Analiza matematyczna dla informatyków
Notatki z wykładu

Maciej Paluszyński

5 lutego 2019

Spis treści

1	**Analiza matematyczna – FAQ**	**ii**
2	**Liczby rzeczywiste i zespolone**	**1**
3	**Funkcje**	**18**
4	**Ciągi**	**26**
5	**Szeregi**	**47**
6	**Granica funkcji**	**61**
7	**Funkcje ciągłe**	**73**
8	**Pochodna**	**81**
9	**Całki**	**113**
10	**Całka oznaczona**	**124**
11	**Zastosowania całek**	**144**
12	**Całki niewłaściwe**	**154**
13	**Wzory Wallisa i Stirlinga**	**162**
14	**Całkowanie numeryczne**	**168**
15	**Ciągi i szeregi funkcyjne**	**178**

Rozdział 1

Analiza matematyczna – FAQ

Analiza matematyczna nie jest zapewne najpopularniejszym przedmiotem na informatyce. W końcu, jeżeli ktoś miałby wielką ochotę na analizę matematyczną, to przypuszczalnie studiowałby matematykę, a nie informatykę. Tymczasem świeżo upieczeni studenci informatycy, nie mogący doczekać się chwili, w której napiszą pierwsze linijki profesjonalnego kodu, muszą pochylić się nad pytaniami typu: czy dana suma nieskończona jest zbieżna czy nie. Okazuje się, że wśród przedmiotów obowiązkowych na pierwszym roku jest właśnie analiza matematyczna!

Chciałbym odpowiedzieć na kilka często pojawiających się pytań, i przekonać państwa, że ten wykład nie znalazł się w programie przez pomyłkę. Że wręcz przeciwnie, jest to jeden z najważniejszych wykładów pierwszych lat, i że warto się do niego przyłożyć.

Często pojawia się następująca wątpliwość: po co informatykowi matematyka. Przecież nawet jeżeli kiedyś pojawi się potrzeba zastosowania jakiegoś wyniku matematycznego, to doczytamy sobie potrzebne rzeczy, albo skonsultujemy się ze specjalistą. Taki argument to wynik nieporozumienia. Podstawowy kurs analizy matematycznej to nie jest żadna specjalistyczna wiedza. Nie należy oczekiwać, że pojęcia i twierdzenia, którymi będziemy się zajmowali na tym wykładzie rozwiążą nam jakieś konkretne problemy. Cała ta analiza matematyczna to jest po prostu język którym się posługujemy, kiedy chcemy sformułować czy zrozumieć jakiś problem. Jest to język uniwersalny w naukach technicznych, również w informatyce. W dzisiejszych czasach, jeżeli chce się być prawdziwym, twórczym profesjonalistą, praktycznie w każdej dziedzinie, trzeba znać angielski. Fachowa literatura jest po angielsku, Internet jest (upraszczając trochę) po angielsku, a żaden staż zagraniczny nie okaże się sukcesem bez znajomości angielskiego. Podobnie jest z analizą. Trzeba oswoić się z pojęciami takimi jak zbieżność, ciągłość, przybliżenie, całka, szereg potęgowy i temu podobne. Tego typu pojęcia przewijają się wszędzie i będą państwu towarzyszyć w przyszłej karierze. Wielu z was pojedzie na staże do ośrodków za granicą, na przykład do siedziby firmy Microsoft w Redmond nad brzegiem jeziora Washington. Pamiętajmy, że każdy absolwent studiów inżynieryjnych, na przykład w Stanach Zjednoczonych (obejmuje to także informatyków), ma za sobą co najmniej 3 semestry analizy matematycznej. Tacy ludzie będą tworzyli wasze środowisko, to z nimi będziecie robić wspólne projekty. Nie znając podstawowego języka nauk technicznych, czyli analizy, byli byście, jeśli można tak powiedzieć, profesjonalnymi analfabetami. Podkreślmy więc: podstawowy kurs analizy matematycznej to nie jest żadna specjalistyczna wiedza, która może się przydać, ale nie musi. To podstawowe pojęcia i związki pomiędzy nimi, które stale będą się przewijać, w trakcie studiów, i potem, w zawodowym życiu codziennym. W trakcie dalszych studiów będą państwu oferowane różne inne wykłady matematyczne lub z pogranicza matematyki i informatyki. Wiele z nich będziecie mogli wybrać bądź opuścić. Ale analiza, podobnie jak na przykład logika, pełni inną rolę – jest podstawowa i obowiązkowa.

Często pojawia się następujący problem. Studenci mówią: „No dobrze, skoro się pan upiera, to będziemy się uczyć analizy. Ale dlaczego tak szczegółowo pan wszystko uzasadnia i dowodzi. Niektóre z pana dowodów są na całą stronę! My wierzymy panu, że te twierdzenia są prawdziwe. Zamiast dowodów niech pan wyłoży więcej materiału." Otóż jest to w dalszym ciągu to samo nieporozumienie. Na tym wykładzie chodzi nam o to, żeby zapoznać się z pojęciami, zależnościami pomiędzy nimi, sposobem w jaki na siebie wzajemnie wpływają. Sposób argumentacji jest tak samo ważny, jak same fakty. Na tym wykładzie pytanie „co?" jest równie ważne jak „dlaczego?". Zauważmy też, że większość dowodów jest bardzo krótka i jasna. Jeżeli dowód nie jest natychmiastowy, to zawsze staram się podkreślić jego pomysł. Najpierw intuicyjnie staramy się dojść dlaczego dane twierdzenie miałoby być prawdziwe, a kiedy już mamy ogólne pojęcie, staramy się doprecyzować rozumowanie, i całość „ubrać w słówka". Jeżeli wiemy od początku o co w dowodzie chodzi, to całość nie jest ani trudna, ani zawiła.

Wielu studentów zgłasza następującą uwagę: „Ten wykład to zaledwie powtórka tego, co mieliśmy w szkole średniej. Większość zadań na kolokwiach i egzaminie jest tak łatwa, że aż wstyd. Chcemy i możemy więcej, dużo więcej!" To prawda, duża część materiału zawiera się w programie szkoły średniej. Ale proszę pamiętać, to nie jest wykład nastawiony na wyczyn naukowy. Chcemy uporządkować i utrwalić tą podstawową wiedzę, jaką jest analiza. Nie ma wiele nowego materiału, ale to co jest jest wyłożone szczegółowo, bez omijania spraw kłopotliwych. Na ćwiczeniach jest też do zrobienia dużo zadań. Jak mówią Amerykanie: „Co jest podstawą rzetelnej wiedzy? Repetition, repetition, repetition!" Bez obawy, jeżeli szukacie państwo głębokiej, rzetelnej wiedzy, to znaleźliście się we właściwym miejscu. Oprócz analizy czeka was wiele innych wykładów, i nie będziecie się nudzić. Jeżeli interesuje was analiza, albo inne przedmioty matematyczne, to w sąsiednim budynku znajdziecie wykłady z każdej dziedziny matematyki, i na każdym poziomie. Wielu studentów informatyki uczęszcza na wykłady w Instytucie Matematycznym, i wielu studentów matematyki przychodzi na zajęcia do Instytutu Informatyki. To nie przypadek, że budynki sąsiadują ze sobą, i można przechodzić pomiędzy nimi „suchą stopą". Nawet biblioteka jest wspólna. Zawsze też jesteście mile widziani na konsultacjach, gdzie możecie porozmawiać z wykładowcą, który z niejednego już pieca chleb matematyczny jadł.

Pojawia się też następujące pytanie: „Notatki z wykładu mają 15 rozdziałów, mniej więcej tyle, ile tygodni będzie trwał wykład. Mamy więc plan pracy, i dodatkowo gotowe notatki. Czy możemy w takim razie nie chodzić na wykład? Po co mamy zrywać się z łóżka na 12, żeby oglądać, jak przepisuje pan notatki na tablicę? Po co chodzić na ćwiczenia i oglądać, jak ktoś rozwiązuje proste zadania?" Otóż nie, zdecydowanie powinniście państwo chodzić na wykład i na ćwiczenia. Słuchanie wykładu to zupełnie co innego niż czytanie notatek. Nawet nie chodzi o to, że są pytania, że pojawiają się nowe pomysły. Z doświadczenia wiadomo, że każdy wykład jest inny. Czasem ten sam temat przerabia się w 15 minut, czasem w godzinę. Z całą pewnością wykład nie polega tylko na przepisywaniu notatek na tablicę. Podobnie z ćwiczeniami. Nie da się opanować tego materiału nie robiąc zadań samodzielnie. Wydaje mi się, że można tu zastosować analogię do nauki języka obcego. Trzeba ćwiczyć, trzeba próbować, i oczywiście trzeba samemu chodzić do tablicy i rozwiązywać zadanie publicznie. Trzeba też starać się być „na bieżąco". W takim wykładzie jak analiza łatwo jest zgubić się w jakimś momencie i stracić wątek. Kolejno wprowadzane pojęcia będą już do końca stale używane. Obecność formalnie nie jest sprawdzana, ale proszę pamiętać, że nie chodząc na wykład czy ćwiczenia możecie wpędzić się w kłopoty. Nie jest łatwo opanować ten materiał tylko czytając gotowe notatki. Oprócz egzaminu końcowego w trakcie semestru będą 3 kolokwia, mniej więcej co miesiąc. Kolokwia powinny dać państwu „w czasie rzeczywistym" jasny obraz tego, jak wam idzie.

Jeżeli macie państwo inne pytania – pytajcie. Mój adres to

`mpal@math.uni.wroc.pl`

Rozdział 2

Liczby rzeczywiste i zespolone

Liczby rzeczywiste

Nie będziemy szczegółowo zajmować się konstrukcją zbioru liczb rzeczywistych. Konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych, określenie działań na liczbach i pokazanie wszystkich potrzebnych własności to temat bardzo ciekawy, i na pewno warto się nim zainteresować. Ale na tym wykładzie przypomnimy tylko najważniejsze fakty, i zakładamy, że generalnie liczby rzeczywiste wszyscy znają. Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy $\mathbf{R}$, a liczbę rzeczywistą rozumiemy jako rozwinięcie dziesiętne (ciągi cyfr dziesiętnych), na przykład $123,357290\dots$. Rozwinięcie dziesiętne zawiera przecinek, jest skończone po lewej stronie i skończone lub nieskończone po prawej stronie. Rozwinięcia mogą mieć znak $-$, wtedy nazywamy je liczbami ujemnymi. Wszyscy wiemy, jak dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić takie liczby, oraz znamy własności tych działań, na przykład łączność i rozdzielność. Przypomnijmy ważne fakty:

1. Jeżeli pewien układ cyfr po przecinku powtarza się okresowo, to ten układ cyfr zapisujemy w nawiasie: $0,03212512512\dots = 0,032(125)$.

2. Jeżeli od pewnego miejsca po przecinku w rozwinięciu są same zera, to nie piszemy ich, i takie rozwinięcie nazywamy skończonym $3,234000000\dots = 3,234(0) = 3,234$.

3. Mnożenie przez 10 przesuwa przecinek w prawo, a dzielenie przez 10 przesuwa przecinek w lewo.

4. W zasadzie różne rozwinięcia dziesiętne oznaczają różne liczby. Są jednak wyjątki, i zdarza się, że 2 różne rozwinięcia dziesiętne oznaczają tą samą liczbę rzeczywistą. Wyjątek taki ma miejsce w sytuacji, gdy

w rozwinięciu od pewnego miejsca są same 9. Takie rozwinięcie reprezentuje tą samą liczbę, co rozwinięcie, gdzie dziewiątki zastąpimy zerami, a pierwszą (od prawej) cyfrę mniejszą od 9 powiększamy o 1. Na przykład $0,09999\cdots = 0,0(9) = 0,1$. Można to łatwo udowodnić, korzystając z własności działań. Niech $x = 0,0(9)$. Mamy wtedy

$$10 \cdot x = 0,(9) = 0,9 + 0,0(9) = 0,9 + x \Rightarrow 9 \cdot x = 0,9 \Rightarrow x = 0,1.$$

Liczby rzeczywiste, których rozwinięcia dziesiętne mają po przecinku same zera nazywamy liczbami całkowitymi, i oznaczamy $\mathbf{Z}$. Dodatnie liczby całkowite $1, 2, \ldots$ (bez zera) nazywamy liczbami naturalnymi i oznaczamy $\mathbf{N}$.

Liczby wymierne

Liczby których rozwinięcia są skończone lub okresowe nazywamy liczbami wymiernymi. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy $\mathbf{Q}$. Liczby wymierne można zapisać jako ułamki $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbf{Z}$, oraz $n \neq 0$. Jeżeli $n \in \mathbf{N}$ oraz m i n nie mają wspólnego dzielnika, to przedstawienie liczby wymiernej x jako ułamka $\frac{m}{n}$ jest jednoznaczne, a taki ułamek nazywamy nieskracalnym. Każdą liczbę wymierną można przedstawić jako ułamek nieskracalny.

Przykłady: (a) $\frac{1}{7} = 0,1428571428\cdots = 0,(142857)$. Rozwinięcie dziesiętne otrzymujemy po prostu stosując „długie dzielenie". Dzieląc kolejno w pewnym momencie widzimy, że reszta powtarza się, i zauważamy w związku z tym okres.

(b) $0,123 = \frac{123}{1000}$. Jest to ułamek nieskracalny, gdyż licznik i mianownik nie mają wspólnych dzielników, a mianownik jest dodatni.

(c) $0,(a_1a_2\cdots a_k) = \frac{a_1a_2\cdots a_k}{99\cdots9}$ (k – dziewiątek w mianowniku). Łatwo to udowodnić, wypisując i rozwiązując odpowiednie równanie na $x = 0,(a_1\cdots a_k)$.

(d) Przekształcimy następujące rozwinięcie dziesiętne na ułamek

$$\begin{aligned} 0,123(45) = 0,123 + 0,000(45) &= \frac{123}{1000} + \frac{0,(45)}{1000} \\ &= \frac{123}{1000} + \frac{1}{1000}\frac{45}{99} = \frac{99 \cdot 123 + 45}{99000} = \frac{12222}{99000}. \end{aligned}$$

Liczby niewymierne

Liczby rzeczywiste które nie są wymierne, czyli których rozwinięcia dziesiętne są nieskończone i nieokresowe nazywamy liczbami niewymiernymi.

Przykłady: (a) Napiszmy liczbę, w której rozwinięciu dziesiętnym coraz dłuższe ciągi zer przedzielane są jedynkami:

$$x = 0,101001000100001\cdots 10\cdots 010\cdots .$$

Serie zer są coraz dłuższe, a więc rozwinięcie nie jest okresowe. Nie jest też skończone, bo zawiera nieskończenie wiele jedynek. x jest więc liczbą rzeczywistą niewymierną.

(b) Innym przykładem liczby niewymiernej jest $\sqrt[3]{15}$. Pokażemy, że $\sqrt[3]{15}$ nie jest liczbą wymierną. Rozumowanie to jest typowe, i można je zaadaptować do wielu przykładów. Załóżmy, że $\sqrt[3]{15}$ jest liczbą wymierną, i przedstawmy ją w postaci ułamka nieskracalnego

$$\sqrt[3]{15} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad 15 = \frac{m^3}{n^3} \quad \Rightarrow \quad n^3 \cdot 15 = m^3.$$

3 dzieli lewą stronę ostatniej równości, więc musi dzielić prawą stronę. 3 jest liczbą pierwszą, więc jeżeli dzieli iloczyn liczb, to musi dzielić któryś z czynników (to jest własność liczb pierwszych). W takim razie 3 musi dzielić m, a w takim razie prawa strona, jako sześcian, dzieli się przez 27. W takim razie po lewej stronie równości n^3 musi się dzielić przez 3 (bo 15 dzieli się tylko przez 3), a więc znowuż, skoro 3 jest liczbą pierwszą, n musi dzielić się przez 3. Ułamek $\frac{m}{n}$ nie jest więc nieskracalny, co jest sprzeczne z założeniem. Założenie, że $\sqrt[3]{15}$ jest liczbą wymierną musi więc być fałszywe.

Uwagi: (i) Liczba pierwsza to liczna naturalna, większa od 1, która nie ma innych dzielników oprócz 1 i siebie samej. Liczby pierwsze mają następującą własność: jeżeli p jest liczbą pierwszą i $p|m \cdot n$ (p dzieli $m \cdot n$), to $p|m$ lub $p|n$.

(ii) Powyższe rozumowanie stanowi zastosowanie rozkładu liczby na czynniki pierwsze. Każdą liczbę naturalną można rozłożyć na iloczyn czynników, które są liczbami pierwszymi. Taki rozkład nazywamy rozkładem na czynniki pierwsze. Rozkład taki jest jednoznaczny. W równości

$$n^3 \cdot 15 = m^3$$

czynniki pierwsze n^3 i m^3 występują w kompletach po 3, a czynniki pierwsze 15, czyli 3 i 5 nie mają takich kompletów. Istnienie i jednoznaczność rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze to własność zbioru $\mathbf{N}$, której nie będziemy dowodzić, ale o której zawsze warto pamiętać. Jako ćwiczenie w którym rozkład na czynniki pierwsze może się przydać przytoczmy jeszcze następujące pytanie: ile zer końcowych ma liczba (1000)! (1000 silnia)?

