Pierwsza litera nazwiska

Egzamin 2 termin
25.02.20

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność punktową i ew. granicę na $\mathbb{R}$, oraz zbieżność jednostajną na przedziale $[-1,1]$ ciągu funkcji

$$f_n(x) = n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Rozwiązanie: Piszemy

$$n \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right) = x \cdot \frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} x \qquad \forall x,$$

co wynika z tego, że jak wiemy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

oraz z definicji Heinego granicy. Ciąg zbiega więc do $f(x) = x$ w każdym punkcie x. Sprawdzamy zbieżność jednostajną.

$$|f_n(x) - x| = |x| \cdot \left|\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} - 1\right|.$$

Wiemy, że

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\ \left|\frac{\sin t}{t}\right| < \epsilon, \qquad \forall |t| < \delta.$$

Weźmy $n_0 = [\frac{1}{\delta}] + 1$, wtedy

$$\forall x \in [-1,1],\ n \geq n_0 \text{ mamy } \left|\frac{x}{n}\right| < \delta \ \Rightarrow\ \left|\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} - 1\right| < \epsilon.$$

Stąd, dla $x \in [-1,1],\ n \geq n_0$

$$|f_n(x) - x| < 1 \cdot \epsilon.$$

Zbieżność jest więc jednostajna na $[-1,1]$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Sprawdź zbieżność całki niewłaściwej, i oblicz ją, jeżeli jest zbieżna

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx.$$

Rozwiązanie: Weźmy dowolne $M \geq 1$

$$\begin{aligned}
\int_1^M \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx &= \left\{ \begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2}dx \end{array} \right\} \\
&= \int_{1/M}^1 te^{-t}\,dt \\
&= \int_{1/M}^1 t(-e^{-t})'dt \\
&= -te^{-t}\Big|_{1/M}^1 + \int_{1/M}^1 e^{-t}dt \\
&= -\frac{1}{e} + \frac{1}{M\sqrt[M]{e}} - e^{-t}\Big|_{1/M}^1 \\
&= -\frac{1}{e} + \frac{1}{M\sqrt[M]{e}} - \frac{1}{e} + \frac{1}{\sqrt[M]{e}} \\
&\xrightarrow{M\to\infty} \; -\frac{2}{e} + 1.
\end{aligned}$$

Całka jest więc zbieżna, a jej wartość jest obliczona powyżej.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz całkę
$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^2}}.$$

Rozwiązanie: Liczymy
$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^2}} &= \left\{\begin{array}{l} t=\sqrt{x+1} \\ dt=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}} \end{array}\right\} \\ &= 2\int_1^2 \frac{dt}{1+t} \\ &= 2\log|1+t|\Big|_1^2 \\ &= 2(\log 3-\log 2) \\ &= 2\log 3/2.\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź punkt przecięcia stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ odpowiednio w punktach $(-1, -1)$ i $(2, 8)$.
Rozwiązanie:

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$f'(-1) = 3$$
$$f'(2) = 12.$$

Styczne mają równania

$$y + 1 = 3(x + 1), \qquad y - 8 = 12(x - 2).$$

Podstawiając

$$3(x + 1) - 1 - 8 = 12(x - 2)$$
$$9x = 24 - 6 = 18$$
$$x = 2$$
$$y = 3(x + 1) - 1 = 8.$$

Punkt przecięcia to $(2, 8)$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź punkty ciągłości i nieciągłości funkcji
$$f(x) = \{x\} - \{x\}^2.$$

Uwaga: $\{x\}$ to część ułamkowa: $\{x\} = x - [x]$.

Rozwiązanie: Jeżeli x nie jest liczbą całkowitą, to $x \in (k, k+1)$ dla pewnego $k \in \mathbf{Z}$. Wtedy
$$\begin{aligned} f(x) &= (x-k) - (x-k)^2 \\ &= x - k - x^2 + 2xk - k^2 \end{aligned}$$
czyli jest wielomianem 2 stopnia, a więc funkcją ciągłą na tym przedziale. Wszystkie punkty x nie będące liczbami całkowitymi są więc punktami ciągłości f. Rozważmy teraz $x_0 = k \in \mathbf{Z}$.
$$\begin{aligned} \lim_{x\to k^-} f(x) &= \lim_{x\to k^-} (x - [x] - (x-[x])^2) \\ &= \lim_{x\to k^-} (x-[x]) - \big(\lim_{x\to k^-} (x-[x])\big)^2. \end{aligned}$$
Dla x w sąsiedztwie k po lewej stronie mamy $[x] = k-1$, więc
$$\begin{aligned} &= k - (k-1) - \big(k - (k-1)\big)^2 \\ &= 1 - 1^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$
Teraz granica prawostronna
$$\begin{aligned} \lim_{x\to k^+} f(x) &= \lim_{x\to k^+} (x - [x] - (x-[x])^2) \\ &= \lim_{x\to k^+} (x-[x]) - \big(\lim_{x\to k^+} (x-[x])\big)^2. \end{aligned}$$
Dla x w sąsiedztwie k po prawej stronie mamy $[x] = k$, więc
$$\begin{aligned} &= k - k - (k-k)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$
Granice obustronne istnieją i są równe, więc x_0 jest punktem ciągłości f. f jest więc ciągła w każdym punkcie.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź wartości najmniejszą i największą funkcji

$$f(x) = |\sin(x)| + \frac{x}{2}$$

na przedziale $[-2\pi, 2\pi]$

Rozwiązanie: Do rozważenia najpierw są punkty krańcowa przedziału -2π, 2π oraz punkty nierózniczkowalności. To jest możliwe tylko tam, gdzie $\sin x = 0$, czyli dodatkowo punkty $-\pi$, 0, π. Sprawdzamy wartości

$$f(-2\pi) = -\pi, \quad f(-\pi) = -\pi/2, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = \pi/2, \quad f(2\pi) = \pi.$$

Tylko skrajne spośród tych wartości będą się dalej liczyły. Teraz sprawdzamy zera pochodnej. Dla $x \in [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi]$

$$f(x) = \sin x + x/2 \Rightarrow f'(x) = \cos x + 1/2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1/2.$$

W grę wchodzą więc punkty $-\frac{4\pi}{3}$ oraz $\frac{2\pi}{3}$, w których $\sin x = \sqrt{3}/2$. Sprawdzamy wartości

$$f\Big(-\frac{4\pi}{3}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}, \qquad f\Big(\frac{2\pi}{3}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}.$$

Łatwo zauważyć, że żadna z tych wartości nie przekracza poprzednio wyznaczonych. Wartości te nie wchodzą więc w grę. Dla $x \in [-\pi, 0] \cup [\pi, 2\pi]$

$$f(x) = -\sin x + x/2 \Rightarrow f'(x) = -\cos x + 1/2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1/2.$$

Są to więc punkty $-\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{3}$, w których $\sin x = -\sqrt{3}/2$. Sprawdzamy wartości

$$f\Big(-\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}, \qquad f\Big(\frac{5\pi}{3}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{6}.$$

Pierwsza z tych wartości oczywiście się nie liczy, ale druga jest podejrzana o bycie największa. Sprawdźmy to

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{6} &\overset{?}{>} \pi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &\overset{?}{>} \frac{\pi}{6} \\ 3\sqrt{3} &\overset{?}{>} \pi \end{aligned}$$

Ta ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, więc wartościami największą i najmniejszą funkcji f są $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{6}$ oraz $-\pi$.