GEOMETRIA

ROK AKADEMICKI 2019/20

(ZADANIA DLA NAUCZYCIELI)

(1) W trapezie o wysokości 12 ramiona mają długości 15 i 20, a jedna z podstaw ma długość 50. Jaka jest długość drugiej podstawy?

(2) Uporządkować niemalejąco następujące liczby: $\sin 18°$, $\sin 36°$, $\sin 72°$, $\sin 144°$, $\cos 18°$, $\cos 36°$, $\cos 72°$, $\cos 144°$.

(3) Niech $0 < a \leq b \leq c$. Dokończyć i uzasadnić:
   (a) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy ...
   (b) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
   (c) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
   (d) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy ...
   (e) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę $120°$ wtedy i tylko wtedy, gdy ...
   (f) Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt o jednym z kątów mającym miarę $60°$ wtedy i tylko wtedy, gdy ...

(4) W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę $30°$, a boki AC i BC mają długości odpowiednio $\sqrt{3}$ oraz 1. Wyznaczyć długość boku AB.

(5) Środek okręgu opisanego na trójkącie leży na prostej przechodzącej przez jeden z jego wierzchołków i środek przeciwległego boku wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest ...

(6) Mając narysowany okrąg i jego środek, skonstruować kąt prosty przy użyciu samej linijki.

(7) Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wiadomo, że

$$\angle AOB = \angle ACB + 60° .$$

Wyznaczyć miarę kąta ACB .

(8) To samo pytanie, gdy O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

(9) Poniższe warunki dotyczą czworokąta wypukłego. Połączyć je w pary warunków równoważnych.
   (a) w czworokąt można wpisać okrąg
   (b) na czworokącie można opisać okrąg
   (c) czworokąt jest równoległobokiem
   (d) czworokąt jest rombem
   (e) czworokąt jest prostokątem
   (f) sumy miar przeciwległych kątów są równe
   (g) sumy długości przeciwległych boków są równe
   (h) sumy kwadratów długości przeciwległych boków są równe
   (i) przekątne są równej długości i dzielą się na połowy
   (j) przekątne są prostopadłe i dzielą się na połowy

(k) przekątne są prostopadłe
(l) przekątne dzielą się na połowy

(10) Czy istnieje czworokąt, którego boki mają długości (w podanej kolejności)
(a) 1, 3, 10, 15
(b) 2, 4, 10, 15
(c) 3, 27, 10, 15
(d) 4, 30, 10, 15

(11) Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 3, 4, 5 do boków tego trójkąta.

(12) Trzy kolejne boki wielokąta opisanego na okręgu mają długości a, b, c (z zachowaniem kolejności). Jaki warunek muszą spełniać a, b, c, aby było to możliwe?

(13) Na okręgu opisano pięciokąt o bokach 3, 4, 5, 6, 7 (w tej kolejności). Wyznaczyć położenie punktów styczności okręgu do boków pięciokąta.

(14) Pięć kolejnych boków wielokąta opisanego na okręgu ma długości a, b, c, d, e (z zachowaniem kolejności). Wykazać, że wówczas

$$b + d < a + c + e\ .$$

(15) Wykazać, że dla sześciokąta o bokach a, b, c, d, e, f (z zachowaniem kolejności) równość

$$a + c + e = b + d + f$$

jest warunkiem (koniecznym/dostatecznym) (niepotrzebne skreślić) na to, aby w sześciokąt można było wpisać okrąg. Pokazać na przykładzie, że nie jest to warunek (konieczny/dostateczny).

(16) Podać 4 przykłady parami niepodobnych trójkątów równoramiennych, z których każdy można podzielić na dwa trójkąty równoramienne.

(17) Dla których liczb naturalnych $n \geq 3$ poniższe zdanie jest prawdziwe
(a) Dowolny n-kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.
(b) Dowolny n-kąt wpisany w okrąg i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.
(c) Dowolny n-kąt opisany na okręgu i mający wszystkie boki równej długości jest foremny.
(d) Dowolny n-kąt opisany na okręgu i mający wszystkie kąty równej miary jest foremny.

(18) Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC. Ile co najwyżej może istnieć takich punktów D różnych od C, że proste AB i CD są prostopadłe, a przy tym

$$\angle ACB = \angle ADB\,?$$

(19) Dla której liczby naturalnej n w dowolnym n-kącie wypukłym liczba przekątnych jest k razy większa od liczby boków, jeżeli
(a) $k = 2$
(b) $k = 3$
(c) $k = 5$
(d) $k = 10$

(20) Dla których liczb naturalnych n istnieje n-kąt wypukły, którego każdy kąt wewnętrzny ma miarę 60° lub 160°?

(21) Dziewięciokąt $A_1A_2A_3 \ldots A_9$ jest foremny. Wyznaczyć miary kątów trójkąta
(a) $A_1A_3A_7$
(b) $A_2A_3A_8$

(c) $A_3A_4A_5$

(22) Dany jest dwunastokąt foremny $A_1A_2A_3 \dots A_{12}$. Dla podanych dwóch przekątnych wskazać trzecią przekątną przechodzącą przez ich punkt przecięcia.
(a) A_1A_7, A_3A_9
(b) A_1A_5, A_2A_8
(c) A_1A_5, A_3A_7
(d) A_1A_6, A_4A_9

(23) Dany jest jedenastokąt foremny $A_1A_2A_3 \dots A_{11}$. Połączyć podane czworokąty w pary czworokątów przystających
(a) $A_1A_2A_4A_9$
(b) $A_1A_3A_7A_{11}$
(c) $A_1A_4A_{10}A_{11}$
(d) $A_1A_6A_9A_{10}$
(e) $A_1A_4A_6A_{11}$
(f) $A_1A_2A_3A_9$
(g) $A_1A_6A_8A_{11}$
(h) $A_1A_3A_4A_8$
(i) Które czworokąty mają równe pola?

(24) Dany jest 13-kąt foremny $A_1A_2A_3 \dots A_{13}$. Dla podanych i, j wskazać taką liczbę k, że trójkąt $A_iA_jA_k$ jest trójkątem równoramiennym ostrokątnym
(a) $i = 1$, $j = 2$
(b) $i = 1$, $j = 5$
(c) $i = 1$, $j = 6$
(d) $i = 1$, $j = 7$

(25) Który punkt wewnątrz trójkąta równobocznego ma najmniejszą sumę odległości od jego boków?

(26) Który punkt wewnątrz trójkąta równobocznego ma najmniejszą sumę odległości od jego wierzchołków?

(27) Który punkt wewnątrz kwadratu ma najmniejszą sumę odległości od jego boków?

(28) Który punkt wewnątrz kwadratu ma najmniejszą sumę odległości od jego wierzchołków?

(29) W wierzchołkach kwadratu o boku 1 km znajdują się 4 domy. Czy można zbudować sieć dróg o łącznej długości mniejszej od $2\sqrt{2}$ km, umożliwiającą dojście z każdego domu do każdego innego?

(30) Obliczyć pole sześciokąta formenego o boku 1.

(31) Obliczyć pole dwunastokąta formenego o boku 1.

(32) W 101-kącie foremnym pomalowano na czerwono dowolne 52 wierzchołki. Dowieść, że istnieje trójkąt równoramienny, którego wszystkie wierzchołki są czerwone.