(iii) Pierwiastek występujący w poprzednim przykładzie, podobnie jak logarytm i potęgi występujące w następnym stanowią przykłady funkcji elementarnych. Zakładamy, że znamy funkcje elementarne, i nie będziemy zajmować się jakoś szczególnie ich definicjami. W następnym rozdziale przypomnimy jednak krótko najważniejsze fakty z nimi związane.

(c) $\log_2 3$. Będziemy rozumować tak jak w poprzednim przykładzie, czyli nie wprost. Załóżmy, że $\log_2 3$ jest liczbą wymierną, i niech $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ będzie ułamkiem nieskracalnym

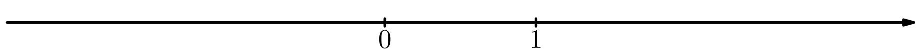
$$\log_2 3 = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{m}{n}} = 3 \quad \Rightarrow \quad 2^m = 3^n.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż lewa strona ostatniej równości zawiera jedynie dwójki jako swoje czynniki pierwsze, a prawa strona jedynie trójki. Założenie, że $\log_2 3 \in \mathbf{Q}$ musi więc być fałszywe.

(d) Suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb wymiernych są wymierne (oczywiście nie można dzielić przez zero). Suma, różnica, iloczyn i iloraz liczby wymiernej i niewymiernej są niewymierne (chyba że, w przypadku mnożenia i dzielenia, liczba wymierna jest równa 0). Wynik działań na dwóch liczbach niewymiernych może być różny, wymierny lub niewymierny, w zależności od konkretnych wartości.

Interpretacja geometryczna

O liczbach rzeczywistych możemy myśleć jako o punktach prostej. Na prostej zaznaczamy miejsce zera i jedynki, a strzałką oznaczamy kierunek wzrostu. Kierunek wzrostu związany jest ze wzajemnym położeniem zera i jedynki. Tradycyjnie kierunek wzrostu jest zawsze w prawo. Każdej liczbie rzeczywistej można przyporządkować, w sposób wzajemnie jednoznaczny, punkt takiej prostej.



Rysunek 2.1: Prosta rzeczywista

Uporządkowanie zbioru R

Jeżeli $x - y$ jest liczbą dodatnią, to piszemy $x > y$ („x jest większe od y"), jeżeli nieujemną, to piszemy $x \geq y$ („x jest większe lub równe y" albo „x jest słabo większe od y"). Podobnie, jeżeli $x - y$ jest liczbą ujemną to piszemy $x < y$, jeżeli niedodatnią, to $x \leq y$. Widzimy więc, że dla $x, y \in \mathbf{R}$ mamy albo $x = y$, albo $x < y$ albo $x > y$. W związku z tym mówimy, że zbiór $\mathbf{R}$ jest uporządkowany. Na prostej rzeczywistej $x > y$ jeżeli x jest bardziej na prawo od y. Symbolizuje to strzałka w prawo: w prawo liczby rosną. Przypomnijmy kilka faktów:

$$
\begin{aligned}
x < y \ &\Rightarrow\ x + c < y + c \quad \text{dla każdej liczby } c,\\
x < y \ &\Rightarrow\ x \cdot c < y \cdot c \quad \text{dla każdej liczby } c > 0,\\
x < y \ &\Rightarrow\ x \cdot c > y \cdot c \quad \text{dla każdej liczby } c < 0.
\end{aligned}
$$

Wynika to wprost z definicji. Podobne fakty można przytoczyć dla słabych nierówności. Zapamiętajmy: mnożenie przez liczbę dodatnią zachowuje nierówności, a mnożenie przez liczbę ujemną odwraca nierówności. Z powyższych nierówności można wyprowadzić następującą:

$$0 < x \leq y \text{ lub } x \leq y < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}.$$

Zauważmy, że założenie, że x i y mają ten sam znak jest ważne. Wprost z definicji wynika też oczywisty fakt:

$$x < y \quad \text{oraz} \quad y < z \ \Rightarrow\ x < z.$$

Jedna z nierówności po lewej może być słaba, a po prawej w dalszym ciągu otrzymamy nierówność ostrą.

Symbole

$\forall$ czytamy „dla każdego", $\exists$ czytamy „istnieje", $\Leftrightarrow$ czytamy „wtedy i tylko wtedy", $(\cdots) \Rightarrow (\cdots)$ czytamy „z $(\cdots)$ wynika $(\cdots)$", $\in$ czytamy „należy do", $\subset$ czytamy „jest podzbiorem". Symbol $\wedge$ czytamy „i", a symbol $\vee$ czytamy „lub".

Przypomnijmy następujące fakty dotyczące zbioru liczb rzeczywistych: aksjomat Archimedesa, aksjomat ciągłości i dobre uporządkowanie $\mathbf{N}$.

Aksjomat Archimedesa

Liczby rzeczywiste mają następującą własność, która jest intuicyjnie zupełnie jasna: dla dowolnych $x, y > 0$ istnieje liczba naturalna n taka, że

$$nx > y.$$

Używając przytoczonych powyżej symboli aksjomat możemy zapisać jako

$$\forall\; x, y > 0\; \exists\; n \in \mathbf{N}\; nx > y.$$

Z aksjomatu Archimedesa wynika, na przykład, że istnieją liczby naturalne dowolnie duże (większe od dowolnej ustalonej liczby rzeczywistej). Ponieważ mnożenie przez -1 odwraca nierówności, więc z aksjomatu wynika też, że istnieją liczby całkowite dowolnie małe (mniejsze od dowolnej ustalonej liczby rzeczywistej). Zauważmy, że z aksjomatu wynika też, że istnieją liczby dodatnie dowolnie małe (dodatnie, ale mniejsze od dowolnej innej dodatniej). Będziemy używali wszystkich tych faktów, nie powołując się już bezpośrednio na aksjomat Archimedesa.

Kresy

Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbf{R}$ jest:

- ograniczony od góry, jeżeli

$$\exists\; c\; \forall\; x \in A\;\; x \leq c,$$

- ograniczony od dołu, jeżeli

$$\exists\; d\; \forall\; x \in A\;\; x \geq d,$$

- ograniczony, jeżeli jest ograniczony od góry i od dołu jednocześnie.

Stałe c i d w powyższych warunkach nazywamy odpowiednio ograniczeniem zbioru A od góry i ograniczeniem zbioru A od dołu. Zbiór liczb naturalnych jest ograniczony od dołu (ograniczeniem od dołu jest, na przykład liczba 1), ale nie jest ograniczony od góry (z aksjomatu Archimedesa wynika, że nie da się znaleźć c, będącego ograniczeniem $\mathbf{N}$ od góry). Jeżeli zbiór $A \subset \mathbf{R}$ jest ograniczony od góry, to najmniejsze ograniczenie A od góry nazywamy kresem górnym A i oznaczamy

$$\sup A \quad \text{(supremum } A).$$

Jeżeli $A \subset \mathbf{R}$ jest ograniczony od dołu, to największe ograniczenie A od dołu nazywamy kresem dolnym A, i zapisujemy

$$\inf A \quad \text{(infimum } A).$$

Czyli, $s = \sup A$ jeżeli

- $\forall\, x \in A\ x \leq s$,
- $\forall\, u < s\ \exists\, x \in A\ x > u$.

Pierwszy warunek mówi, że A jest ograniczony od góry i s jest ograniczeniem od góry, a drugi warunek mówi, że żadna liczba mniejsza od s nie jest ograniczeniem A od góry. Oba warunki razem mówią więc, że s jest najmniejszym ograniczeniem od góry zbioru A. Podobnie możemy podsumować definicję kresu dolnego: $k = \inf A$ jeżeli

- $\forall\, x \in A\ x \geq k$,
- $\forall\, l > k\ \exists\, x \in A\ x < l$.

Pojęcie kresu górnego $\sup A$ i dolnego $\inf A$ wprowadziliśmy w przypadku, gdy zbiór A jest ograniczony, odpowiednio od góry lub od dołu. Dodatkowo ustalmy, że jeżeli zbiór A nie jest ograniczony od góry, to będziemy pisali

$$\sup A = +\infty,$$

oraz gdy zbiór A nie jest ograniczony od dołu będziemy pisali

$$\inf A = -\infty.$$

Na przykład

$$\inf \mathbf{N} = 1 \quad \text{oraz} \quad \sup \mathbf{N} = +\infty.$$

Aksjomat ciągłości

Aksjomat ten mówi, że każdy zbiór $A \subset \mathbf{R}$ ograniczony od góry ma kres górny. Równoważnie można sformułować tą własność dla kresów dolnych: każdy zbiór ograniczony od dołu ma kres dolny. Stwierdzenia te wyrażają pewną własność ciągłości zbioru liczb rzeczywistych – liczby rzeczywiste wypełniają całą prostą rzeczywistą, bez przerw.

Uwaga: Zbiór może zawierać swój kres lub nie Na przykład

$$\sup\{x:\ x < 1\} = \sup\{x:\ x \leq 1\} = 1,$$

przy czym pierwszy zbiór nie zawiera 1, a drugi zawiera.

Przykład: Rozważmy następujący zbiór

$$A = \left\{\frac{m^2+n^2}{2mn}:\ m,n \in \mathbf{N}, m < n\right\}.$$

Zauważmy, że A nie jest ograniczony od góry. Istotnie, zbiór A zawiera wszystkie liczby postaci $\frac{m^2+1}{2m}$, $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$. Każda taka liczba jest większa od $\frac{m}{2}$, a więc A zawiera liczby większe od dowolnej liczby naturalnej. Nie może więc być ograniczony od góry. Zauważmy, że jest ograniczony od dołu, i ograniczeniem od dołu jest 1. W tym celu wykorzystamy znaną nierówność:

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{m^2+n^2}{2mn} \geq 1 \quad \text{dla } m, n > 0.$$

Przekonamy się teraz, że 1 jest największym ograniczeniem A od dołu. Niech $c > 1$. Wtedy $\frac{1}{c-1}$ jest liczbą dodatnią, i z aksjomatu Archimedesa wynika, że istnieje liczba naturalna m większa od $\frac{1}{c-1}$. Niech dodatkowo $m \geq 2$, co zawsze możemy założyć, ewentualnie powiększając m. Wtedy

$$2m(m-1) > m > \frac{1}{c-1} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{2m(m-1)} < c.$$

Mamy więc

$$\frac{m^2+(m-1)^2}{2m(m-1)} = \frac{m^2+m^2-2m+1}{2m(m-1)} = \frac{2m(m-1)+1}{2m(m-1)} = 1 + \frac{1}{2m(m-1)} < c.$$

Zakładając, że $c > 1$ znaleźliśmy w zbiorze A element $\frac{m^2+(m-1)^2}{2m(m-1)}$ mniejszy od c. Tak więc żadne $c > 1$ nie jest ograniczeniem A od dołu, a więc 1 jest największym ograniczeniem A od dołu, czyli $\inf A = 1$. Przy okazji zauważmy, że $1 \notin A$: gdyby $1 \in A$, to istniałyby $m, n \in \mathbf{N}$, $n \neq m$, takie, że $m^2+n^2 = 2mn$. Wiemy jednak, że taka równość jest równoważna $(m-n)^2 = 0$, czyli $m = n$.

Dobre uporządkowanie N

Zbiór liczb naturalnych ma następującą ważną własność: Każdy podzbiór $\mathbf{N}$ ma element najmniejszy (oczywiście oprócz podzbioru pustego, który nie ma wogóle żadnego elementu). O własności tej mówimy często, że zbiór liczb naturalnych jest *dobrze uporządkowany*. Własność tą możemy zapisać symbolami:

$$\forall\, A \subset \mathbf{N}\ \exists\, k \in A\ \forall n \in A \quad k \leq n.$$

Możemy to wyrazić następująco: niepusty podzbiór $\mathbf{N}$ zawiera swój kres dolny. Dobre uporządkowanie zbioru liczb naturalnych jest podstawą tak zwanego twierdzenia o indukcji matematycznej, które omówimy później.

Z dobrego uporządkowania $\mathbf{N}$ możemy wyciągnąć następujące wnioski:

- Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb całkowitych ograniczony od dołu zawiera element najmniejszy.
- Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb całkowitych ograniczony od góry zawiera element największy.

Wnioski te można prosto udowodnić, odpowiednio przekształcając dane podzbiory na podzbiory liczb naturalnych.

Przedziały

Przedziały oznaczamy następująco:

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= \{x:\ a < x < b\}, &&\text{(przedział otwarty)},\\
[a,b] &= \{x:\ a \le x \le b\}, &&\text{(przedział domknięty)},\\
(a,b] &= \{x:\ a < x \le b\},\\
[a,b) &= \{x:\ a \le x < b\}.
\end{aligned}
$$

W przypadku przedziału (a,b) dopuszczamy $a=-\infty$ oraz $b=\infty$. $(-\infty,b)$ i (a,∞) to tak zwane półproste otwarte, a $(-\infty,\infty)$ to cała prosta, całe $\mathbf{R}$. W przypadku $(a,b]$ również dopuszczamy $a=-\infty$, a w przypadku $[a,b)$ dopuszczamy $b=\infty$. To są tak zwane półproste domknięte. Domyślnie rozumiemy, że $a<b$, a tylko w przypadku przedziału domkniętego $[a,b]$ dopuszczamy $a=b$. Oczywiście taki przedział $[a,a]$ składa się tylko z jednego punktu, a.

Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej definiujemy następująco

$$
|x| = \begin{cases} x & \text{jeżeli } x \ge 0,\\ -x & \text{jeżeli } x < 0.\end{cases}
$$

Wartość bezwzględna ma następujące własności:

1. $|x+y| \le |x| + |y|$ (nierówność trójkąta),
2. $||x|-|y|| \le |x-y|$,
3. $|x-y|$ reprezentuje odległość x od y na prostej rzeczywistej,
4. $|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$ oraz $|x| = \sqrt{x^2}$,

5. $|x| \geq 0$ oraz $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

6. $x \leq y$ oraz $-x \leq y \;\Rightarrow\; |x| \leq y$,

7. $|x| = |y|$ oznacza, że $x = \pm y$,

8. $|x| \leq y$ oznacza, że $-y \leq x \leq y$.

Dla przykładu przeprowadzimy dowód nierówności trójkąta 1. Rozpatrzymy osobno dwa przypadki
(a) x i y mają ten sam znak $\pm$. Wtedy ich suma ma ten sam znak, a więc

$$|x+y| = \pm(x+y) = \pm x + \pm y = |x| + |y|.$$

W tym przypadku widzimy, że nierówność trójkąta jest równością.
(b) x i y mają przeciwne znaki. Możemy założyć, że $x \leq 0 \leq y$, w przeciwnym przypadku zamieniając miejscami x i y. Jeżeli $x + y \geq 0$ to

$$|x+y| = x + y \leq -x + y = |x| + |y|,$$

a jeżeli $x + y < 0$ to

$$|x+y| = -(x+y) = -x - y \leq -x + y = |x| + |y|.$$

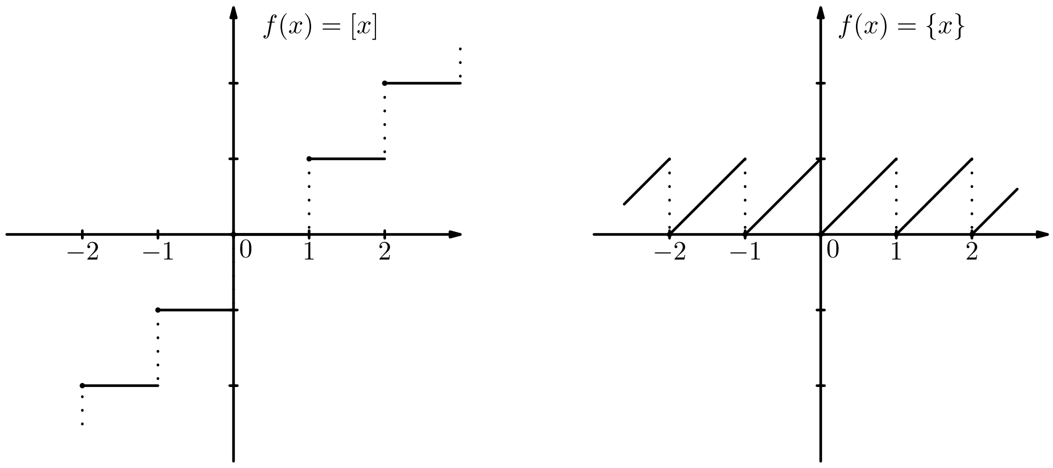
W tym przypadku, jeżeli żadna z liczb x, y nie jest zerem, to nierówność trójkąta jest ostra.

Część całkowita i ułamkowa

Część całkowita x to największa liczba całkowita nie większa od x. Część całkowitą x oznaczamy przez $[x]$. Część ułamkowa x to $\{x\} = x - [x]$. Część całkowita ma więc następujące własności

- $[x] \in \mathbf{Z}$,
- $[x] \leq x < x + 1$ czyli $x - 1 < [x] \leq x$,
- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbf{Z}$.

Przykłady: $[1,5] = 1,\; [-1,5] = -2,\; \{-1,5\} = 0,5$.



