

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 9

2.12.19

(1) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{7x} - 1}{x} & : x \neq 0, \\ 7 & : x = 0. \end{cases}$$

Oblicz $f'(0)$.

(2) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos(x) - 1} & : x \neq 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \\ A & : x = 0. \end{cases}$$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

(3) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 3e^x + 2}{x^2} & : x \neq 0, \\ A & : x = 0. \end{cases}$$

Dla jakiego A istnieje $f'(0)$ i ile wynosi?

(4) Oblicz pochodną rzędu 3 funkcji f danej wzorem:

(a) $(x+1)^6$, (b) $x^6 - 4x^3 + 4$, (c) $\frac{1}{1-x}$,
 (d) $x^3 \log x$, (e) e^{2x-1} , (f) $(x^2+1)^3$,
 (g) e^{x^2} , (h) $\log(x^2)$, (i) $(x-7)^{50}$.

(5) Wyprowadź wzór na pochodną rzędu n funkcji f danej wzorem:

(a) $\log(x^{10})$, (b) $x \log(x)$, (c) \sqrt{x} ,
 (d) $\sin^2(x)$, (e) $\frac{1-x}{1+x}$, (f) xe^x ,
 (g) $\sin(5x)$, (h) x^7 , (i) e^{4x} ,
 (j) $x + \frac{1}{x}$, (k) $x^2 e^{-x}$.

(6) Udowodnij, że

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

(7) Oblicz przybliżone wartości następujących liczb korzystając trzech początkowych wyrazów (zerowego, pierwszego i drugiego) odpowiednio dobranego szeregu Taylora. Oszacuj błąd przybliżenia na podstawie wzoru Taylora:

(a) $\sqrt{24}$, (b) $\sqrt[3]{126}$, (c) $\sqrt[7]{126}$,
 (d) $\sin(\frac{1}{10})$, (e) $\arctan(\frac{1}{10})$, (f) $\sqrt{50}$.