ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 1

7.10.2019

(1) Przedstaw liczbę $0,1(270)$ w postaci ułamka zwykłego.

(2) Pokaż, że rozwinięcie

$$x = 0,12345678910111213141516171819202122 23\ldots$$

złożone z kolejnych liczb naturalnych reprezentuje liczbę niewymierną.

(3) Podaj trzy pierwsze cyfry po przecinku liczby $\sqrt[3]{7}$.

(4) Pokaż, że liczby $\sqrt{24}$ i $\sqrt[5]{10}$ są niewymierne.

(5) Udowodnij że zbiór liczb całkowitych nie jest ograniczony ani od góry ani od dołu.

(6) Podaj przykład liczby x takiej że:

(a) $0 < x < 1$ i x jest niewymierna,

(b) $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$ i x jest wymierna,

(c) x^2 i x^3 są niewymierne, ale x^5 jest wymierna,

(d) x^4 i x^6 są wymierne, ale x^5 jest niewymierna,

(e) $(x+1)^2$ jest niewymierna,

(7) Korzystając z definicji znajdź kresy górny i dolny odcinka otwartego $(1,2)$.

(8) Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{k}; n, k \in \mathbb{N}\right\}.$$

(9) Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

złożonego z odwrotności kolejnych liczb naturalnych.

(10) Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\right\}$$

(11) Udowodnij, że liczba $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ jest niewymierna.

(12) Udowodnij, że liczba $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{6}$ jest niewymierna.

(13) Udowodnij, że każdym przedziale otwartym (a, b) istnieje liczba niewymierna.

(14) Udowodnij, że dowolne liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność

$$\big||x| - |y|\big| \le |x - y|.$$

(15) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prawdziwa jest nierówność

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

(16) Znajdź kresy górny i dolny zbioru

$$\{x + y : \ x, y > 0, \ [x] + [y] = 3\}.$$

(17) Wykaż, że

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}, \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2},$$

gdzie $\max\{x, y\}$ oznacza większą z liczb x i y, a $\min\{x, y\}$ mniejszą z tych liczb.

(18) Pokaż, że $|a - b - c| \geq |a| - |b| - |c|$

(19) Niech $x = 1,0234107...$, $y = 1,0235106...$ Czy jest prawdą, że

(a) $1,02 < x \leq 1,03$?

(b) $x + y > 2,04692$?

(c) $x < y$?

(20) Rozwiąż następujące równania i nierówności:

(a) $|x + 1| = |x - 1|$,

(b) $|1 - 2x| + |2x - 6| = x$,

(c) $|3x| + 2 \leq |x - 6|$,

(d) $|x^2 - 25| \leq 24$,

(e) $|x| + |x + 1| + |x + 2| = x^2 + 2x + \frac{29}{9}$,

(f) $|x + 10| = |2x + 1| + 3$,

(g) $\dfrac{6 - 2x}{3 + x} > 2$,

(h) $0 < \dfrac{2x - 1}{x - 1} < 2$,

(i) $\dfrac{2x - 1}{x + 4} < \dfrac{x}{x + 4} < \dfrac{x + 1}{x + 4}$.

(21) Czy jest prawdą, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność:

(a) $x \leq |x|$,

(b) $-x \leq x$,

(c) $1 \leq |1 + x| + x$,

(d) $-1 \leq |-1 + x| + x$,

(e) $1 \leq |1 - x| + x$,

(f) $-1 \leq |-1 - x| + x$,

(g) $x \leq |x + 1| + 1$,

(h) $-x \leq |-x + 1| + 1$,

(i) $x \leq |x - 1| + 1$,

(j) $-x \leq |-x - 1| + 1$.

(22) Udowodnij następujący wzór:

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + \cdots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{2n - 1}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4}.$$

(23) Udowodnij następujący wzór (dla $q \neq 1$):

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

(24) Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że:

$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \cdots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(25) Udowodnij następujący wzór:

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} = (n - 1) \cdot 2^n + 1.$$