Pierwsza litera nazwiska

Kolokwium 1
22.11.19

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność ciągu, i znajdź granicę, jeżeli jest zbieżny:

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(Wsk.: Gdybyśmy udowodnili, że jest zbieżny, to znaleźć granicę byłoby łatwo.)

Rozwiązanie: Istotnie, zauważmy, że jeżeli wiedzielibyśmy, że ciąg jest zbieżny do granicy g, to moglibyśmy przejść do granicy po obu stronach równości, i otrzymalibyśmy

$$g = \frac{g}{1+g} \quad \Leftrightarrow \quad g^2 = 0,$$

czyli jedyną możliwością dla granicy jest 0. Udowodnijmy więc, że ciąg istotnie jest zbieżny. Najpierw zauważmy (można to udowodnić łatwo indukcyjnie), że wszystkie wyrazy ciągu są ściśle dodatnie

$$a_n > 0, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Sprawdzimy, czy ciąg jest monotoniczny. Z tego, że wyrazy są dodatnie, a granica, gdyby istniała, byłaby równa 0, najpierw spróbumy pokazać, że ciąg jest malejący.

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{1+a_n} &< a_n \\ a_n &< a_n(1+a_n) \\ 1 &< 1 + a_n, \end{aligned}$$

co jest prawdą, bo wyrazy są dodatnie. Otrzymaliśmy więc, że ciąg jest malejący, wcześniej pokazaliśmy też, że jest ograniczony od dołu, więc musi być zbieżny. A skoro tak, to jego granica musi wynosić 0.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Znajdź wszystkie liczby zespolone z spełniające

$$z^5 = 1 + \mathbf{i}.$$

Rozwiązanie: Zapiszmy liczbę $1 + \mathbf{i}$ w postaci trygonometrycznej

$$1 + \mathbf{i} = \sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} + \mathbf{i}\cdot\sin\tfrac{\pi}{4}).$$

Teraz wypisujemy pierwiastki

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[10]{2}(\cos\tfrac{\pi}{20} + \mathbf{i}\cdot\sin\tfrac{\pi}{20})\\
z_1 &= \sqrt[10]{2}(\cos\tfrac{\pi+8\pi}{20} + \mathbf{i}\cdot\sin\tfrac{\pi+8\pi}{20})\\
z_2 &= \sqrt[10]{2}(\cos\tfrac{\pi+16\pi}{20} + \mathbf{i}\cdot\sin\tfrac{\pi+16\pi}{20})\\
z_3 &= \sqrt[10]{2}(\cos\tfrac{\pi+24\pi}{20} + \mathbf{i}\cdot\sin\tfrac{\pi+24\pi}{20})\\
z_4 &= \sqrt[10]{2}(\cos\tfrac{\pi+32\pi}{20} + \mathbf{i}\cdot\sin\tfrac{\pi+32\pi}{20}).
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność oraz zbieżność absolutną szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}.$$

Rozwiązanie: Zacznijmy od zbieżności absolutnej

$$\left|\frac{(-1)^n n}{n^2+1}\right| = \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{n}.$$

Korzystając z kryterium porównawczego otrzymujemy, że szereg nie jest zbieżny absolutnie. Sprawdźmy, czy można zastosować kryterium Leibniza. Szereg jest naprzemienny. Czy wartości bezwzględne wyrazów maleją?

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{(n+1)^2+1} &< \frac{n}{n^2+1} \\
(n+1)(n^2+1) &< n\big((n+1)^2+1\big) \\
n^3+n^2+n+1 &< n^3+2n^2+2n \\
1 &< n^2+n.
\end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, więc istotnie ciąg wartości bezwzględnych maleje (i oczywiście zbiega do 0). Z kryterium Leibniza szereg jest zbieżny. Podsumowując, szereg jest zbieżny, ale nie jest zbieżny absolutnie.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź kresy zbioru:

$$A = \left\{ \frac{m}{m+n}; m, n \in \mathbf{N},\ m, n > 0 \right\}.$$

Rozwiązanie: Skoro $m, n \geq 1$, więc

$$\frac{m}{m+n} \leq \frac{m}{m+1} < 1.$$

Z drugiej strony, biorąc $n = 1$ mamy w zbiorze ciąg elementów

$$\frac{m}{m+n} = \frac{m}{m+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{m}} \xrightarrow{m \to \infty} 1.$$

Zbiór A jest więc ograniczony od góry przez 1, i jest to najmniejsze ograniczenie od góry. Mamy więc

$$\sup A = 1.$$

Z drugiej strony wszystkie elementy zbioru są dodatnie. 0 jest więc ograniczeniem A od dołu. Mamy też, biorąc $m = 1$, w zbiorze ciąg

$$\frac{1}{1+n} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

0 jest więc największym ograniczeniem A od dołu, czyli

$$\inf A = 0.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Rozwiąż nierówność

$$\left|\frac{x}{x+1}\right| > \frac{x}{x+1}.$$

Rozwiązanie: Nierówność oznacza

(*) $$\frac{x}{x+1} < 0.$$

Jeżeli $x > -1$ to jest to równoważne

$$x < 0.$$

W tym przypadku zbiorem rozwiązań jest więc odcinek $(-1, 0)$.
Jeżeli $x < -1$, to (*) jest równoważne

$$x > 0.$$

W tym przypadku nie ma więc rozwiązań. Punkt $x = -1$ leży w ogóle poza dziedziną nierówności, więc w szczególności nie jest rozwiązaniem.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź promień zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n} x^n$$

Rozwiązanie: Możemy skorzystać ze wzoru na promień zbieżności danego przez kryterium d'Alemberta:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^n}{n^n}}{\frac{5^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}} = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot (n+1) = +\infty,$$

gdyż wyrazy tego ciągu są większe niż $(n+1)/5$. Promień zbieżności jest więc nieskończony.