Rysunek 2.2: Część całkowita i część ułamkowa

Gęstość liczb wymiernych i niewymiernych w R

W każdym przedziale (a, b) leży liczba wymierna i niewymierna. Niech (a, b) będzie dowolnym przedziałem (pamiętamy,że $a < b$, więc przedział ten nie jest zbiorem pustym). Udowodnimy, że w (a, b) musi leżeć liczba wymierna. Liczbę niewymierna pozostawimy jako ćwiczenie. $\frac{1}{b-a} > 0$, więc z aksjomatu Archimedesa istnieje $n \in \mathbf{N}$ taka, że $n > \frac{1}{b-a}$ czyli $\frac{1}{n} < (b - a)$. Rozważmy następujący podzbiór zbioru liczb całkowitych

$$A = \{k \in \mathbf{Z} : k \leq n \cdot a\}.$$

Zauważmy, że A jest niepusty (bo na przykład $[na] \in A$), oraz ograniczony od góry (bo każdy element $k \in A$ spełnia $k \leq na$). Zbiór A ma więc element największy, i niech k_0 będzie tym elementem. Wtedy $k_0 + 1$ jako liczba większa nie jest już elementem A, czyli $k_0 + 1 > na$. Możemy to zapisać

$$a < \frac{k_0 + 1}{n}.$$

Z drugiej strony zauważmy, że także $\frac{k_0+1}{n} < b$. Wynika to stąd, że gdyby $\frac{k_0+1}{n} \geq b$ to, biorąc pod uwagę, że $\frac{k_0}{n} \leq a$ mielibyśmy

$$b - a \leq \frac{k_0 + 1}{n} - a \leq \frac{k_0 + 1}{n} - \frac{k_0}{n} = \frac{1}{n},$$

co jest sprzeczne z naszym wyborem liczby n, bo przecież miało być $\frac{1}{n} < (b-a)$. Liczba $\frac{k_0+1}{n}$ jest więc szukaną liczbą wymierną wewnątrz przedziału (a,b). Zauważmy, że ten argument można trochę przerobić, żeby znaleźć także liczbę niewymierną wewnątrz przedziału (a,b). Zostawiamy to jako ćwiczenie.

Zasada indukcji

Zbiór liczb naturalnych ma następującą własność: Każdy jego niepusty podzbiór posiada element najmniejszy. Z tej własności wynika następująca zasada indukcji. Niech $T(n)$, $n \geq n_0$ będzie pewnym ciągiem twierdzeń. Często w zastosowaniach są to równości bądź nierówności, w których występuje liczba naturalna n. Niech:

1. $T(n_0)$ będzie prawdziwe (punkt startowy indukcji),
2. $\forall\, n \geq n_0$ zachodzi wynikanie ($T(n)$ – prawdziwe) $\Rightarrow$ ($T(n+1)$ – prawdziwe) (krok indukcyjny).

Wtedy wszystkie twierdzenia $T(n)$, $n \geq n_0$ są prawdziwe. Zasada indukcji jest intuicyjnie oczywista, i można ją łatwo udowodnić: Jeżeli nie wszystkie twierdzenia $T(n)$, $n \geq n_0$ są prawdziwe, to niech $A \subset \mathbf{N}$ będzie zbiorem tych $n \geq n_0$, dla których $T(n)$ nie jest prawdziwe. A ma element najmniejszy który oznaczymy przez $\tilde{n}$. Zauważmy, że z warunku 1. wynika, że $\tilde{n} > n_0$. Mamy więc $T(\tilde{n})$ fałszywe (bo $\tilde{n} \in A$), ale $T(\tilde{n}-1)$ prawdziwe, gdyż $\tilde{n}-1 \notin A$. Ale to przeczy warunkowi 2., gdyż z prawdziwości $T(\tilde{n}-1)$ wynika prawdziwość $T(\tilde{n})$.

Przykład: Pokażemy, że $\forall\, n \in \mathbf{N}$ prawdziwe jest twierdzenie $T(n)$, które w tym przypadku jest nierównością $10n < 2^n + 25$. Przeprowadzimy krok indukcyjny, czyli dowód 2. Załóżmy więc

$$10n < 2^n + 25,$$

i spróbujmy, przy wykorzystaniu powyższego udowodnić

$$10(n+1) < 2^{n+1} + 25. \tag{2.1}$$

Mamy więc

$$10(n+1) = 10n + 10 < 2^n + 25 + 10. \tag{2.2}$$

Żeby dokończyć dowód, i dojść do prawej strony (2.1) potrzebujemy nierówność $10 \leq 2^n$, która, niestety, jest prawdziwa tylko dla $n \geq 4$. Załóżmy więc, że $n \geq 4$, i dokończmy (2.2):

$$2^n + 25 + 10 < 2^n + 2^n + 25 = 2^{n+1} + 25,$$

czyli mamy zrobiony krok indukcyjny, dla dowolnego $n \geq 4$. Oznacza to, że zasadę indukcji będziemy mogli zastosować tylko do udowodnienia nierówności dla $n \geq 4$. Co z nierównościami dla $n = 1, 2, 3$? Tych kilka przypadków sprawdzimy ręcznie, niezależnie od indukcji. Dodatkowo został jeszcze przypadek $n_0 = 4$, który jest punktem startowym dla indukcji $n \geq 4$. Musimy więc sprawdzić bezpośrednio:
$n = 1: \; 10 < 2 + 25$ prawdziwe,
$n = 2: \; 20 < 2^2 + 25$ prawdziwe,
$n = 3: 30 < 2^3 + 25$ prawdziwe, oraz w końcu
$n = 4: \; 40 < 2^4 + 25 = 41$ też prawdziwe.

Skorzystaliśmy z zasady indukcji, żeby przeprowadzić dowód dla $n \geq 4$, a pozostałe przypadki sprawdziliśmy bezpośrednio. To jest typowy przykład: próbując wykonać krok indukcyjny znajdujemy ograniczenie na n przy którym krok indukcyjny jest możliwy. Do tego ograniczenia dopasowujemy punkt startowy indukcji, a pozostałe przypadki sprawdzamy „ręcznie”.

Liczby zespolone

Zbiór liczb zespolonych $\mathbf{C}$ to zbiór symboli $a+b\,i$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$. W tym zbiorze wprowadzamy działania arytmetyczne w następujący sposób. Symbole dodajemy, odejmujemy i mnożymy tak, jakby były to zwykłe liczby rzeczywiste, to znaczy z zachowaniem zasad przemienności, łączności i rozdzielności, oraz dodatkowo stosując równość $i^2 = -1$. W przypadku dodawania i odejmowania daje nam to wzory:

$$\begin{aligned}(a + b\,i) + (c + d\,i) &= (a + c) + (b + d)\,i,\\ (a + b\,i) - (c + d\,i) &= (a - c) + (b - d)\,i.\end{aligned}$$

Sprawdźmy, co dostaniemy mnożąc liczby:

$$\begin{aligned}(a + b\,i) \cdot (c + d\,i) &= a \cdot c + a \cdot d\,i + b\,i \cdot c + b\,i \cdot d\,i\\ &= a \cdot c + a \cdot d\,i + c \cdot b\,i + b \cdot d\,i^2\\ &= (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)\,i.\end{aligned}$$

Powyższe wzory łatwo jest zapamiętać: trzeba tylko pamiętać, że wszystkie działania wykonujemy traktując i jak zwykłą liczbę, a w końcu podstawiamy $i^2 = -1$. Podobnie można wyprowadzić wzór na dzielenie liczb zespolonych (z wyjątkiem dzielenia przez 0), zostawiamy to jako ćwiczenie. Liczby rzeczywiste traktujemy jako podzbiór liczb zespolonych $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ poprzez identyfikację $x \sim x + 0\,i$. Zauważmy, że ta identyfikacja zachowuje działania: na przykład $(a + 0\,i) + (b + 0\,i) = (a + b) + 0\,i$. Zauważmy, że zerem liczb zespolonych (to znaczy taką liczbą, której dodanie nic nie zmienia) jest liczba rzeczywista $0 = 0 + 0\,i$. Podobnie jedynką liczb zespolonych (to znaczy taką liczbą, pomnożenie przez którą nic nie zmienia) jest liczba rzeczywista $1 = 1 + 0\,i$. Zbiór $\mathbf{C}$ ma zaletę (dowód tego nie jest prosty): każdy wielomian o współczynnikach zespolonych rozkłada się na iloczyn czynników liniowych. Dzięki temu liczby zespolone stanowią ważne narzędzie i dla matematyków i dla inżynierów (także dla informatyków :-)). Często przydają się następujące pojęcia:

- część rzeczywista liczby $(a + b\,i)$ to a, zapisujemy to $\Re(a + b\,i) = a$
- część urojona liczby $(a + b\,i)$ to b, piszemy $\Im(a + b\,i) = b$
- sprzężenie liczby $(a + b\,i)$ to liczba $a - b\,i$, piszemy $\overline{a + b\,i} = a - b\,i$

Mamy następujące własności

1. $\overline{(\overline{z})} = z, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w},$
2. $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad \Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\,i},$
3. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}$ (liczby rzeczywiste to te liczby zespolone, które mają zerową część urojoną),
4. $z \cdot \overline{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$ – nieujemna liczba rzeczywista.

Moduł

Moduł liczby zespolonej definiujemy jako

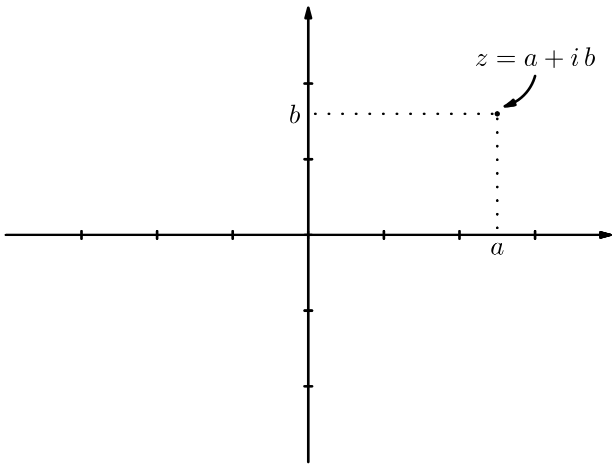
$$|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}.$$

Przykłady: $| - 1 + 2\,i| = \sqrt{-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $|i| = |0 + 1\,i| = 1$.
Moduł liczby zespolonej jest odpowiednikiem wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej. Mamy następujące własności modułu

- $|z| \geq 0$ i $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
- $|z| = | - z| = |\overline{z}|$,
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (nierówność trójkąta),
- $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$.

Interpretacja geometryczna

Liczby zespolone, czyli wyrażenia postaci $a + b\,i$ można utożsamiać z punktami płaszczyzny $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : \; x, y \in \mathbf{R}\}$. Przy tej interpretacji dodawanie



Rysunek 2.3: Płaszczyzna liczb zespolonych

jest zgodne z dodawaniem wektorów, a mnożenie przez liczbę rzeczywistą z mnożeniem przez skalar. Sprzężenie jest odbiciem względem osi poziomej, a moduł oznacza euklidesową odległość od początku układu współrzędnych. Części rzeczywista i urojona liczby zespolonej to po prostu współrzędne, pozioma i pionowa odpowiadającego tej liczbie punktu na płaszczyźnie.

Postać trygonometryczna

Liczbę zespoloną $a + b\,i$ można zapisać w tak zwanej postaci trygonometrycznej. W tej postaci liczby łatwo mnoży się, podnosi do potęgi, wyciąga pierwiastki. Niech $z = a + b\,i \neq 0$

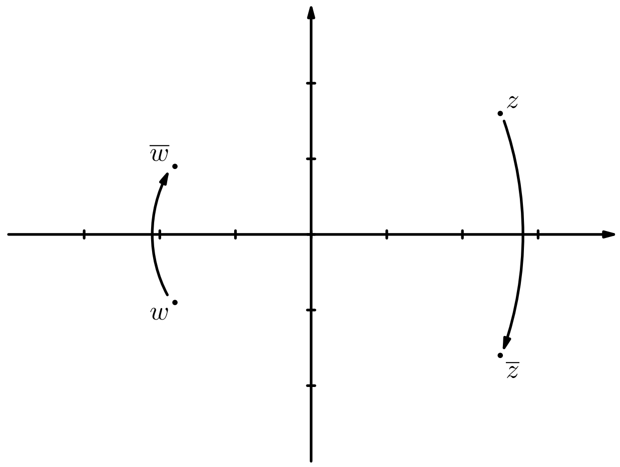
$$z = a + b\,i = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,i\right).$$

Można znaleźć liczbę φ (dokładnie jedną w przedziale $[0, 2\pi)$) taką, że

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

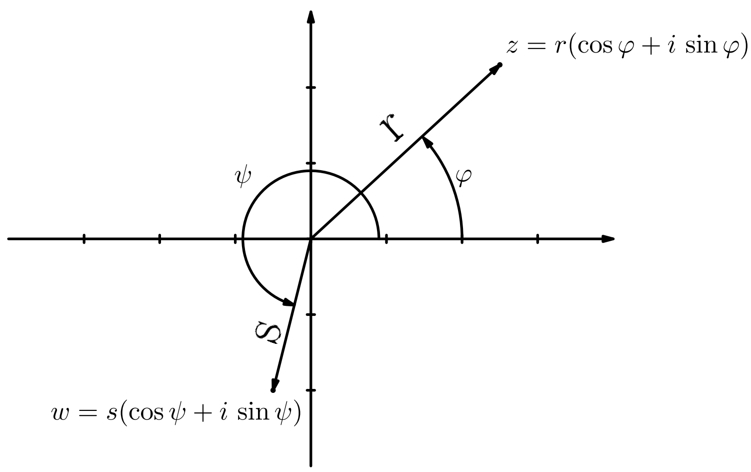
Możemy to podstawić do wzoru na z, i otrzymamy postać trygonometryczną liczby zespolonej

$$z = |z|(\cos\varphi + i\,\sin\varphi).$$



Rysunek 2.4: Sprzężenie liczby zespolonej

Używając interpretacji geometrycznej zapis liczby zespolonej $a+b\,i$ w postaci trygonometrycznej $r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ odpowiada przedstawieniu punktu (a, b) na płaszczyźnie we współrzędnych biegunowych (r, φ).



Rysunek 2.5: Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Liczbę φ nazywamy argumentem z. Ponieważ funkcje sin i cos są okresowe o okresie 2π, więc istnieje nieskończenie wiele argumentów każdej liczby z, różniących się dokładnie o całkowitą wielokrotność 2π. Ten spośród argumentów, który leży w przedziale $[0, 2\pi)$ (jest dokładnie jeden taki) nazywamy argumentem głównym z.

Przykład: $z = 1 - i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}}i)$. Szukamy $\varphi \in [0, 2\pi)$, takiej, że

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Łatwo zauważyć, że $\varphi = \frac{7}{4}\pi$.

Uwagi: (i) Dwie liczby zespolone są równe, jeżeli ich części rzeczywiste i urojone są równe. W przypadku zapisu liczb w postaci trygonometrycznej mamy

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2)$$

wtedy gdy $r_1 = r_2$ oraz $\varphi_1 - \varphi_2$ jest całkowitą wielokrotnością 2π,

(ii) $r_1(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ (moduły mnożymy, argumenty dodajemy),

(iii) $z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \Rightarrow z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\,\sin(n\varphi))$,

(iv) pierwiastkiem liczby zespolonej z stopnia $n \in \mathbf{N}$ nazywamy liczbę zespoloną w taką, że $w^n = z$. Posługując się postacią trygonometryczną pokażemy, że każda liczba zespolona $z \neq 0$ ma dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n. Niech $z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ (przy czym niech φ będzie argumentem głównym z) oraz $n \in \mathbf{N}$. Wprowadźmy nastepujące liczby

$$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos\psi_k + i\,\sin\psi_k), \quad \text{gdzie } \psi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Zauważmy, że każda z liczb w_k jest pierwiastkiem stopnia n z z, oraz wszystkie są różne:$\psi_k - \psi_l = \frac{k-l}{n}2\pi$, przy czym $-1 < \frac{k-l}{n} < 1$. Jedyną liczbą całkowitą spełniającą obie nierówności jest zero, a więc jeżeli $w_k = w_l$ to $k = l$. Mamy więc n różnych pierwiastków. Więcej nie może być, gdyż każdy pierwiastek stopnia n z liczby z jest pierwiastkiem wielomianu stopnia n $P(w) = w^n - z$. Wiemy, że wielomiany stopnia n mają najwyżej n różnych pierwiastków.

Przykład: Obliczmy następujące pierwiastki: $\sqrt[4]{1-i} = \sqrt[8]{2}(\cos\psi_k + i\,\sin\psi_k)$, gdzie $\psi_k = \frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{4} = \frac{(7+8k\pi)}{16}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Rozdział 3

Funkcje

Przypomnimy najważniejsze potrzebne nam pojęcia dotyczące funkcji. Niech $A \subset \mathbf{R}$ będzie podzbiorem liczb rzeczywistych. Funkcją f określoną na A o wartościach rzeczywistych nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi A jakiejś liczby rzeczywistej. Funkcja jest o wartościach zespolonych, jeżeli każdemu punktowi A przyporządkowana jest liczba zespolona. Piszemy

$$f : M \to \mathbf{R} \quad \text{lub} \quad f : M \to \mathbf{C}.$$

Zbiór A nazywa się dziedziną funkcji f i często oznaczany jest przez D_f. Zbiór

$$f\big(D_f\big) = \{y :\ \exists\, x \in D_f\ f(x) = y\}$$

nazywa się obrazem f, lub zbiorem wartości f.

