:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \tan x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right\} \\ &= \int \sqrt{t} dt \\ &= \frac{2}{3} t^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3} \tan^{2/3} x + C. \end{aligned}$$

Nazwisko i imię:

**Zadanie 2.** Oblicz całkę:

$$\int \frac{\log x}{x^3} dx.$$

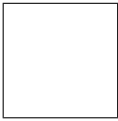
(Uwaga: log to logarytm naturalny.)

**Rozwiązanie:** Zauważamy, że:

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3} = \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)',$$

i całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{x^3} dx &= \int \log x \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)' dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\log x}{x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} x^{-2} dx \\ &= -\frac{\log x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int x^{-3} dx \\ &= -\frac{\log x}{2x^2} - \frac{1}{4} x^{-2} + C \\ &= -\frac{2 \log x + 1}{4x^2} + C. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

3

**Nazwisko i imię:**

**Zadanie 3.** Używając wzoru Taylora znajdź najlepsze oszacowanie błędu przybliżenia:

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}.$$

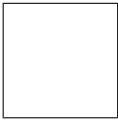
**Rozwiązanie:** Używamy wzoru Taylora dla  $f(x) = e^x$  w 0 i mamy

$$e = f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{f^{(5)}(\theta)}{5!}, \quad 0 < \theta < 1,$$

czyli błąd przybliżenia to

$$\frac{e^\theta}{5!} = \frac{e^\theta}{120} \leq \frac{e}{120}.$$

To jest najlepsze możliwe oszacowanie przy pomocy wzoru Taylora, bo o  $\theta$  nie wiemy nic poza  $0 < \theta < 1$ .



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

**Zadanie 4.** Oblicz

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$$

z dokładnością do 0,001 korzystając ze wzoru Taylora dla funkcji  $e^x$ .

**Rozwiązanie:** Dla  $f(x) = e^x$  mamy  $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = f(-\frac{1}{4})$ . Piszemy więc, zgodnie ze wzorem Taylora:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \left(-\frac{1}{4}\right)^k + \frac{f^{(n)}(-\frac{\theta}{4})}{n!} \left(-\frac{1}{4}\right)^n.$$

Błąd przybliżenia:

$$\left| \frac{f^{(n)}(-\frac{\theta}{4})}{n!} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right| = \frac{e^{-\frac{\theta}{4}}}{n!} \frac{1}{4^n} < \frac{1}{n! \cdot 4^n}.$$

Dla jakiego najmniejszego  $n$  to wyrażenie jest  $\leq 0,001$ ? Spróbujmy  $n = 4$ :

$$24 \cdot 4^4 = 96 \cdot 64 > 6000.$$

Czyli OK. Spróbujmy  $n = 3$ :

$$6 \cdot 4^3 = 6 \cdot 64 = 384 < 1000.$$

Czyli błąd jest za duży. A więc najmniejsze możliwe  $n$  to 4. Liczymy przybliżenie:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \simeq 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{299}{384}.$$

Nazwisko i imię:

**Zadanie 5.** Rozwiń funkcję

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$$

w szereg Maclaurina i znajdź promień zbieżności tego szeregu.

**Rozwiązanie:** Rozkładamy  $f$  na ułamki proste:

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \frac{3}{1-x} + \frac{2}{1+2x},$$

i wyznaczmy  $n$ -tą pochodną:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{n! 2^{n+1}}{(1+2x)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n! + (-1)^n n! 2^{n+1}.$$

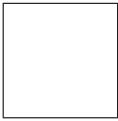
Otrzymujemy więc rozwinięcie w szereg Maclaurina:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n 2^{n+1}) x^n.$$

Promień zbieżności obliczymy korzystając z kryt. d'Alemberta. Ustalamy  $x \neq 0$  i liczymy:

$$\left| \frac{1 + (-1)^{n+1} 2^{n+2}}{1 + (-1)^n 2^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \frac{2 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 + \frac{1}{2^{n+1}}} |x| \rightarrow 2|x|.$$

Z kryt. d'Alemberta wynika więc, że szereg jest zbieżny dla  $|x| < \frac{1}{2}$  i rozbieżny dla  $|x| > \frac{1}{2}$ . Promień zbieżności wynosi więc  $\frac{1}{2}$ .



Pierwsza litera nazwiska

6

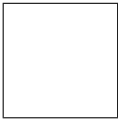
Nazwisko i imię:

**Zadanie 6.** Oblicz całkę:

$$\int \frac{5^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$$

**Rozwiązanie:** Całkujemy przez podstawienie:

$$\begin{aligned} \int \frac{5^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}} &= \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ 2dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{array} \right\} \\ &= 2 \int 5^t dt \\ &= 2 \frac{5^t}{\log 5} + C \\ &= 2 \frac{5^{\sqrt{x}}}{\log 5} + C. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

**Zadanie 7.** Oblicz całkę:

$$\int x e^{x^2} (x^2 + 2) dx.$$

**Rozwiązanie:** Zaczynamy przez podstawienie:

$$\int x e^{x^2} (x^2 + 2) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int e^t (t + 2) dt,$$

a następnie przez części:

$$\frac{1}{2} \int e^t (t + 2) dt = \frac{1}{2} e^t (t + 2) - \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t (t + 2) - \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 + 1) + C.$$