Pierwsza litera nazwiska

1

Egzamin 1 termin
10.02.20

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\tan x}.$$

Rozwiązanie: To jest wyrażenie nieoznaczone postaci 0^0, więc przekształcamy je

$$(\tan x)^{\tan x} = e^{\tan x \log \tan x} = e^{\frac{\sin x(\log \sin x - \log \cos x)}{\cos x}}.$$

Jedynym wyrażeniem nieoznaczonym w 0 jest

$$\sin x \log \sin x.$$

Korzystamy z de l'Hospitala

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log \sin x}{\frac{1}{\sin x}} \stackrel{\text{de l'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{\frac{-1}{\sin^2 x} \cdot \cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \sin x = 0$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\tan x} = e^0 = 1.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Sprawdź zbieżność całki niewłaściwej, i oblicz ją, jeżeli jest zbieżna

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x \log^{3/2} x}.$$

Rozwiązanie: Całka ma dwie niewłaściwości, w 1 (bo funkcja eksploduje) i w ∞. Dzielimy przedział całkowania na $[1, 2]$ i $[2, \infty)$. Sprawdzamy zbieżność na przedziale $[1, 2]$.

$$\int_{1+\epsilon}^2 \frac{dx}{x \log^{3/2} x} = \left\{ \begin{array}{l} t = \log x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\} = \int_{\log(1+\epsilon)}^{\log 2} \frac{dt}{t^{3/2}} = -2 \left. \frac{1}{t^{1/2}} \right|_{\log(1+\epsilon)}^{\log 2} = \frac{2}{\log(1+\epsilon)^{1/2}} - \frac{2}{\log 2^{1/2}}.$$

Gdy $\epsilon \to 0^+$ mianownik pierwszego ułamka dąży do 0, więc całka nie jest zbieżna. Zbieżność całki na $[2, \infty)$ nie ma już znaczenia.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Udowodnij, że dla dowolnego $0 \leq x \leq 1$ oraz $p > 1$ zachodzą nierówności

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że mamy $x^p \leq x,\ (1-x)^p \leq (1-x)$, więc prawa nierówność jest natychmiastowa. Rozważmy funkcję

$$f(x) = x^p + (1-x)^p.$$

Obliczamy pochodną,

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1}.$$

Widzimy, że funkcja maleje na przedziale $[0, 1/2]$ i rośnie na przedziale $[1/2, 1]$. W punkcie $1/2$ ma więc globalne minimum. Mamy więc

$$f(x) \geq f(1/2) = (1/2)^p + (1/2)^p = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Uwaga: log to logarytm naturalny.

Rozwiązanie: Piszemy

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x).$$

Widać, że wystarczy rozwinąć jedną z tych funkcji, a następnie odjąć. Niech $g(x) = \log(1+x)$. Wtedy

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{1+x} \\
g''(x) &= (-1)\frac{1}{(1+x)^2} \\
g'''(x) &= (-1)(-2)\frac{1}{(1+x)^3} \\
&\dots \\
g^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n}, \qquad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Otrzymujemy

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Tak więc

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) - g(-x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^n x^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} + 1\right) \frac{x^n}{n} \\
&= 2 \sum_{\substack{n=1 \\ \text{nieparz}}} \frac{x^n}{n}.
\end{aligned}$$

Jest to rozwinięcie w szereg potęgowy, więc musi to być rozwinięcie w szereg Maclaurina.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz długość wykresu funkcji

$$f(x) = \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{1}{2}\,\log x, \qquad 1 \le x \le e.$$

Rozwiązanie: Obliczamy

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2x},$$

więc

$$1 + f'^2(x) = 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2.$$

W takim razie

$$\begin{aligned} L &= \int_1^e \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx \\ &= \int_1^e \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx \\ &= \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\,\log x\right)\Big|_1^e \\ &= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{e^2+1}{4}. \end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Wyznacz zbiór tych x, dla których podany szereg funkcyjny jest zbieżny, i sprawdź, czy zbieżność jest jednostajna na tym zbiorze.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)\big(\sqrt{x(1-x)}\big)^n.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że szereg jest zbieżny dla $x \in [0,1]$. Poza tym przedziałem wyrazy w ogóle nie są określone. Na końcach wyrazy są zerami. Natomiast dla $x \in (0,1)$ mamy $q = \sqrt{x(1-x)} < 1$, i zbieżność szeregu można sprawdzić na przykład przez kryterium d'Alemberta. Sprawdzimy teraz, czy zbieżność jest jednostajna. Zauważmy, że wartość największa $x(1-x)$ na przedziale $[0,1]$ jest przyjęta w punkcie $1/2$ i wynosi $1/4$. Mamy więc

$$(n^2+1)\big(\sqrt{x(1-x)}\big)^n \leq (n^2+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad x \in [0,1].$$

Szereg liczbowy po prawej jest zbieżny, więc z kryterium Weierstrassa szereg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie na całej swojej dziedzinie $[0,1]$.