Określenie funkcji (czyli przyporządkowanie wartości elementom dziedziny) najczęściej ma postać wzoru. Często dziedzina rozdzielona jest na podzbiory, i funkcja zadana jest różnymi wzorami na poszczególnych częściach dziedziny. Tak zdefiniowaną funkcję nazywamy funkcją „sklejoną" z kawałków. Definiując funkcję najczęściej pomijamy dziedzinę D_f. Wtedy domyślnie funkcja jest określona na największym zbiorze, na którym wzór definiujący funkcję ma sens. Taki maksymalny zbiór nazywamy dziedziną naturalną f.

Przykłady: (a) Funkcja $f(x) = x^2$ ma jako dziedzinę naturalną całą prostą $\mathbf{R}$. Zbiorem wartości są wszystkie liczby rzeczywiste nieujemne.

(b) funkja $f(x) = \frac{1}{x}$ ma jako dziedzinę naturalną całą prostą bez zera $\{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$. Obrazem f jest również cała prosta bez zera. Żeby się o tym przekonać wystarczy rozwiązać ze względu na x równanie

$$y = \frac{1}{x} \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{y}.$$

Rozwiązanie istnieje dla każdego $y \neq 0$, czyli dla każdego takiego y znajdziemy x takie, że $y = f(x)$.

(c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Dziedziną naturalną f jest odcinek $[-1, 1]$. Wynika to z tego, że żeby móc wyciągnąć pierwiastek $1 - x^2$ nie może być ujemne. Obrazem f jest odcinek $[0, 1]$. Żeby się o tym przekonać rozwiązujemy ze względu na x równanie

$$y = \sqrt{1-x^2} \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{1-y^2},$$

oraz wiemy, że pierwiastek kwadratowy ma wartości nieujemne (przypomnimy definicję pierwiastków dalej w tym rozdziale).

Monotoniczność funkcji

f jest rosnąca (lub ściśle rosnąca), jeżeli

$$x < y \quad\Rightarrow\quad f(x) < f(y).$$

Mówimy, że jest słabo rosnąca (lub niemalejąca), jeżeli

$$x < y \quad\Rightarrow\quad f(x) \leq f(y).$$

Podobnie f jest malejąca (ściśle malejąca) jeżeli

$$x < y \quad\Rightarrow\quad f(x) > f(y)$$

oraz słabo malejąca (nierosnąca) jeżeli

$$x < y \quad\Rightarrow\quad f(x) \geq f(y).$$

Innymi słowy funkcja rosnąca to taka która zachowuje nierówności, a malejąca to taka, która odwraca nierówności. Mówimy, że f jest monotoniczna, jeżeli jest albo rosnąca, albo malejąca, i to samo z przymiotnikami „ściśle" lub „słabo". Funkcje mogą być monotoniczne kawałkami. Na przykład, $f(x) = x^3$ jest ściśle rosnąca, a więc nierówności możemy podnosić stronami do 3 potęgi. Natomiast $f(x) = x^2$ jest tylko kawałkami monotoniczna – malejąca dla $x \leq 0$ i rosnąca dla $x \geq 0$. Nierówności możemy więc podnosić stronami do kwadratu pod warunkiem, że dotyczą liczb o tym samym znaku. Jeżeli obie liczby są ujemne, to podniesienie nierówności do kwadratu odwróci ją, natomiast jeżeli obie liczby są dodatnie, to ją zachowa.

Wykres

Jeżeli f jest funkcją o wartościach rzeczywistych, to wykresem f nazywamy następujący podzbiór płaszczyzny

$$\{(x,y): \ x \in D_f, \ y = f(x)\} \subset \mathbf{R}^2.$$

Zawsze przy badaniu funkcji warto spróbować naszkicować wykres. Z wykresu można odczytać informacje o funkcji, które nie do się łatwo odczytać ze wzoru. Wykres nie zastępuje oczywiście definicji funkcji.

Działania na funkcjach

W każdym punkcie wartości funkcji są liczbami, więc można je dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. W takim razie te same operacje możemy przeprowadzać na funkcjach. Jeżeli mamy dwie funkcje, f oraz g, z dziedzinami D_f i D_g, to możemy utworzyć funkcje

$$\begin{aligned} f \pm g, &\quad \text{gdzie} \quad (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \\ f \cdot g, &\quad \text{gdzie} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \\ \frac{f}{g}, &\quad \text{gdzie} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Dziedziną tak utworzonych funkcji jest część wspólna dziedzin D_f i D_g, przy czym w przypadku dzielenia dodatkowo z dziedziny ilorazu usuwamy punkty, w których mianownik jest zerem (nie można dzielić przez 0).

Złożenie funkcji i funkcja odwrotna

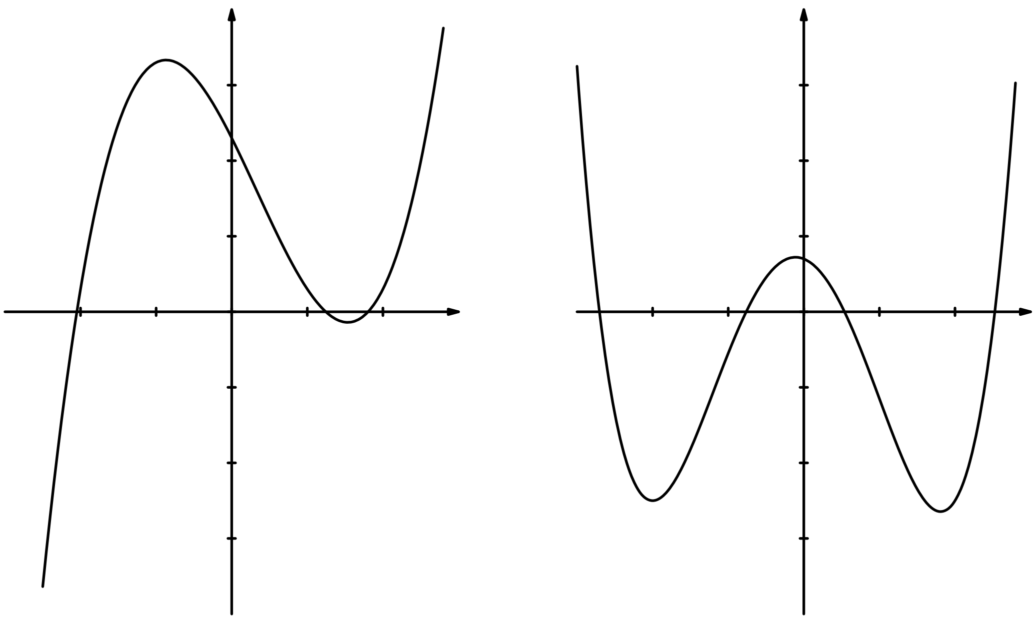
Jeżeli mamy dwie funkcje f i g oraz zbiór wartości funkcji f zawiera się w dziedzinie funkcji g, to można rozważać tak zwane złożenie funkcji f z g:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad x \in D_f.$$

Załóżmy, że mamy funkcję f z dziedziną D_f. Jeżeli pewna funkcja g z dziedziną D_g równą zbiorowi wartości funkcji f spełnia

$$(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in D_f \qquad \text{oraz} \qquad (f \circ g)(y) = y \quad \forall y \in D_g,$$

to funkcję g nazywamy funkcją odwrotną do funkcji f. Funkcję odwrotną do f oznaczamy f^{-1}. Funkcja f ma funkcję odwrotną jeżeli jest różnowartościowa to znaczy $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Funkcje ściśle monotoniczne są różnowartościowe.



Rysunek 3.1: Wielomiany stopnia 3 i 4.

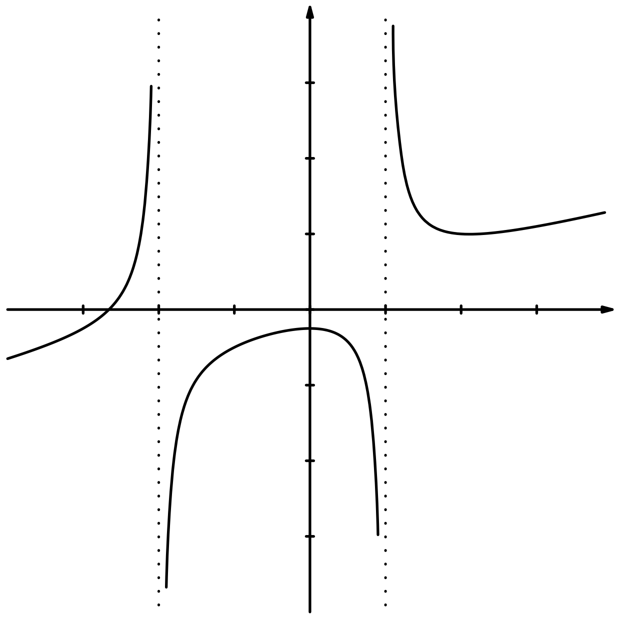
Przykład: Funkcja $f(x) = x^2$ nie jest różnowartościowa i nie ma funkcji odwrotnej. Jeżeli natomiast zawężymy dziedzinę f do $x \geq 0$ to f jest ściśle rosnąca, i ma funkcję odwrotną $g(y) = \sqrt{y}$ określoną dla $y \geq 0$. Podobnie, jeżeli zawężymy dziedzinę f do $x \leq 0$, to f jest funkcją ściśle malejącą i ma funkcję odwrotną $g(y) = -\sqrt{y}$ określoną na $y \geq 0$.

Funkcje elementarne

Najczęściej spotykane funkcje to tak zwane funkcje elementarne. Przypomnijmy krótko najważniejsze funkcje elementarne.

(a) Wielomiany to funkcje postaci $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. n nazywa się stopniem wielomianu (0czywiście jeżeli $a_n \neq 0$). Współczynniki $a_0, \ldots, a_n$ mogą być rzeczywiste lub zespolone. Dziedziną naturalną jest cała prosta $\mathbf{R}$. Wielomian stopnia n ma nie więcej niż n pierwiastków. Wielomian o współczynnikach rzeczywistych stopnia nieparzystego ma co najmniej 1 pierwiastek rzeczywisty, natomiast stopnia parzystego może wogóle nie mieć pierwiastków rzeczywistych. a_0 nazywa się wyrazem wolnym, a $a_n x^n$ wyrazem wiodącym. Dla dużych $|x|$ wielomian zachowuje się podobnie do swojego wyrazu wiodącego $a_n x^n$.

(b) Funkcje wymierne to funkcje postaci $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P i Q są wielomianami. $D_f = \{x : Q(x) \neq 0\}$.



Rysunek 3.2: Przykład funkcji wymiernej.

(c) Funkcja potęgowa $f(x) = x^\alpha$. Funkcję potęgową zdefinujemy dla $x > 0$, chociaż jej dziedzina naturalna może być większa, zależnie do wykładnika α. Dla $\alpha = n \in \mathbf{N}$ mamy zwykła definicję:

$$x^n = x \cdot c \cdot \cdots \cdot x \quad n \text{ - razy.}$$

Tak otrzymana funkcja potęgowa jest ściśle rosnąca na przedziale $[0, \infty)$ i przekształca go na siebie samego. Jest wobec tego odwracalna, i odwrotna do niej, z dziedziną $[0, \infty)$ i obrazem $[0, \infty)$ jest pierwiastkiem stopnia n: $\sqrt[n]{x}$.

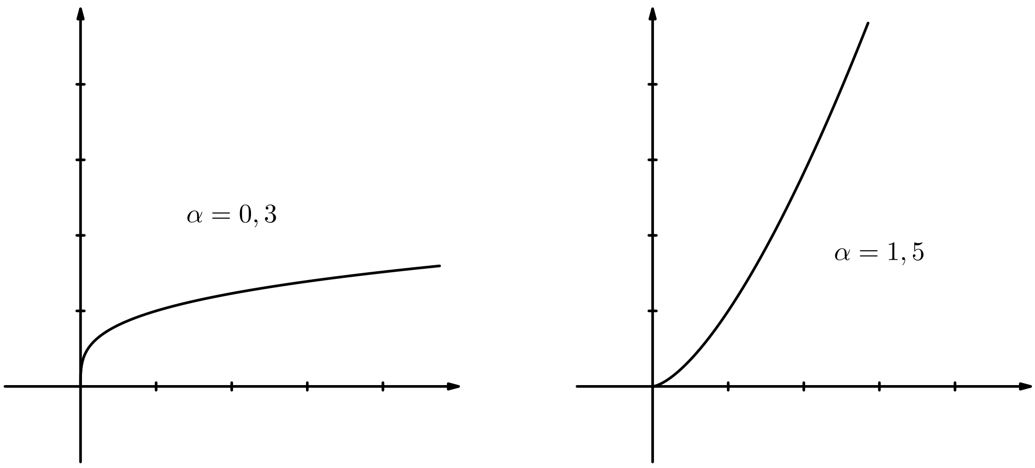
Uwaga: Jeżeli wykładnik n jest parzysty, to funkcja x^n nie jest odwracalna na żadnym większym zbiorze od $[0, \infty)$. Naturalną dziedziną pierwiastka stopnia parzystego jest więc półprosta $[0, \infty)$. Zauważmy też, że pierwiastek w tym przypadku jest nieujemny. Natomiast jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to funkcja x^n jest ściśle rosnąca na całej prostej $\mathbf{R}$, a więc jest odwracalna na całej prostej. Naturalną dziedziną pierwiastka stopnia nieparzystego jest więc cała prosta $\mathbf{R}$.

Jeżeli $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ to definiujemy

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

Dla $\alpha = \frac{m}{n}$, $m, n, \in \mathbf{Q}$ definiujemy funkcję potęgową następująco

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m.$$



Rysunek 3.3: Funkcja potęgowa $f(x) = x^\alpha$.

Zauważmy, że powyższa definicja nie zależy od tego, czy najpierw podniesiemy x do potęgi m, a potem wyciągniemy pierwiastek, czy odwrotnie. Nie zależy też od konkretnej reprezentacji ułamka. Łatwo bowiem zauważyć, że jeżeli dodatkowo $p \in \mathbf{N}$ to

$$\sqrt[pn]{x^{pm}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Jeżeli $\alpha > 0$ nie jest liczbą wymierną, to do definicji korzystamy z pojęcia kresu. Zauważmy, że jeżeli $x > 1$ jest ustalone, to x^q rośnie wraz z q (q na razie wymierne). Dla takiego x możemy zdefiniować

$$x^\alpha = \sup\{x^q : \ q \in \mathbf{Q}, q < \alpha\}.$$

Podobnie, jeżeli $0 < x < 1$ to x^q maleje ze wzrostem q i możemy zdefiniować

$$x^\alpha = \inf\{x^q : \ q \in \mathbf{Q}, q < \alpha\}.$$

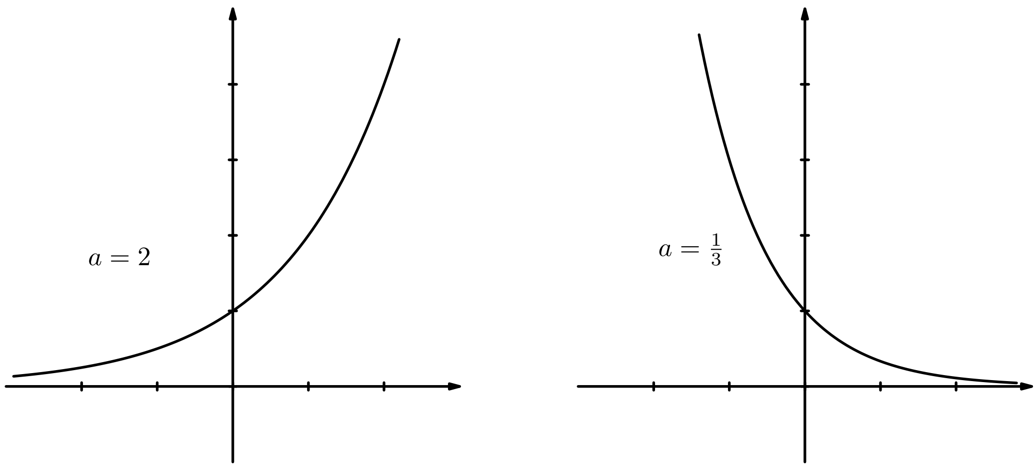
W końcu jeżeli $x = 1$ to oczywiście dla dowolnego α definiujemy $x^\alpha = 1$.

Jeżeli $\alpha < 0$ to definiujemy

$$x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}},$$

a jeżeli $\alpha = 0$ to $x^\alpha = 1$. Przypomnijmy: dziedziną funkcji potęgowej są liczby ściśle dodatnie. Funkcja potęgowa jest rosnąca dla dodatniego wykładnika, i malejąca dla ujemnego wykładnika.

