Pierwsza litera nazwiska

1

Kolokwium 3
17.01.20

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Oblicz całkę

$$\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\,dx.$$

Rozwiązanie: Postępujemy zgodnie z zasadą, że za nową zmienną podstawiamy coś co najmniej się nam podoba. Czyli

$$t=(2-5x^3)^{\frac{2}{3}} \quad\Rightarrow\quad 2-t^{\frac{3}{2}}=5x^3$$

$$dt=\frac{2}{3}\frac{1}{(2-5x^3)^{\frac{1}{3}}}(-15x^2)dx \quad\Rightarrow\quad x^2dx=-\frac{1}{10}\sqrt{t}dt$$

$$\begin{aligned}
\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\,dx &= \int x^3(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\,x^2dx\\
&= -\frac{1}{50}\int\left(2-t^{\frac{3}{2}}\right)t\sqrt{t}\,dt\\
&= -\frac{1}{50}\int\left(2t^{\frac{3}{2}}-t^3\right)dt\\
&= -\frac{1}{50}\left(\frac{2}{\frac{5}{2}}t^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{4}t^4\right)\\
&= -\frac{2}{125}t^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{200}t^4\\
&= -\frac{2}{125}\left(2-5x^3\right)^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{200}(2-5x^3)^{\frac{8}{3}}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\frac{1}{\sqrt{n+6}}+\frac{1}{\sqrt{n+9}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{7n}}\Big)\,\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Rozwiązanie: Przekształcamy wyrażenie

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\frac{1}{\sqrt{n+6}}+\frac{1}{\sqrt{n+9}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{7n}}\Big)\,\frac{1}{\sqrt{n}} &=\\ &=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n+3i}}\\ &=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3i}}\\ &=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{\sqrt{1+3\frac{i}{n}}}.\end{aligned}$$

Po takim przekształceniu widzimy, że jest to suma Riemanna (po odrzuceniu pierwszego lub ostatniego składnika, które i tak dążą do 0) dla funkcji $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+3x}}$, przedziału $[0,2]$ i podziału równomiernego na $2n$ przedzialików. Punkty ewaluacji funkcji to jeden z końców przedzialika. Z twierdzenia o zbieżności sum Riemanna dla funkcji ciągłych ta granica jest więc równa całce

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{1+3x}}.$$

Całkujemy przez podstawienie, jak zwykle za nową zmienną podstawiając najpaskudniejsze wyrażenie pod całką.

$$t=\sqrt{1+3x}\qquad\Rightarrow\qquad \frac{2}{3}\,t\,dt=dx.$$

Liczymy całkę

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{1+3x}}=\int_1^{\sqrt{7}}\frac{2}{3}\,\frac{1}{t}\,t\,dt=\frac{2}{3}(\sqrt{7}-1).$$

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz całkę

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2}.$$

Rozwiązanie: Jest to całka z funkcji wymiernej i mamy podaną faktoryzację mianownika. Piszemy rozkład na ułamki proste

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+3} + \frac{E}{(x+3)^2}.$$

Sprowadzając do wspólnego mianownika, porządkując i rozwiązując układ równań otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^2} =$$
$$= -2\int \frac{dx}{x+1} + 7\int \frac{dx}{x+2} - 5\int \frac{dx}{(x+2)^2} - 5\int \frac{dx}{x+3} + 19\int \frac{dx}{(x+3)^2}.$$

Liczymy kolejne całki

$$\int \frac{dx}{x+1} = \log|x+1|$$
$$\int \frac{dx}{x+2} = \log|x+2|$$
$$\int \frac{dx}{(x+2)^2} = -\frac{1}{x+2}$$
$$\int \frac{dx}{x+3} = \log|x+3|$$
$$\int \frac{dx}{(x+3)^2} = -\frac{1}{x+3}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję

$$f(x) = \sqrt{(x+1)^3}.$$

Rozwiązanie: Liczymy kolejne pochodne

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)^{\frac{3}{2}} \\
f'(x) &= \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}} \\
f''(x) &= \frac{3}{2}\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \\
f'''(x) &= \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)(x+1)^{-\frac{3}{2}} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big)(x+1)^{-\frac{5}{2}} \\
&\dots \\
f^{(n)}(x) &= 3\,(-1)^n \frac{(2n-5)!!}{2^n}(x+1)^{-\frac{2n-3}{2}}, \qquad n \geq 3.
\end{aligned}$$

Możemy więc napisać rozwinięcie

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n = 1+\frac{3}{2}\,x+\frac{3}{8}\,x^2+3\,\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(2n-5)!!}{2^n\,n!}\,x^n$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz całkę

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x}\, dx.$$

Rozwiązanie: Przypominamy sobie, że $\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$. Możemy więc całkować przez części.

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x}\, dx &= -\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot' x \cdot x\, dx \\
&= -\cot x \cdot x\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot x\, dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \log|\sin x|\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \log\frac{\sqrt{3}}{2} - \log\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Udowodnij oszacowanie

$$\int_{-1}^{2} \frac{|x|}{x^2+1}\, dx < \frac{3}{2}.$$

Rozwiązanie: Możemy całkę policzyć dokładnie, i następnie oszacować logarytmy. Inna metoda to dobrać podział i oszacować całkę przez sumę górną. Licząc pochodną zauważamy, że funkcja podcałkowa maleje na $[-1,0]$, potem rośnie na $[0,1]$, po czym znowu maleje na $[1,2]$. Widzimy więc, że funkcja jest nie większa niż $\frac{1}{2}$, a przedział całkowania ma długość 3. Wystarczy więc wziąć trywialny podział, składający się z jednego tylko przedzialika, i otrzymać

$$\int_{-1}^{2} \frac{|x|}{x^2+1}\, dx \leq \frac{3}{2}.$$

Jeżeli chcemy otrzymać ostrą nierówność, to możemy skorzystać z uwagi po Twierdzeniu 10.6 ze skryptu (wartość $\frac{1}{2}$ funkcja przyjmuje tylko w 2 punktach, pozatym jest ostro mniejsza), albo możemy rozdrobnić podział. Zauważmy, że dodanie punktów podziału $0, 1$ nic nie da, bo supremum się nie zmieni. Dodajmy więc punkt1.5. Suma górna dla takiego podziału $[-1,2] = [-1,1.5] \cup [1.5,2]$ jest następująca

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2} + \frac{6}{13}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{4} + \frac{3}{13} = \frac{77}{52},$$

gdyż maksimum funkcji na przedziale $[-1,1.5]$ to $\frac{1}{2}$, a na przedziale $[1.5,2]$ to $\frac{6}{13}$. Ostatnią nierówność łatwo sprawdzić.