**Egzamin 2 termin**
25.02.20

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność punktową i ew. granicę na \mathbb{R} , oraz zbieżność jednostajną na przedziale $[-1, 1]$ ciągu funkcji

$$f_n(x) = n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Rozwiązanie: Piszemy

$$n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right) = x \cdot \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \quad \forall x,$$

co wynika z tego, że jak wiemy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

oraz z definicji Heinego granicy. Ciąg zbiega więc do $f(x) = x$ w każdym punkcie x . Sprawdzamy zbieżność jednostajną.

$$|f_n(x) - x| = |x| \cdot \left| \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} - 1 \right|.$$

Wiemy, że

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \left| \frac{\sin t}{t} \right| < \epsilon, \quad \forall |t| < \delta.$$

Weźmy $n_0 = \lceil \frac{1}{\delta} \rceil + 1$, wtedy

$$\forall x \in [-1, 1], n \geq n_0 \text{ mamy } \left| \frac{x}{n} \right| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} - 1 \right| < \epsilon.$$

Stąd, dla $x \in [-1, 1]$, $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - x| < 1 \cdot \epsilon.$$

Zbieżność jest więc jednostajna na $[-1, 1]$.

Nazwisko i imię:

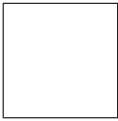
Zadanie 2. Sprawdź zbieżność całki niewłaściwej, i oblicz ją, jeżeli jest zbieżna

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx.$$

Rozwiązanie: Weźmy dowolne $M \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_1^M \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2} dx \end{array} \right\} \\ &= \int_{1/M}^1 te^{-t} dt \\ &= \int_{1/M}^1 t(-e^{-t})' dt \\ &= -te^{-t} \Big|_{1/M}^1 + \int_{1/M}^1 e^{-t} dt \\ &= -\frac{1}{e} + \frac{1}{M\sqrt[M]{e}} - e^{-t} \Big|_{1/M}^1 \\ &= -\frac{1}{e} + \frac{1}{M\sqrt[M]{e}} - \frac{1}{e} + \frac{1}{\sqrt[M]{e}} \\ &\xrightarrow{M \rightarrow \infty} -\frac{2}{e} + 1. \end{aligned}$$

Całka jest więc zbieżna, a jej wartość jest obliczona powyżej.



Pierwsza litera nazwiska

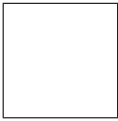
Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz całkę

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^2}}.$$

Rozwiązanie: Liczymy

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^2}} &= \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \\ dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \end{array} \right\} \\ &= 2 \int_1^2 \frac{dt}{1+t} \\ &= 2 \log |1+t| \Big|_1^2 \\ &= 2(\log 3 - \log 2) \\ &= 2 \log 3/2. \end{aligned}$$



Pierwsza litera nazwiska

4

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź punkt przecięcia stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ odpowiednio w punktach $(-1, -1)$ i $(2, 8)$.

Rozwiązanie:

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(-1) = 3$$

$$f'(2) = 12.$$

Styczne mają równania

$$y + 1 = 3(x + 1), \quad y - 8 = 12(x - 2).$$

Podstawiając

$$3(x + 1) - 1 - 8 = 12(x - 2)$$

$$9x = 24 - 6 = 18$$

$$x = 2$$

$$y = 3(x + 1) - 1 = 8.$$

Punkt przecięcia to $(2, 8)$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź punkty ciągłości i nieciągłości funkcji

$$f(x) = \{x\} - \{x\}^2.$$

Uwaga: $\{x\}$ to część ułamkowa: $\{x\} = x - [x]$.

Rozwiązanie: Jeżeli x nie jest liczbą całkowitą, to $x \in (k, k + 1)$ dla pewnego $k \in \mathbf{Z}$. Wtedy

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - k) - (x - k)^2 \\ &= x - k - x^2 + 2xk - k^2 \end{aligned}$$

czyli jest wielomianem 2 stopnia, a więc funkcją ciągłą na tym przedziale. Wszystkie punkty x nie będące liczbami całkowitymi są więc punktami ciągłości f . Rozważmy teraz $x_0 = k \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^-} (x - [x] - (x - [x])^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow k^-} (x - [x]) - \left(\lim_{x \rightarrow k^-} (x - [x]) \right)^2. \end{aligned}$$

Dla x w sąsiedztwie k po lewej stronie mamy $[x] = k - 1$, więc

$$\begin{aligned} &= k - (k - 1) - (k - (k - 1))^2 \\ &= 1 - 1^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Teraz granica prawostronna

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^+} (x - [x] - (x - [x])^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow k^+} (x - [x]) - \left(\lim_{x \rightarrow k^+} (x - [x]) \right)^2. \end{aligned}$$

Dla x w sąsiedztwie k po prawej stronie mamy $[x] = k$, więc

$$\begin{aligned} &= k - k - (k - k)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Granice obustronne istnieją i są równe, więc x_0 jest punktem ciągłości f . f jest więc ciągła w każdym punkcie.

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź wartości najmniejszą i największą funkcji

$$f(x) = |\sin(x)| + \frac{x}{2}$$

na przedziale $[-2\pi, 2\pi]$

Rozwiązanie: Do rozważenia najpierw są punkty krańcowa przedziału -2π , 2π oraz punkty nieróżniczkowalności. To jest możliwe tylko tam, gdzie $\sin x = 0$, czyli dodatkowo punkty $-\pi$, 0 , π . Sprawdzamy wartości

$$f(-2\pi) = -\pi, \quad f(-\pi) = -\pi/2, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = \pi/2, \quad f(2\pi) = \pi.$$

Tylko skrajne spośród tych wartości będą się dalej liczyły. Teraz sprawdzamy zera pochodnej. Dla $x \in [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi]$

$$f(x) = \sin x + x/2 \Rightarrow f'(x) = \cos x + 1/2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1/2.$$

W grę wchodzi więc punkty $-\frac{4\pi}{3}$ oraz $\frac{2\pi}{3}$, w których $\sin x = \sqrt{3}/2$. Sprawdzamy wartości

$$f\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}, \quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}.$$

Łatwo zauważyć, że żadna z tych wartości nie przekracza poprzednio wyznaczonych. Wartości te nie wchodzi więc w grę. Dla $x \in [-\pi, 0] \cup [\pi, 2\pi]$

$$f(x) = -\sin x + x/2 \Rightarrow f'(x) = -\cos x + 1/2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1/2.$$

Są to więc punkty $-\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{3}$, w których $\sin x = -\sqrt{3}/2$. Sprawdzamy wartości

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}, \quad f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{6}.$$

Pierwsza z tych wartości oczywiście się nie liczy, ale druga jest podejrzana o bycie największą. Sprawdźmy to

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{6} &? > \pi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &? > \frac{\pi}{6} \\ 3\sqrt{3} &? > \pi \end{aligned}$$

Ta ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, więc wartościami największą i najmniejszą funkcji f są $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{6}$ oraz $-\pi$.