(d) Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$, $a > 0$. $D_f = \mathbf{R}$. Przypomnijmy, że sama potęga była zdefiniowana przy okazji funkcji potęgowej. Różnica funkcji wykładniczej z potęgową polega na tym, że w przypadku funkcji potęgowej



Rysunek 3.4: Funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$.

podstawa jest zmienną, a wykładnik jest stałym parametrem. Natomiast w przypadku funkcji wykładniczej podstawa jest stałym parametrem, a wykładnik się zmienia. Jeżeli podstawa jest większa od 1 to funkcja jest rosnąca, a jeżeli podstawa jest mniejsza od 1 to funkcja jest malejąca. Jeżeli podstawa jest równa 1, to funkcja wykładnicza jest oczywiście stała, równa 1.

(e) Logarytm $f(x) = \log_a x,\ a > 0, a \neq 1$. $D_f = \mathbf{R}^+$. Logarytm jest funkcja odwrotną do wykładniczej, czyli $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. Jeżeli podstawa jest większa od 1, to logarytm jest rosnący, a jeżeli podstawa jest mniejsza od 1, to logarytm jest malejący.

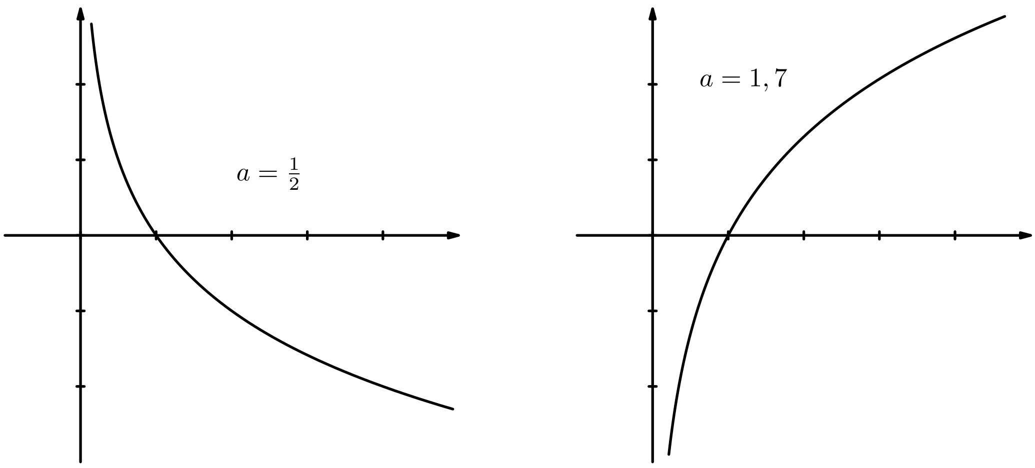
Mamy następujące własności potęg i logarytmów (w każdym przypadku musimy pamiętać o ewentualnych ograniczeniach na zakres zmiennych): $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\cdot\beta}$, $(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$, $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

(f) Funkcje trygonometryczne. Na okręgu jednostkowym odmierzamy od punktu $(1, 0)$ odległość φ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara jeżeli $\varphi > 0$ i zgodnie z ruchem wskazówek zegara jeżeli $\varphi < 0$. Daje nam to pewien punkt na okręgu jednostkowym (x, y). Współrzędne tego punktu nazywamy funkcjami cos i sin odpowiednio:

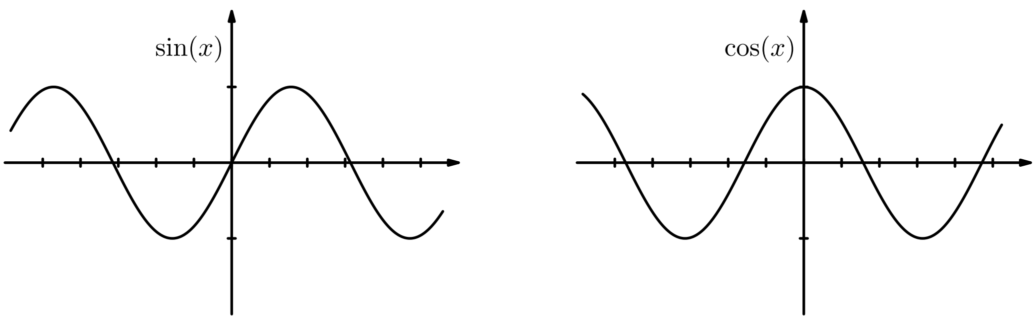
$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi.$$

Funkcje cos i sin są okresowe o okresie 2π, to znaczy obie spełniają $f(x + 2\pi) = f(x)$ (bo długość całego okręgu jednostkowego to 2π). Mamy też $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (bo promień okręgu jest równy 1), oraz równości

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi,$$



Rysunek 3.5: Logarytm $f(x) = \log_a x$.



Rysunek 3.6: Funkcje $\sin(x)$ i $\cos(x)$.

$$\sin(\varphi + \psi) = \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi.$$

Funkcja $\tan x$ to iloraz sinusa przez cosinus:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

tan jest funkcją okresową o okresie π.

Rozdział 4

Ciągi

Definicja 4.1. *Ciąg rzeczywisty to funkcja* $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, *a ciąg zespolony to funkcja* $a : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$.

W przypadku ciągów wartość a w n nazywamy n-tym wyrazem ciągu, a zamiast $a(n)$ często piszemy a_n. Ciąg o wyrazach a_n oznaczamy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lub krócej $\{a_n\}$. Będziemy głównie rozważać ciągi rzeczywiste, jeżeli gdzieś pojawią się ciągi zespolone, to zwrócimy na to uwagę.

Przykłady: (a) Ciąg (postęp) geometryczny: $a, aq, aq^2, \dots, a_n = aq^{n-1}$,

(b) ciąg stały $a_n = c$,

(c) ciąg harmoniczny $a_n = \frac{1}{n}$,

(d) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$,

(e) ciąg Fibonacciego $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

Żeby zdefiniować ciąg musimy jednoznacznie opisać w jaki sposób mają być obliczane wyrazy a_n. Można to zrobić wzorem ogólnym, jak w przykładach (a)–(c), lub *rekurencyjnie*, jak w przykładach (d) i (e). Definicja rekurencyjna (czasem nazywana też indukcyjną) opisuje w jaki sposób następny wyraz ciągu obliczyć znając poprzednie. Trzeba też zdefiniować wystarczająco wiele wyrazów początkowych. Na przykład w definicji ciągu Fibonacciego kolejne wyrazy obliczamy z dwóch poprzednich, a więc jako punkt wyjściowy musimy podać dwa pierwsze wyrazy.

Mówimy, że ciąg jest:

- ściśle rosnący jeżeli $a_n < a_{n+1}$, ściśle malejący jeżeli $a_n > a_{n+1}$,
- słabo rosnący jeżeli $a_n \leq a_{n+1}$, słabo malejący jeżeli $a_n \geq a_{n+1}$,
- ściśle monotoniczny jeżeli jest albo ściśle rosnący albo ściśle malejący, oraz słabo monotoniczny jeżeli jest słabo rosnący lub słabo malejący.

Czasem mówimy po prostu, że ciąg jest rosnący lub malejący, jeżeli nie jest ważne, czy chodzi nam ścisłą, czy słabą monotoniczność.

Ciąg harmoniczny z przykładu (c) jest ściśle malejący, natomiast ciągi z przykładów (d) i (e) ściśle rosnące. Przykład (c) wynika wprost ze wzoru: $a_n > a_{n+1}$ to nic innego niż $n+1 > n$. Przykłady (d) i (e) można sprawdzić indukcyjnie. W przypadku (d) najpierw dowodzimy, że wszystkie wyrazy a_n są mniejsze niż 2, a następnie korzystając z tego dowodzimy, że ciąg jest rosnący. Oba dowody można przeprowadzić przy pomocy metody indukcji. Podobnie w przykładzie (e), najpierw indukcyjnie pokazujemy, że wszystkie wyrazy są ściśle dodatnie $a_n > 0$, a następnie wprost ze wzoru rekurencyjnego pokazujemy, że ciąg jest rosnący $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} > a_{n+1}$. To jest typowa sytuacja – jeżeli ciąg zdefiniowany jest rekurencyjnie, to jego własności dają się z reguły udowodnić indukcyjnie.

Działania na ciągach

Ciągi dodajemy, odejmujemy, mnożymy i dzielimy tak jak funkcje: $(a \pm b)_n = a_n + b_n$, $(a \cdot b)_n = a_n \cdot b_n$, $\left(\frac{a}{b}\right)_n = \frac{a_n}{b_n}$, $b_n \neq 0$.

Ciągi ograniczone

Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, jeżeli

$$\exists\ M \quad \forall\ n \in \mathbf{N} \quad |a_n| \leq M,$$

mówimy, że jest ograniczony od góry, jeżeli

$$\exists\ M \quad \forall\ n \in \mathbf{N} \quad a_n \leq M,$$

oraz mówimy, że jest ograniczony od dołu, jeżeli

$$\exists\ M \quad \forall\ n \in \mathbf{N} \quad a_n \geq M.$$

Przykłady: (a) ciąg harmoniczny $a_n = \frac{1}{n}$ jest ograniczony, od dołu przez 0, i od góry przez $a_1 = 1$. Ogólniej, ciąg malejący zawsze jest ograniczony od góry przez swój pierwszy wyraz, podobnie ciąg rosnący jest ograniczony od dołu przez swój pierwszy wyraz,

(b) Ciąg Fibonacciego nie jest ograniczony od góry. Mówiliśmy już, że wyrazy tego ciągu są dodatnie. Podobnie, indukcyjnie można udowodnić, że wyrazy tego ciągu spełniają $a_n \geq n$ dla $n \geq 6$. Z tego widać już, że ciąg nie może być ograniczony od góry.

(c) Ciąg $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ jest ograniczony. Widać od razu, że wyrazy tego ciągu są dodatnie (pierwiastek jest funkcja rosnącą), czyli ciąg jest ograniczony od dołu przez 0. Pokażemy, że jest też ograniczony od góry.

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+1}+1} \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(d) Postęp geometryczny $a_n = aq^{n-1}$ jest ograniczony, jeżeli $|q| \leq 1$ i nieograniczony, jeżeli $|q| > 1$ i $a \neq 0$. Pierwsze stwierdzenie jest oczywiste: $|a_n| = |aq^{n-1}| = |a||q|^{n-1} \leq |a|$. Drugie stwierdzenie wymaga pewnego dowodu. Możemy wykorzystać na przykład następującą ważną nierówność, którą można udowodnić na przykład indukcyjnie: dla $\epsilon > 0$

$$(1+\epsilon)^n > 1 + n\epsilon. \tag{4.1}$$

Jeżeli $|q| > 1$ to $|q| = (1+\epsilon)$ dla pewnego $\epsilon > 0$. Mamy więc

$$|a_n| = |a| \cdot |q|^{n-1} = \frac{|a|}{|q|} (1+\epsilon)^n > \frac{|a|}{|q|} (1+n\epsilon).$$

Jeżeli $|a_n| \leq M$, to

$$\frac{|a|}{|q|} (1+n\epsilon) \leq M \quad \Rightarrow \quad n \leq \frac{1}{\epsilon} \left(M \frac{|q|}{|a|} - 1 \right).$$

Z powyższego widać już, że ciąg a_n nie może być ograniczony.

Zbieżność ciągu

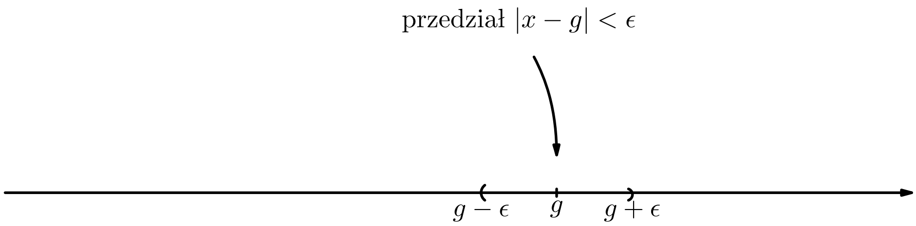
Przechodzimy teraz do najważniejszego dla nas pojęcia dotyczącego ciągów

Definicja 4.2. *Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do liczby g jeżeli*

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\ n \geq n_0 \quad |a_n - g| < \epsilon.$$

Zapisujemy to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \textit{lub} \quad a_n \xrightarrow{n\to\infty} g.$$



Rysunek 4.1: Granica ciągu

Definicja odnosi się do ciągów i rzeczywistych i zespolonych, w tym drugim przypadku granica też może być liczbą zespoloną, a $|\cdot|$ oznacza moduł liczby zespolonej.

Przykłady: (a) $a_n = \frac{1}{n}$. Można łatwo udowodnić, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Udowodnijmy to.

$$|a_n - 0| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\,\sqrt{n}}.$$

Wystarczy więc rozwiązać nierówność $\frac{1}{2\,\sqrt{n}} < \epsilon$

$$\frac{1}{2\,\sqrt{n}} < \epsilon \Leftrightarrow 2\sqrt{n} > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{4\,\epsilon^2}.$$

Dla zadanego $\epsilon > 0$ istnieje więc $n_0 = \left[\frac{1}{4\epsilon^2}\right] + 1$ spełniające warunek definicji.

(c) $a_n = \frac{n^2+2}{2\,n^2-1} \xrightarrow{M\to\infty} \frac{1}{2}$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie rozwiążemy odpowiednią nierówność. Tym razem ułatwimy sobie rachunki stosując oszacowania, zamiast rozwiązania dokładnego

$$\left|\frac{n^2+2}{2\,n^2-1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2\,(2n^2-1)} \leq \frac{5}{2\,n}.$$

Ostatnie oszacowanie, czyli $2(2n^2-1) \geq 2n$ jest prawdziwe dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$, i można je udowodnić rozwiązując nierówność kwadratową. Na koniec wystarczy więc rozwiązać prostą nierówność $\frac{5}{2n} < \epsilon$ co daje $n > \frac{5}{2\epsilon}$. Niech więc, dla zadanego $\epsilon > 0$ będzie $n_0 = [\frac{5}{2\epsilon}] + 1$.

(d) Ciąg stały $a_n = c$ ma granicę $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

Zbieżność ciągów do podanych granic w powyższych przykładach pokazaliśmy korzystając wprost z definicji. W praktyce najczęściej pokazujemy zbieżność korzystając z różnych własności granic. Na przykład, mamy następujące podstawowe twierdzenie

Twierdzenie 4.3. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *to ciągi* $\{(a\pm b)_n\}$ *i* $\{(a\cdot b)_n\}$ *są zbieżne, oraz*

$$\lim_{n\to\infty}(a\pm b)_n = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a\pm b,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a\cdot b)_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a\cdot b.$$

Jeżeli dodatkowo $b_n \neq 0$ *dla wszystkich* $n\in\mathbf{N}$ *i* $b\neq 0$ *to ciąg ilorazów* $\{(\frac{a}{b})_n\}$ *jest zbieżny, oraz*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)_n = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

W dowodzie twierdzenia wykorzystamy następujące obserwacje

Fakt 4.4. *(i) Ciąg zbieżny jest ograniczony. Żeby się o tym przekonać niech ciąg* $\{a_n\}$ *będzie zbieżny do* a *i weźmy dowolne* $\epsilon > 0$, *na przykład* $\epsilon = 1$. *Wtedy istnieje* $n_0\in\mathbf{N}$ *takie, że dla wszystkich* $n\geq n_0$ *zachodzi* $|a_n| - |a| \leq |a_n - a| < 1$, *czyli* $|a_n| < |a|+1$. *Niech*

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, |a|+1\}.$$

Wtedy ciąg $\{a_n\}$ *jest ograniczony przez* M: $\forall\ n\in\mathbf{N}\ |a_n|\leq M$.
(ii) Ciąg $\{b_n\}$ *liczb różnych od zera, zbieżny do granicy* b *różnej od zera jest „oddzielony od zera":*

$$\exists\ \delta > 0 \quad \forall\ n\in\mathbf{N} \quad |b_n|\geq\delta.$$

Żeby się o tym przekonać, niech $\epsilon = \frac{|b|}{2}$. *Wtedy, z definicji zbieżności istnieje* $n_0\in\mathbf{N}$ *takie, że* $|b| - |b_n| \leq |b - b_n| < \frac{|b|}{2}$, *czyli* $|b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$. *Niech*

$$\delta = \min\left\{|b_1|, |b_2|, \dots, |b_{n_0-1}|, \frac{|b|}{2}\right\} > 0.$$

Wtedy $\forall\ n\in\mathbf{N}$ *mamy* $|b_n|\geq\delta$.

