Pierwsza litera nazwiska

Kolokwium 2
13.12.19

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz pochodną funkcji f we wszystkich punktach, w których istnieje

$$f(x) = \big|\log|x|\big|, \qquad x \neq 0.$$

Uwaga: log to logarytm naturalny.

Rozwiązanie: We wszystkich punktach x, dla których $\log|x| \neq 0$ (czyli $x \neq \pm 1$) funkcja jest różniczkowalna, jako złożenie różniczkowalnych. Mamy więc

- $x \in (-\infty, -1): \ f(x) = \log(-x),\ f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$,
- $x \in (-1, 0): \ f(x) = -\log(-x),\ f'(x) = -\frac{1}{-x} \cdot (-1) = -\frac{1}{x}$,
- $x \in (0, 1): \ f(x) = -\log(x),\ f'(x) = -\frac{1}{x}$,
- $x \in (1, \infty): \ f(x) = \log(x),\ f'(x) = \frac{1}{x}$.

W punktach $x = \pm 1$ pochodne jednostronne (jednostronne granice ilorazów różnicowych) obliczamy z reguły de l'Hospitala jako jednostronne granice pochodnych. Otrzymujemy, że f' w tych punktach nie istnieje, bo pochodne jednostronne są różne.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \leq x_0, \\ ax + b & : x > x_0. \end{cases}$$

Dobierz parametry a, b tak, aby funkcja f była różniczkowalna w każdym punkcie (x_0 jest ustalonym punktem).

Rozwiązanie: Funkcja musi być ciągła w punkcie „sklejenia”, czyli granice jednostronne muszą być równe

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} x^2 = x_0^2$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} a\,x + b = a\,x_0 + b.$$

Musi więc być

(1) $$x_0^2 = a\,x_0 + b.$$

Dalej, korzystając z reguły de l'Hospitala, mamy

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^-} 2x = 2\,x_0$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} a = a.$$

Mamy więc dodatkowo

$$2\,x_0 = a.$$

Wstawiając to do (1) otrzymujemy

$$a = 2\,x_0, \qquad b = -x_0^2.$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Znajdź największy wyraz ciągu o wyrazach

$$a_n = \frac{n^{10}}{e^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Wskazówka: wyrazy a_n to wartości pewnej funkcji w punktach n.

Rozwiązanie: Rozważmy funkcję

$$f(x) = \frac{x^{10}}{e^x}, \quad x > 0.$$

Obliczmy pochodną

$$f'(x) = \frac{10x^9 e^x - x^{10} e^x}{e^{2x}} = \frac{x^9}{e^x}(10 - x).$$

Widzimy, że dla $x < 10$ f rośnie, a dla $x > 10$ maleje (ściśle). W takim razie

$$f(x) < f(10) \quad \text{dla} \quad x < 10 \vee x > 10,$$

w szczególności $a_{10} > a_n$ dla dowolnego $n = 1, 2, \ldots$.

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Znajdź punkty przegięcia wykresu funkcji

$$f(x) = x \sin\big(\log x\big), \qquad x > 0.$$

Uwaga: log to logarytm naturalny.

Rozwiązanie: F jest dwukrotnie różniczkowalna na całej swojej dziedzinie.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(\log x) + x\cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \sin(\log x) + \cos(\log x) \\ f''(x) &= \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} - \sin(\log x) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{\cos(\log x) - \sin(\log x)}{x}. \end{aligned}$$

f jest wypukła dla wszystkich x dla których

$$\cos(\log x) > \sin(\log x),$$

czyli

$$\begin{aligned} \log x &\in \Big(-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \frac{\pi}{4} + 2n\pi\Big) \\ x &\in \Big(e^{-\frac{3\pi}{4}+2n\pi}, e^{\frac{\pi}{4}+2n\pi}\Big), \end{aligned}$$

dla dowolnego $n \in \mathbf{Z}$. Podobnie, f jest wklęsła na przedziałach

$$\Big(e^{\frac{\pi}{4}+2n\pi}, e^{-\frac{3\pi}{4}+2(n+1)\pi}\Big) = \Big(e^{\frac{\pi}{4}+2n\pi}, e^{\frac{5\pi}{4}+2n\pi}\Big).$$

Końce tych przedziałów, czyli punkty

$$e^{\frac{\pi}{4}+n\pi}, \qquad n \in \mathbf{Z}$$

to punkty przegięcia.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Znajdź granicę, jeżeli istnieje

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Rozwiązanie: Jest to wyrażenie nieoznaczone postaci 1^∞. Przekształcamy je więc

$$\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log(\frac{2}{\pi}\arccos x)}{x}} = e^{\frac{\log\frac{2}{\pi}+\log\arccos x}{x}}.$$

Funkcja wykładnicza jest ciągła, więc wystarczy obliczyć granicę w wykładniku. Jest to wyrażenie neioznaczone postaci $\frac{0}{0}$. Stosujemy regułę de l'Hospitala

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log\frac{2}{\pi}+\log\arccos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\arccos x}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}\\ &= \frac{1}{\arccos 0}\cdot(-1)\\ &= -\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź granicę, jeżeli istnieje

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right).$$

Rozwiązanie: Ułamki sprowadzamy do wspólnego mianownika

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6} &= \frac{1}{x-3}-\frac{5}{(x-3)(x+2)}\\ &= \frac{x+2-5}{(x-3)(x+2)}\\ &= \frac{x-3}{(x-3)(x+2)}\\ &= \frac{1}{x+2}.\end{aligned}$$

Mianownik jest $\neq 0$ dla $x=3$, więc, korzystając z ciągłości funkcji $f(x)=\frac{1}{x+2}$, po prostu podstawiamy

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{5}.$$