Dowód twierdzenia. Przeprowadzimy dowód dla iloczynu, pozostałe przypadki pozostawiając jako ćwiczenie. Dla iloczynu nierównością, którą będziemy chcieli rozwiązać ze względu na n będzie

$$|a_n\cdot b_n - a\cdot b| < \epsilon.$$

Zróbmy tak

$$\begin{aligned}
|a.b_n - a \cdot b| &= |a.b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| \\
&\leq |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n| + |a \cdot b_n - a \cdot b| \\
&= |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b|.
\end{aligned}$$

Wyrażenie po lewej stronie będziemy więc mogli oszacować korzystając z tego, że możemy oszacować wyrażenie po prawej stronie. Wiemy, że ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony (skoro jest zbieżny), więc niech $|b_n| \leq M$. Niech $\tilde{M} = \max\{M, |a|, 1\}$. Niech $\epsilon > 0$. Ustalmy $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{2\,\tilde{M}} > 0$ (możemy wykonać dzielenie, bo wiemy, ze $\tilde{M} > 0$). Wtedy istnieje $n_1 \in \mathbf{N}$ takie, że $|a_n - a| < \tilde{\epsilon}$ dla $n \geq n_1$ oraz istnieje $n_2 \in \mathbf{N}$ takie, że $|b_n - b| < \tilde{\epsilon}$ dla $n \geq n_2$. Niech $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Wtedy $|a_n - a| < \tilde{\epsilon}$ oraz $|b_n - b| < \tilde{\epsilon}$ dla $n \geq n_0$. Mamy więc, dla $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
|a_n \cdot b_n| &\leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \\
&\leq |a_n - a|\ \tilde{M} + |b_n - b|\ \tilde{M} \\
&< \tilde{\epsilon}\ \tilde{M} + \tilde{\epsilon}\ \tilde{M} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

co kończy dowód □

Przykład: Niech

$$a_n = \frac{n^2 + 2}{2\,n^2 - 1} = \frac{1 + \frac{2}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}}.$$

Mamy $\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \frac{2}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n^2} \to 0$ a więc licznik dąży do 1, a mianownik do 2, a więc

$$a_n = \frac{1 + \frac{2}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2}.$$

Granicę tę obliczyliśmy wcześniej z definicji, ale teraz mogliśmy to zrobić znacznie sprawniej.

Granice niewłaściwe

Definicja 4.5. *Ciąg rzeczywisty $\{a_n\}$ ma granicę niewłaściwą $+\infty$ (mówimy, że jest rozbieżny do $+\infty$) jeżeli*

$$\forall\ M \quad \exists\ n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\ n \geq n_0 \quad a_n > M.$$

Ciąg rzeczywisty $\{a_n\}$ ma granicę niewłaściwą $-\infty$ (jest rozbieżny do $-\infty$) jeżeli

$$\forall\ M \quad \exists\ n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\ n \geq n_0 \quad a_n < M.$$

Ciąg zespolony $\{a_n\}$ ma granicę niewłaściwą ∞ (jest rozbieżny do ∞) jeżeli

$$\forall\ M \quad \exists\ n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\ n \geq n_0 \quad |a_n| > M,$$

(w przypadku ciągów zespolonych nie rozróżniamy nieskończoności).

Przykład: Ciąg $a_n = \frac{n^2-3}{n+1}$ jest rozbieżny do $+\infty$: dla $n \geq 3$ mamy

$$\frac{n^2-3}{n+1} \geq \frac{\frac{1}{2}\,n^2}{2\,n} = \frac{n}{4},$$

natomiast $\frac{n}{4} > M \Leftrightarrow n \geq [4M] + 1$. Niech więc $n_0 = \max\{3, [4M] + 1\}$, wtedy dla $n \geq n_0$ mamy $|a_n| > M$.

Twierdzenie o działaniach na granicach rozszerza się na niektóre przypadki granic niewłaściwych. Na przykład, niech $a_n \to a$, $b_n \to b$ (ciągi rzeczywiste). Wtedy

$$a = +\infty,\ b > 0 \Rightarrow a_n \cdot b_n \to +\infty,$$
$$a = +\infty,\ b < 0 \Rightarrow a_n \cdot b_n \to -\infty.$$

Warunek Cauchy'ego

Twierdzenie 4.6. *Ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia tak zwany warunek Cauchy'ego:*

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\ m, n \geq n_0 \quad |a_m - a_n| < \epsilon.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla ciągów rzeczywistych. Rozszerzenie go na ciągi zespolone jest już prostym ćwiczeniem. Dowód ma dwie części: ze zbieżności warunek Cauchy'ego (część „$\Rightarrow$"), oraz z warunku Cauchy'ego zbieżność (część „$\Leftarrow$").

$\Rightarrow$ Zakładamy, że $\{a_n\}$ jest zbieżny do a. Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolne. Wtedy, z definicji zbieżności $\exists\ n_0 \in \mathbf{N}\ \ \forall n \geq n_0$ zachodzi $|a_n - a| < \epsilon/2$. Weźmy $m, n \geq n_0$, wtedy $|a_m - a| < \epsilon/2$ i $|a_n - a| < \epsilon/2$, a więc

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Warunek Cauchy'ego jest więc spełniony.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że ciąg $\{a_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Zauważmy, że w takim razie ciąg $\{a_n\}$ musi być ograniczony: niech $\epsilon = 1$, a więc

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\, m, n \geq n_0 \quad |a_m - a_n| < 1.$$

Czyli, biorąc $n = n_0$ otrzymujemy dla każdego $m \geq n_0$ $|a_m - a_{n_0}| < 1 \Rightarrow |a_m| < |a_{n_0}| + 1$. Niech

$$M = \max\{a_1, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + 1\}.$$

Wtedy, dla każdego $n \in \mathbf{N}$ mamy $|a_n| \leq M$.

Utwórzmy dwa pomocnicze ciągi

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \inf\{a_n :\ n \geq k\} &\leftarrow&\quad \text{ciąg niemalejący},\\ \beta_k &= \sup\{a_n :\ n \geq k\} &\leftarrow&\quad \text{ciąg nierosnący}, \end{aligned}$$

oraz niech

$$\begin{aligned} A &= \sup\{\alpha_k :\ k \in \mathbf{N}\},\\ B &= \inf\{\beta_k :\ k \in \mathbf{N}\}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Wszystkie kresy istnieją, gdyż ciąg jest ograniczony. W pierwszym kroku pokażemy, że $A \leq B$. Ta nierówność jest prawdziwa dla wszystkich ciągów. Załóżmy nie wprost, że $A > B$, i pokażemy, że takie założenie prowadzi do sprzeczności, czyli musi być fałszywe. Jeżeli $A > B$ to niech $0 < \epsilon < \frac{A-B}{2}$. Z definicji kresów znajdziemy $k_1 \in \mathbf{N}$ takie, że

$$\alpha_{k_1} > A - \epsilon.$$

Skoro ciąg $\{\alpha_k\}$ jest niemalejący, to powyższa nierówność zachodzi dla wszystkich $k \geq k_1$. Podobnie, musi istnieć $k_2 \in \mathbf{N}$ takie, że

$$\beta_{k_2} < B + \epsilon, \quad \Rightarrow \quad \forall\, k \geq k_2 \quad \beta_k < B + \epsilon.$$

Niech teraz $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Mamy

$$A - \epsilon < \alpha_{k_0} \leq \beta_{k_0} < B + \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{A-B}{2} < \epsilon,$$

czyli sprzeczność. Musi więc zachodzić

$$A \leq B.$$

Tak, jak już wspomnieliśmy, powyższa nierówność wynika jedynie z definicji liczb A i B i jest prawdziwa dla wszystkich ciągów, a nie tylko tych spełniających warunek Cauchy'ego. Teraz pokażemy, że dla ciągów spełniających warunek Cauchy'ego zachodzi równość: $A = B$. Będziemy znowu rozumowali nie wprost. Niech $A < B$, i niech $0 < \epsilon < \frac{A-B}{2}$. Istnieje $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, ze dla wszystkich $m, n \geq n_0$ zachodzi $|a_m - a_n| < \epsilon$, w szczególności

$$\forall\ n \geq n_0 \quad |a_{n_0} - a_n| < \epsilon \Rightarrow a_{n_0} - \epsilon < a_n < a_{n_0} + \epsilon.$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} \alpha_{n_0} = \inf\{a_n :\ n \geq n_0\} \geq a_{n_0} - \epsilon \quad &\Rightarrow \quad A \geq a_{n_0} - \epsilon \\ \beta_{n_0} = \sup\{a_n :\ n \geq n_0\} \leq a_{n_0} + \epsilon \quad &\Rightarrow \quad B \leq a_{n_0} + \epsilon. \end{aligned}$$

Mamy więc

$$B - A \leq a_{n_0} + \epsilon - a_{n_0} + \epsilon = 2\epsilon \quad \Rightarrow \quad \epsilon \geq \frac{B-A}{2},$$

czyli sprzeczność. Musimy więc mieć równość $A = B$. Niech więc $g = A = B$. Z definicji kresów mamy

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\ n \geq n_0 \quad |g - \alpha_n| < \epsilon \quad \text{oraz} \quad |g - \beta_n| < \epsilon.$$

Biorąc pod uwagę, że ciąg $\{\alpha_n\}$ jest słabo rosnący a $\{\beta_n\}$ słabo malejący powyższe nierówności oznaczają odpowiednio

$$g - \epsilon < \alpha_n \leq g \quad \text{oraz} \quad g \leq \beta_n < g + \epsilon.$$

W takim razie, dla wszystkich $n \geq n_0$ skoro $\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$ to $g - \epsilon < \alpha_n \leq a_n \leq \beta_n < g + \epsilon$, czyli $|a_n - g| < \epsilon$. $\square$

Uwaga: Stałe A i B zdefiniowane w powyższym dowodzie mają sens dla dowolnego ciągu ograniczonego $\{a_n\}$. Stałe te noszą nazwy granicy dolnej i górnej ciągu $\{a_n\}$. Wkrótce omówimy dokładniej te pojęcia.

Przykłady: (a) Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie spełnia warunku Cauchy'ego. Niech $\epsilon = 1$. Wtedy $|a_n - a_{n+1}| = 2 > \epsilon$ dla wszystkich n.

(b) Ciąg $a_n = \frac{n-1}{n}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Sprawdźmy to: niech $m > n$, wtedy

$$|a_m - a_n| = \frac{m-1}{m} - \frac{n-1}{n} = \frac{(m-1)n - (n-1)m}{m \cdot n} = \frac{m-n}{m \cdot n} < \frac{m}{m \cdot n} = \frac{1}{n}.$$

Widać więc, że wystarczy wziąć $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$, wtedy jeżeli $m, n \geq n_0$ to $\frac{1}{m}, \frac{1}{n} < \epsilon$ i warunek Cauchy'ego jest spełniony.

Twierdzenie 4.7. *(i) Każdy ciąg monotoniczny ograniczony ma granicę (właściwą).*
(ii) Każdy ciąg monotoniczny nieograniczony ma granicę niewłaściwą.

Uwaga: Wystarczy monotoniczność słaba, i tylko od pewnego miejsca.

Dowód. (i) Załóżmy, że $\{a_n\}$ jest słabo rosnący i ograniczony, to znaczy

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{oraz} \quad |a_n| \leq M \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Istnieje więc kres górny

$$g = \sup\{a_n : \ n = 1, 2, \ldots\}.$$

Z definicji kresu mamy

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad a_n \leq g \quad \text{oraz} \quad \forall\, \epsilon > 0 \exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad a_{n_0} > g - \epsilon.$$

Skoro $\{a_n\}$ jest słabo rosnący, to $\forall\, n \geq n_0$ mamy $a_n \geq a_{n_0} > g - \epsilon$, czyli $g - \epsilon < a_n \leq g \Rightarrow |a_n - g| < \epsilon$.
(ii) Załóżmy, że ciąg $\{a_n\}$ jest słabo rosnący i nie jest ograniczony, czyli nie jest ograniczony od góry (od dołu jest ograniczony przez a_1). Niech dana będzie liczba M. Skoro ciąg $\{a_n\}$ nie jest ograniczony od góry, to istnieje $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że $a_{n_0} > M$. Skoro ciąg jest słabo rosnący, to

$$\forall\, n \geq n_0 \quad a_n \geq a_{n_0} > M.$$

Spełniony jest więc warunek z definicji granicy niewłaściwej $+\infty$. Przypadek ciągów słabo malejących można udowodnić podobnie. □

Uwaga: Zauważmy, że przy okazji udowodniliśmy, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : \ n \geq 1\},$$

a jeżeli jest malejący i ograniczony, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : \ n \geq 1\}.$$

Dwumian Newtona

Przypomnijmy następujący wzór, tak zwany wzór dwumianowy Newtona. Dla $n \in \mathbf{N}$ silnia n to iloczyn wszystkich liczb naturalnych $k \leq n$: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Przyjmujemy też oznaczenie $0! = 1$. Dla $0 \leq k \leq n$ wprowadzamy tak zwany współczynnik dwumianowy Newtona

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad k, n \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Następujący wzór nazywa się wzorem dwumianowym Newtona. Można go udowodnić na przykład przy pomocy indukcji. Jest to jeden ze wzorów, z którego będziemy stale korzystać, więc warto go dobrze zapamiętać. Niech $a, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, wtedy

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^0\, b^n + \binom{n}{1} a^1\, b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2\, b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} a^n\, b^0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.\end{aligned}$$

Ostatnia równość to po prostu rozwinięcie symbolu sumowania Σ. Symbolu tego będziemy stale używać. Oznacza on po prostu sumę wyrażenia dla wszystkich wartości parametru k z opisanego na symbolu zakresu, w tym wypadku $k = 0, 1, \ldots, n$.

Liczba e

Rozważmy następujący ciąg: $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Pokażemy, że ten ciąg jest rosnący i ograniczony, a więc zbieżny. Zauważmy, że ani to, że $\{a_n\}$ jest rosnący ani to, że jest ograniczony nie jest oczywiste: co prawda potęga rośnie, ale podstawa maleje do 1. Na przykład

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25, \quad a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2{,}370\ldots,$$
$$a_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = 2{,}441\ldots, \quad a_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 = 2{,}488\ldots\,.$$

Pokażemy teraz, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący. Zauważmy następującą równość dla $k = 0, 1, \ldots, n$

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot(n)}{k!\, n\cdot n\cdot\ldots\cdot n\cdot n}\\
&= \frac{1}{k!}\,\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(k-1)}{n}\\
&= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Wyrazy ciągu $\{a_n\}$ rozwiniemy teraz korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, a następnie zastosujemy powyższą równość.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \binom{n}{0}\left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots\\
&\qquad \ldots + \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n\\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \qquad (4.3)\\
&\qquad \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots\\
&\qquad \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że w takiej postaci w jakiej zapisaliśmy go powyżej, wyraz a_n wraz ze wzrostem n zawiera coraz więcej dodatnich składników, a także każdy ze składników robi się coraz większy (z wyjątkiem 2 pierwszych składników, $1+1$, które nie zmieniają się). Jeżeli wyrazy ciągu zapiszemy więc w tej postaci, to widać, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący. Dodatkowo zauważmy, że możemy oszacować a_n od góry

$$
a_n \le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}. \qquad (4.4)
$$

Pierwszą nierówność otrzymujemy z postaci (4.3), poprzez pominięcie czynników mniejszych niż 1, natomiast drugą nierówność otrzymujemy poprzez zastąpienie czynników większych niż 2 w mianownikach przez 2. Mianowniki są więc mniejsze, czyli ułamki większe. Pozostaje nam skorzystać ze wzoru na sumę postępu geometrycznego: dla $q \neq 1$, oraz $l \in \mathbf{N}$ mamy

$$
1 + q + q^2 + \cdots + q^{l-1} = \frac{1-q^l}{1-q}. \qquad (4.5)
$$

Równość powyższą można udowodnić na przykład indukcyjnie. Jest to jedna z tych równości, które trzeba zawsze pamiętać, i będzie pojawiała się wielokrotnie. Suma z prawej strony naszego oszacowania (4.4) to właśnie suma postępu geometrycznego, z $q = \frac{1}{2}$, oraz z jedną dodatkową 1 z przodu. Mamy więc

$$a_n < 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3.$$

Pokazaliśmy więc, że ciąg $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony, a więc zbieżny. Granicę tego ciągu nazywamy e

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Wiemy też z oszacowań, że $2 < e < 3$. e to ważna liczba, która będzie pojawiała się na naszym wykładzie stale, głownie jako podstawa logarytmów i funkcji wykładniczej.

Twierdzenie 4.8 (o 3 ciągach)**.** *Załóżmy, że mamy 3 ciągi spełniające nierówności*

$$a_n \le b_n \le c_n, \qquad n = 1, 2, 3, \dots, \tag{4.6}$$

oraz że skrajne ciągi $\{a_n\}$ oraz $\{c_n\}$ są zbieżne do wspólnej granicy

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Wtedy ciąg $\{b_n\}$ tez jest zbieżny, do tej samej granicy

$$a = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Uwaga: Wystarczy, że ciągi spełniają nierówności (4.6) od pewnego $n_0 \in \mathbf{N}$.

Dowód twierdzenia. Niech $\epsilon > 0$ i niech $n_1 \in \mathbf{N}$ będzie takie, że dla $n \ge n_1$

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad a_n > a - \epsilon,$$

oraz niech $n_2 \in \mathbf{N}$ będzie takie, że dla $n \ge n_2$ zachodzi

$$|c_n - a| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad c_n < a + \epsilon.$$

Istnienie takich n_1 i n_2 wynika ze zbieżności ciągów $\{a_n\}$ i $\{c_n\}$ do wspólnej granicy a. Wtedy, dla $n \ge n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ mamy

$$a - \epsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \epsilon \quad \Rightarrow \quad |b_n - a| < \epsilon. \tag{4.7}$$

Zauważmy jeszcze, że jeżeli nierówności (4.6) zachodzą tylko od pewnego miejsca, na przykład dla $n \ge k$, to wystarczy zmodyfikować definicję n_0: niech $n_0 = \max\{n_1, n_2, k\}$, i nierówność (4.7) zachodzi. W ten sposób uzasadniliśmy uwagę poniżej twierdzenia. □

Przykłady: (a) Niech $a_n = \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. Skorzystamy z twierdzenia o 3 ciągach, a w tym celu wykonamy kilka przekształceń i oszacowań. Widzieliśmy już wcześniej, jak przekształcić różnicę dwóch pierwiastków

$$\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n}\,\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Następnie

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + 1} \leq a_n \leq \frac{1}{2}.$$

Dwa skrajne ciągi mają wspólną granicę $\frac{1}{2}$, więc $a_n \to \frac{1}{2}$.

(b) Niech $a > 1$ i $a_n = \sqrt[n]{a}$. Wyrazy ciągu są pierwiastkami coraz wyższego rzędu z liczby większej od 1. Zauważmy od razu, że taki ciąg musi mieć granicę, gdyż jest malejący, i ograniczony od dołu przez 1. Ta obserwacja nie będzie nam potrzebna, gdyż skorzystamy z twierdzenia o 3 ciągach. Po pierwsze, skoro $a > 1$ to także $a_n > 1$ dla wszystkich n. Niech $\epsilon_n = a_n - 1 > 0$. Skorzystamy z nierówności (4.1), i otrzymujemy

$$a = (1 + \epsilon_n)^n \geq 1 + n\epsilon_n \quad \Rightarrow \quad 0 < \epsilon_n \leq \frac{a-1}{n}.$$

Skrajne ciągi zbiegają do 0, a więc także $\epsilon_n \to 0$ czyli

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

(c) Niech $a_n = \sqrt[n]{n}$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie zapiszmy $a_n = 1 + \epsilon_n$, a więc $\epsilon_n > 0$. Skorzystamy teraz z innej nierówności prawdziwej dla $\epsilon > 0$ i $n \geq 2$

$$(1+\epsilon)^n > \binom{n}{2}\epsilon^2 = \frac{n\,(n-1)}{2}\,\epsilon^2.$$

Nierówność powyższą można udowodnić korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona. Korzystając z niej, otrzymujemy dla $n \geq 2$

$$n = (1+\epsilon_n)^n > \frac{n\,(n-1)}{2}\,\epsilon_n^2 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_n^2 < \frac{2\,n}{n\,(n-1)} \quad \Rightarrow \quad 0 < \epsilon_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Prawy skrajny ciąg zbiega do 0. Można to pokazać z definicji, a można skorzystać z ogólnego twierdzenia o zbieżności pierwiastków, które udowodnimy poniżej. Korzystając z 3 ciągów ponownie pokazaliśmy, że $\epsilon_n \to 0$, a więc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Twierdzenie 4.9. *Niech $a_n \to a$, $a_n \geq 0$ oraz $m \in \mathbf{N}$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a}.$$

Dowód. Rozpatrzymy 2 przypadki: $a = 0$ i $a > 0$. Jeżeli $a = 0$ to niech $\epsilon > 0$ będzie dowolne, i niech $\tilde{\epsilon} = \epsilon^m$. Z definicji granicy

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geq n_0 \quad 0 \leq a_n < \tilde{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \sqrt[m]{a_n} < \epsilon.$$

W przypadku $a = 0$ twierdzenie jest więc udowodnione. Rozpatrzmy teraz pozostały przypadek, czyli niech $a > 0$. Wykorzystamy następującą równość, dla $\alpha, \beta \geq 0$, $m \in \mathbf{N}$

$$(\alpha - \beta)\,(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2}\,\beta + \cdots + \alpha\,\beta^{m-2} + \beta^{m-1}) = \alpha^m - \beta^m.$$

Nierówność tą można udowodnić bezpośrednio (na przykład indukcyjnie), albo można ją wywnioskować ze wzoru na sumę postępu geometrycznego (4.5). Mamy więc

$$\begin{aligned} &|\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{a}| = \\ &\qquad = \frac{|a_n - a|}{\left((\sqrt[m]{a_n})^{m-1} + (\sqrt[m]{a_n})^{m-2}\sqrt[m]{a} + \cdots + (\sqrt[m]{a})^{m-1}\right)} \leq \frac{|a_n - a|}{\left(\sqrt[m]{a}\right)^{m-1}}. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz, podobnie jak w poprzednim przypadku wziąć $\tilde{\epsilon} = (\sqrt[m]{a})^{m-1}\epsilon$ i mamy

$$|a_n - a| < \tilde{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad |\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{a}| < \epsilon.$$

□

Zauważmy, że powyższe twierdzenie pozwala nam „wejść z granicą pod" dowolną potęgę wymierną, jeżeli tylko a_n i a są takie, że potęgę można zastosować

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{p}{q}} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\frac{p}{q}}, \quad p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{N}.$$

Przykład: Niech $a_1 = \sqrt{2}$ i niech $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ dla $n \geq 1$. Rozważaliśmy już ten przykład, i pokazaliśmy, że $\{a_n\}$ jest rosnący i ograniczony, czyli zbieżny. Wykorzystamy to teraz do znalezienia jego granicy

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2 + g}.$$

Widzimy więc, że granica g musi spełniać równanie kwadratowe $g^2 - g - 2 = 0$. Równanie to ma dwa pierwiastki $g = -1$ i $g = 2$. Granica nie może być liczbą ujemną, bo ciąg składa się z liczb dodatnich, więc pozostaje jedyna możliwość: $g = 2$.

Uwaga: Skorzystaliśmy z następującego faktu: jeżeli $a_n \to a$ oraz $a_n \geq 0$ to $a \geq 0$. Fakt ten można sformułować ogólniej: jeżeli $a_n \to a$ i $b_n \to b$ oraz $a_n \leq b_n$ (przynajmniej od pewnego miejsca), to $a \leq b$. Pozostawiamy to jako ćwiczenie.

Podciągi

Definicja 4.10. *Podciągiem ciągu $\{a_n\}$ nazywamy ciąg postaci $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, gdzie $\{n_k\}$ jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych.*

Uwaga: W definicji istotne jest to, żeby ciąg indeksów $\{n_k\}$ był *ściśle* rosnący. Innymi słowy, $a_1, a_5, a_6, a_{17}, \dots$ może być podciągiem ciągu $\{a_n\}$, natomiast $a_1, a_1, a_5, a_2, \dots$ nie jest podciągiem. Zauważmy też, że zgodnie z definicją sam ciąg $\{a_n\}$ jest swoim własnym podciągiem, wystarczy wziąć $n_k = k$. Definicja podciągu sprowadza się do wybrania z danego ciągu jedynie niektórych wyrazów, z zachowaniem ich kolejności.

Przykład: Ciąg $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$ jest podciągiem ciągu $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Tutaj $a_n = \frac{1}{n}$ oraz $n_k = k^2$, a więc $a_{n_k} = \frac{1}{k^2}$.

Twierdzenie 4.11. *Każdy podciąg ciągu zbieżnego też jest zbieżny, do tej samej granicy.*

Dowód. Niech będzie będzie dany ciąg $\{a_n\}$ zbieżny do g, oraz jego podciąg wyznaczony przez ciąg indeksów $\{n_k\}$. Niech $\epsilon > 0$, i niech $n_0 \in \mathbf{N}$ będzie takie, że dla $n \geq n_0$ zachodzi $|a_n - g| < \epsilon$. Niech

$$k_0 = \min\{k \in \mathbf{N} : \ n_k \geq n_0\}.$$

Zauważmy, że minimum (element najmniejszy) istnieje, gdyż $\{k \in \mathbf{N} : \ n_k \geq n_0\}$ jest niepustym podzbiorem liczb naturalnych. Wtedy, jeżeli $k \geq k_0$ to $n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$, i $|a_{n_k} - g| < \epsilon$. □

Przykład: Niech $m \in \mathbf{N}$ będzie ustalone, oraz

$$a_n = \left(1 + \frac{\frac{1}{m}}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{m \cdot n}\right)^n.$$

Niech $n_k = m \cdot k$. Jest to ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych, oraz

$$a_k = \left(1 + \frac{1}{m \cdot k}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{m \cdot k}\right)^{m \cdot k}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Jeśli więc $b_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ (ciąg zbieżny do e), to $a_k = \sqrt[m]{b_{n_k}}$. Wiemy, że $b_n \to e$, a więc

$$b_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} e \quad \Rightarrow \quad \sqrt[m]{b_{n_k}} \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt[m]{e},$$

czyli mamy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{m}}.$$

Uwaga: W ten sposób pokazaliśmy, że ciąg $(1 + \frac{x}{n})^n$ jest zbieżny do e^x dla liczb postaci $x = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbf{N}$. W przyszłości pokażemy, że jest to prawdą dla wszystkich liczb $x \in \mathbf{R}$.

Poniższe twierdzenie, które jest intuicyjnie zupełnie jasne, jest ważne i będziemy z niego w przyszłości wielokrotnie korzystać.

Twierdzenie 4.12 (Bolzano-Weierstrassa)**.** *Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny*

Dowód. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie ograniczony. Przypomnijmy konstrukcję z Twierdzenia 4.6, dotyczącego warunku Cauchy'ego.

$$\alpha_k = \inf\{a_n : \ n \geq k\}, \quad A = \sup\{\alpha_k : \ k \geq 1\} = \lim_{k\to\infty} \alpha_k.$$

Ciąg $\{a_n\}$ a w konsekwencji także ciąg $\{\alpha_n\}$ są ograniczone, więc kresy istnieją. Ciąg $\{\alpha_n\}$ jest rosnący, a więc zbieżny, a jego granicą jest jego kres górny. Pokażemy teraz, że istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ zbieżny do A. Pomysł na znalezienie tego podciągu jest następujący. Z definicji kresu wiemy, że w dowolnie małym otoczeniu każdego α_n istnieją wyrazy ciągu o indeksach $\geq n$. Będziemy rozpatrywali coraz mniejsze otoczenia kolejnych α_n, powiedzmy $[\alpha_n, \alpha_n + \epsilon_n)$ i z takich otoczeń będziemy wybierali kolejne elementy konstruowanego podciągu. Jeżeli nasze $\epsilon_n \to 0$, to można pokazać (na przykład z twierdzenia o 3 ciągach), że tak wybrany podciąg jest zbieżny do tej samej granicy co ciąg $\{\alpha_n\}$, czyli do A. Jest drobny szczegół techniczny, o który trzeba zadbać. Chodzi o to, że indeksy kolejnych wyrazów podciągu muszą ściśle rosnąć. To jest drobny szczegół techniczny, i poradzimy sobie z nim następująco. Definicja podciągu będzie indukcyjna. Niech a_{n_1} będzie elementem ciągu $\{a_n\}$ odległym od α_1 o mniej niż $\frac{1}{2}$. Wiemy, że taki element musi istnieć, gdyż α_1 jest kresem dolnym zbioru wyrazów ciągu. Mamy więc

$$\alpha_1 \leq a_{n_1} < \alpha_1 + \frac{1}{2}.$$

Zanim przejdziemy do ogólnego kroku indukcyjnego wybierzmy jeszcze drugi wyraz. Następnego elementu podciągu musimy szukać wśród a_n'ów o numerach większych niż n_1. Wiemy, że kresem dolnym zbioru tych a_n'ów jest

α_{n_1+1}. Niech więc a_{n_2} będzie elementem ciągu $\{a_n\}$, $n \geq n_1 + 1$, odległym od α_{n_1+1} o mniej niż $\frac{1}{4}$. Mamy więc $n_2 > n_1$ oraz

$$\alpha_{n_1+1} \leq a_{n_2} < \alpha_{n_1+1} + \frac{1}{2^2}.$$

Opiszemy teraz ogólny krok indukcyjnej definicji. Załóżmy, że skonstruowaliśmy początek podciągu $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_m}$ taki, że $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$, oraz

$$\alpha_{n_k+1} \leq a_{n_{k+1}} < \alpha_{n_k+1} + \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Kolejny wyraz podciągu, a_{m+1}, wybieramy spośród a_n'ów o indeksach $n \geq n_m + 1$, spełniających

$$\alpha_{n_m+1} \leq a_{n_{m+1}} < \alpha_{n_m+1} + \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Zauważmy, że taki wybór jest zawsze możliwy, gdyż α_{n_m+1} jest kresem dolnym interesującego nas zbioru a_n'ów, znajdziemy więc elementy dowolnie blisko. W ten sposób, indukcyjnie, znaleźliśmy podciąg $\{a_{n_k}\}$ spełniający:

$$\alpha_{n_k+1} \leq a_{n_{k+1}} < \alpha_{n_k+1} + \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Po skrajnych stronach nierówności mamy ciągi zbieżne do A ($\{\alpha_{n_{k-1}+1}\}$ jest podciągiem ciągu $\{\alpha_n\}$ a $\frac{1}{2^k} \to 0$), więc z twierdzenia o 3 ciągach otrzymujemy

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \alpha_k = A.$$

□

Uwagi: (i) Twierdzenie jest intuicyjnie jasne. Jeżeli ciąg jest ograniczony, to jego wyrazy (których jest nieskończenie wiele) muszą się gdzieś zagęszczać. Powyższy dowód stanowi sprecyzowanie tego stwierdzenia.
(ii) Podciąg, który skonstruowaliśmy jest zbieżny do stałej A. Podobnie moglibyśmy skonstruować podciąg zbieżny do stałej B, w tym celu zamiast rozważać ciąg infimów $\{\alpha_n\}$ rozważalibyśmy ciąg supremów $\{\beta_n\}$ (oznaczenia z dowodu Twierdzenia 4.6).
(iii) Przyglądając się dowodowi dokładnie można zauważyć, że na lewo od każdej liczby mniejszej od A mamy tylko skończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$. Podobnie na prawo od każdej liczby większej od B. Wynika z tego, że *żaden* podciąg ciągu $\{a_n\}$ nie może być zbieżny do granicy mniejszej niż A lub większej niż B. Powołamy się na ten fakt za moment.

Definicja 4.13. *Liczbę g nazywamy punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ jeżeli istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ zbieżny do g.*

Twierdzenie 4.12 możemy więc sformułować następująco: każdy ciąg ograniczony ma punkt skupienia. Uwagi zamieszczone powyżej możemy sformułować następująco: A i B są punktami skupienia ciągu $\{a_n\}$, przy czym A jest najmniejszym punktem skupienia, a B największym.

Twierdzenie 4.14. *g jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \forall\ n_0 \in \mathbf{N} \quad \exists\ n \geq n_0 \quad |a_n - g| < \epsilon. \tag{4.8}$$

Innymi słowy, każde otoczenie punktu g zawiera wyrazy ciągu $\{a_n\}$ o dowolnie dalekich indeksach (w szczególności każde otoczenie punktu g zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$).

Dowód. Jeżeli g jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$ to z definicji istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ zbieżny do α. Niech więc $\epsilon > 0$ będzie dane, a k_0 będzie takie, że dla $k \geq k_0$ mamy $|a_{n_k} - \alpha| < \epsilon$. Jeżeli dodatkowo dane jest $n_0 \in \mathbf{N}$, to niech $k \geq k_0$ spełnia dodatkowo $n_k \geq n_0$. Takie k musi istnieć, bo ciąg indeksów $\{n_k\}$ jest rozbieżny do $+\infty$. Indeks n_k jest wymaganym indeksem w (4.8). Z drugiej strony, niech będzie spełniony warunek (4.8). Indukcyjnie skonstruujemy podciąg $\{a_{n_k}\}$ zbieżny do g. Niech n_1 będzie numerem takiego elementu ciągu, który spełnia

$$|a_{n_1} - g| < \frac{1}{2}.$$

Istnienie takiego elementu wynika z (4.8). Dalej, załóżmy, że mamy już skonstruowany ciąg rosnący indeksów $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$ spełniający

$$|a_{n_k} - g| < \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Niech n_{m+1} będzie indeksem elementu ciągu $\{a_n\}$ który spełnia

$$|a_{n_{m+1}} - g| < \frac{1}{2^{m+1}},$$

oraz $n_{m+1} > n_k$. Istnienie takiego elementu wynika z (4.8). W ten sposób otrzymaliśmy podciąg $\{a_{n_k}\}$ spełniający

$$0 \leq |a_{n_k} - g| < \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Korzystając z twierdzenia o 3 ciągach widzimy, że podciąg $\{a_{n_k}\}$ jest zbieżny do g, czyli g istotnie jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$. □

Przypomnijmy, że ciąg ograniczony posiada punkty skupienia, wśród których jest największy oraz najmniejszy (komentarz po Definicji 4.13).

Definicja 4.15. *Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, to najmniejszy jego punkt skupienia nazywamy granicą dolną, a największy granicą górną. Oznaczam je odpowiednio:*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \quad \textit{granica dolna} \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n \quad \textit{granica górna.}$$

Uwagi: (i) Granica dolna jest mniejsza lub równa od granicy górnej.

(ii) Ciąg ograniczony jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy jego granice górna i dolna są równe. Innymi słowy, ciąg ograniczony jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie jeden punkt skupienia.

(iii) Stałe A i B które pojawiły się w (4.2) w dowodzie Twierdzenia 4.6 są odpowiednio granicami dolną i górną ciągu $\{a_n\}$.

(iv) Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ nie jest ograniczony od góry, to piszemy

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

a jeżeli nie jest ograniczony od dołu, to piszemy

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Przykład: Niech liczba $m \in \mathbf{N}$ będzie ustalona, i niech $a_n = (1 + \frac{m}{n})^n$. Pokażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n = e^m.$$

Najpierw ustalmy $0 \le x < 1$, i niech $b_n = (1 + \frac{1}{n+x})^n$. Zauważmy, że mamy następujące oszacowanie

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+x}\right)^n \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

Prawy skrajny ciąg dąży do e, lewy skrajny, jak łatwo się przekonać też:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} e \cdot 1 = e. \tag{4.9}$$

Korzystając z twierdzenia o 3 ciągach mamy więc, że $b_n \to e$, niezależnie od wyboru x. Ustalmy teraz $u = 0, \ldots, m-1$, i niech $n_k = mk + u$. Zauważmy, że odpowiadający tym indeksom podciąg ciągu $\{a_n\}$ zbiega do e^m:

$$\begin{aligned} a_{n_k} &= \left(1 + \frac{m}{mk+u}\right)^{mk+u} = \left(1 + \frac{1}{k + \frac{u}{m}}\right)^{mk+u} \\ &= \left(\left(1 + \frac{1}{k + \frac{u}{m}}\right)^{k}\right)^{m} \cdot \left(1 + \frac{1}{k + \frac{u}{m}}\right)^{u} \\ &= b_k \cdot \left(1 + \frac{1}{k + \frac{u}{m}}\right)^{u} \xrightarrow{k\to\infty} e^m, \end{aligned}$$

dla $x = \frac{u}{m}$. Wszystkie powyższe podciągi (dla $u = 0, \ldots, m-1$) mają więc tą samą granicę e^m. Każdy element ciągu $\{a_n\}$ należy do któregoś z tych podciągów, i jest ich skończenie wiele. Wynika z tego, że $\{a_n\}$ jest zbieżny, i jego granicą jest e^m. Przekonajmy się o tym. Niech $\{n_k^u\}$ będzie ciągiem $n_k^u = mk + u$ dla $u = 0, 1, \ldots, m-1$. Wiemy, że każdy podciąg $\{a_{n_k^u}\}_{k=1}^{\infty}$ zbiega do e^m, więc dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieją $k_0^u \in \mathbf{N}$ takie, że dla $k \geq k_0^u$ zachodzi

$$|a_{n_k^u} - e^m| < \epsilon.$$

Niech teraz $n_0 = \max\{mk_0^0, mk_0^1 + 1, \ldots, mk_0^{m-1} + (m-1)\}$. Jeżeli $n \geq n_0$, to n to po pierwsze musi należeć do któregoś z podciągów n_k^u i dodatkowo musi mieć w nim indeks $k \geq k_0^u$. a_n spełnia więc $|a_n - e^m| < \epsilon$. Pokazaliśmy więc, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n = e^m.$$

Jako prosty wniosek z powyższego znajdziemy jeszcze jedną granicę. Niech $m, k \in \mathbf{N}$.

$$\left(1 + \frac{\frac{m}{k}}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{m}{k \cdot n}\right)^{k \cdot n}\right)^{\frac{1}{k}} = (a_{kn})^{\frac{1}{k}} \xrightarrow{n\to\infty} (e^m)^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{m}{k}}.$$

Dla $x = \frac{m}{k}$, $m, k \in \mathbf{N}$ mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Powyższą równość można uogólnić, najpierw na dowolne $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$, a następnie na dowolne $x \in \mathbf{R}$. Zostawiamy to jako ćwiczenie

Rozdział 5

Szeregi

Szeregi to sumy nieskończone. Do ich ścisłej definicji potrzebne jest pojęcie zbieżności. Suma nieskończona $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ może istnieć lub nie, to zależy od konkretnego ciągu $\{a_n\}$. Poniżej podana jest ścisła definicja. Sumy nieskończone nie są niczym dziwnym, występują w praktyce, na przykład kiedy chcemy obliczyć pola figur. Niech będzie dany ciąg $\{a_n\}$, i utwórzmy ciąg kolejnych sum

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Ciąg $\{s_n\}$ nazywamy ciągiem sum częściowych ciągu $\{a_n\}$. Zauważmy, że jeżeli ciąg sum częściowych jest zbieżny, to jego granicę nawet *intuicyjnie* chcielibyśmy nazwać sumą nieskończoną $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$. Mamy więc następującą definicję:

Definicja 5.1. *Jeżeli ciąg $\{s_n\}$ ma granicę s to mówimy, że szereg (albo suma nieskończona) $a_1 + a_2 + a_2 + \dots$ jest zbieżny i że jego suma wynosi s. Piszemy*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Jeżeli ciąg sum częściowych $\{s_n\}$ nie jest zbieżny, to mówimy, że szereg jest rozbieżny. W takim przypadku wyrażenie $\sum a_n$ jest tylko symbolem i nie ma interpretacji liczbowej.

Przykłady: (a) Niech $a_n = (\frac{2}{3})^n$. Wtedy

$$s_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3}\,\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} = 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \xrightarrow{n\to\infty} 2.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$ jest więc zbieżny, i $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n = 2$ (jest to przykład tak zwanego szeregu geometrycznego). Skorzystaliśmy ze wzoru na sumę postępu geometrycznego (4.5)

(b) Niech $a_n = \frac{1}{n\,(n+1)}$. Zauważmy, że $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Mamy więc

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1. \end{aligned}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$ jest więc zbieżny, i jego suma wynosi 1.

(c) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ jest rozbieżny, bo $s_n = -1$ lub 0, w zależności od tego, czy n jest parzyste czy nieparzyste, a taki ciąg nie jest zbieżny. Suma nieskończona $-1+1-1+1-\dots$ nie istnieje, i nie ma żadnej interpretacji numerycznej.

Działania na szeregach

Twierdzenie działaniach na granicach przenosi się na szeregi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad c \text{ - dowolna stała,}$$

przy założeniu że szeregi po prawej stronie są zbieżne. Twierdzenie o granicy iloczynu czy ilorazu nie ma tu bezpośredniego zastosowania.

Twierdzenie 5.2. *Jeżeli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Dowód. Szereg jest zbieżny czyli jego ciąg sum częściowych $s_n = a_1 + \dots + a_n$ jest zbieżny. Dla $n \geq 2$ $a_n = s_n - s_{n-1}$, a więc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0.$$

□

Uwaga: Powyższe twierdzenie daje tak zwany warunek konieczny zbieżności szeregu. Nawet jeżeli $\lim a_n = 0$ to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie musi być zbieżny. Twierdzenie przydaje się więc, żeby pokazać rozbieżność.

Przykład: Niech $a_n = \frac{1}{n}$. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Jest to tak zwany szereg harmoniczny. Zauważmy, że wyrazy szeregu są dodatnie, a więc ciąg sum częściowych jest rosnący. Ciąg rosnący jest zbieżny dokładnie wtedy, kiedy jest ograniczony. Pokażemy więc, że ciąg sum częściowych tego szeregu nie jest ograniczony. Wystarczy wskazać podciąg ciągu $\{s_n\}$ który nie jest ograniczony.

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &\qquad \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

W każdym kolejnym nawiasie mamy $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$ składników, a każdy składnik jest $\geq \frac{1}{2^k}$. Suma każdego nawiasu jest więc większa od $2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} s_{2^n} &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n \text{ razy}} = 1 + n \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Mamy więc $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$, wskazaliśmy więc podciąg ciągu sum częściowych, który nie jest ograniczony (gdyby wszystkie s_{2^n} były wspólnie ograniczone, to z powyższego oszacowania wynikałoby, że wszystkie liczby naturalne tworzyłyby zbiór ograniczony).

Twierdzenie 5.3. *Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych $\{s_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego:*

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\ m, n \geq n_0 \quad |s_m - s_n| < \epsilon.$$

Warunek ten można przeformułować:

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\ m \geq n \geq n_0 \quad |a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| < \epsilon.$$

Dowód. Twierdzenie wynika natychmiast z Twierdzenia 4.6 dla ciągów. □

Kryteria zbieżności

Badanie zbieżności szeregów w większości przypadków można sprowadzić do zastosowania jednego z kilku następujących kryteriów.

Twierdzenie 5.4 (Kryterium porównawcze).

(i) Jeżeli $|a_n| \leq b_n$ *i szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *też jest zbieżny.*

(ii) Jeżeli $0 \leq a_n \leq b_n$ *i szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *też jest rozbieżny.*

Dowód. (i) Skoro $\sum b_n$ jest zbieżny, to ciąg jego sum częściowych spełnia warunek Cauchy'ego. Z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned} |a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| &\leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| \\ &\leq b_n + b_{n+1} + \cdots + b_{n+k} = |b_n + b_{n+1} + \cdots + b_{n+k}|. \end{aligned}$$

Ciąg sum częściowych szeregu $\sum a_n$ też spełnia więc warunek Cauchy'ego.

(ii) Szereg $\sum a_n$ ma wyrazy nieujemne, i jest rozbieżny, więc jego ciąg sum częściowych jest rosnący (może słabo), a skoro nie jest zbieżny, to nie jest ograniczony. Ciąg sum częściowych szeregu $\sum b_n$ ma wyrazy nie mniejsze, więc też nie jest ograniczony, a więc nie może być zbieżny. □

Uwaga: Wystarczy, że oszacowania są spełnione tylko od pewnego miejsca.

Przykłady: (a) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$ jest zbieżny, bo

$$\frac{1}{n^2 + 2n} \leq \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

(b) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ jest rozbieżny, bo

$$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n},$$

a szereg $\sum \frac{1}{2n}$ jest rozbieżny. Zauważmy, że w tym przykładzie oszacowanie $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ nic nie daje.

Twierdzenie 5.5 (Kryterium o zagęszczaniu)**.** *Niech ciąg* $\{a_n\}$ *będzie dodatni i malejący,* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$*. Wówczas szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *jest zbieżny.*

Powyższe kryterium nie rozstrzyga w sposób bezpośredni, czy dany szereg jest zbieżny, czy nie, ale pozwala sprowadzić badanie zbieżności jednego szeregu do badania zbieżności innego szeregu.

Dowód. Oznaczmy przez $\{s_n\}$ ciąg sum częściowych szeregu $\sum a_n$, a przez $\{s_n'\}$ ciąg sum częściowych szeregu $\sum 2^n a_{2^n}$. Ponieważ wyrazy obu szeregów są nieujemne, to oba ciągi sum częściowych są niemalejące. Pokażemy, używając odpowiednich szacowań, że ciągi te są równocześnie ograniczone lub nieograniczone. Mamy

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \\ s_n' &= 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + 8 \cdot a_8 + \ldots 2^n \cdot a_{2^n} \\ &= 2\,(a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \cdots + 2^{n-1} \cdot a_{2^n}). \end{aligned}$$

Zauważmy więc, że

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\, s_n' &= a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \cdots + 2^{n-1} \cdot a_{2^n} \\ &\leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^n-1} + a_{2^n} \\ &= s_{2^n} \end{aligned}$$

Do sumy po lewej stronie dodaliśmy $a_1 \geq 0$, a każdy składnik sumy $2^{k-1} \cdot a_{2^k}$ zastąpiliśmy nie mniejszym wyrażeniem $a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}$, $k = 1, \ldots, n$. Jeżeli ciąg $\{s_n\}$ jest ograniczony to ograniczony jest też ciąg $\{s_n'\}$.

Z drugiej strony zauważmy, że

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}-1} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^{n+1}-1} \\ &\leq a_1 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + \cdots + 2^n \cdot a_{2^n} \\ &= a_1 + s_n'. \end{aligned}$$

Nierówność uzyskaliśmy zastępując sumy $a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}$ (2^k składników sumy) przez nie mniejsze wyrażenie $2^k \cdot a_{2^k}$, $k = 1, \ldots, n$. Jeżeli ciąg $\{s_n'\}$ jest ograniczony, to z powyższej nierówności wynika, że podciąg $\{s_{2^{n+1}-1}\}$ ciągu $\{s_n\}$ też jest ograniczony. Ciąg $\{s_n\}$ jest niemalejący, i zawiera podciąg ograniczony, a więc cały musi być ograniczony. Uzasadnijmy tą obserwację: □

Przykład: Rozpatrzymy teraz szeregi postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Jeżeli $p \leq 0$ to ciąg $\{\frac{1}{n^p}$ nie jest zbieżny do 0, a więc szereg nie może być zbieżny. Jeżeli $p > 0$ to ciąg $\{\frac{1}{n^p}$ jest dodatni i malejący, a więc spełnia założenia kryterium o zagęszczaniu. Zamiast szeregu $\sum \frac{1}{n^p}$ rozważmy więc szereg o wyrazach

$$2^n \, \frac{1}{(2^n)^p} = 2^n \, \frac{1}{2^{n \cdot p}} = \frac{1}{2^{n \cdot (p-1)}} = \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^n.$$

Szereg $\sum (\frac{1}{2^{p-1}})^n$ jest szeregiem geometrycznym. Jeżeli $p-1>0$ to iloraz szeregu $\frac{1}{2^{p-1}}<1$ i szereg jest zbieżny, natomiast jeżeli $p-1\leq 1$, to iloraz $\frac{1}{2^{p-1}}\geq 1$, i szereg nie jest zbieżny. Mamy więc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \qquad \leftarrow \qquad \begin{cases} \text{zbieżny jeżeli } p>1, \\ \text{rozbieżny jeżeli } p\leq 1. \end{cases} \tag{5.1}$$

Zauważmy, że przypadek $p=1$ zrobiliśmy już wcześniej. Szeregi tej postaci są bardzo przydatne. Jeżeli wyrazy jakiegoś badanego szeregu można w jakikolwiek sposób oszacować przez funkcję potęgową n, to powstały szereg możemy porównać z szeregami (5.1), których zbieżność jest rozstrzygnięta w zależności od p.

Twierdzenie 5.6 (kryterium d'Alemberta). *Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem o wyrazach różnych od* 0. *Wtedy*

(i) jeżeli $\limsup_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|<1$ *to szereg* $\sum a_n$ *jest zbieżny,*

(ii) jeżeli $\liminf_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|>1$ *to szereg* $\sum a_n$ *jest rozbieżny (obejmuje to też przypadek granicy niewłaściwej* $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=+\infty$*).*

Dowód. (i) Zauważmy, że skoro granica górna ciągu $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ jest mniejsza od 1, to istnieją $0<c<1$ oraz $n_0\in\mathbf{N}$ takie, że dla $n\geq n_0$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leq c,$$

w szczególności dla $k\geq 0$

$$\begin{aligned} |a_{n_0+k}| &= \left|\frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}}\right|\cdot\left|\frac{a_{n_0+k-1}}{a_{n_0+k-2}}\right|\cdot\ldots\cdot\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right|\cdot|a_{n_0}| \\ &\leq |a_{n_0}|\cdot c^k=\frac{|a_{n_0}|}{c^{n_0}}\cdot c^{n_0+k}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Iloczyn pojawiający się w (5.2) nazywa się czasem *iloczynem teleskopowym*, gdyż wysuwamy bądź chowamy potrzebną ilość czynników. Ciąg $\{a_n\}$ spełnia więc (dla $n\geq n_0$) nierówność

$$|a_n|\leq\frac{|a_{n_0}|}{c^{n_0}}\cdot c^n,\quad 0<c<1,$$

czyli jest zbieżny z kryterium porównawczego.

(ii) Zauważmy, że skoro granica dolna ciągu $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ jest większa od 1 (a także jeżeli ciąg ten ma granicę niewłaściwą $+\infty$), to istnieją $c > 1$ i $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n \geq n_0$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq c.$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku, dla $k \geq 0$ mamy

$$|a_{n_0+k}| = \left|\frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n_0+k-1}}{a_{n_0+k-2}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \cdot |a_{n_0}| \geq |a_{n_0}| \cdot c^k \geq |a_{n_0}|,$$

czyli ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny do 0. Szereg $\sum a_n$ musi więc być rozbieżny. $\square$

Kryterium d'Alemberta pozostawia wiele przypadków nierozstrzygniętych. Na przykład dla szeregów postaci $\sum \frac{1}{n^p}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p} = \left(\lim_{nto\infty}\frac{n}{n+1}\right)^p = 1.$$

Ten rodzaj szeregów nie jest objęty ani przez (i) ani przez (ii) przypadek kryterium d'Alemberta. Istotnie, jak wiemy szeregi tego rodzaju mogą być zbieżne lub rozbieżne, w zależności od parametru p.

Twierdzenie 5.7 (kryterium Cauchy'ego). *Niech dany będzie ciąg $\{a_n\}$ i niech*

$$g = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad \textit{granica właściwa lub niewłaściwa.}$$

Wtedy

(i) jeżeli $g < 1$ to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny,

(ii) jeżeli $g > 1$ to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny (obejmuje to także przypadek granicy górnej niewłaściwej $g = +\infty$).

Dowód. (i) Podobnie jak w przypadku kryterium d'Alemberta, istnieją $0 < c < 1$ i $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq c \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leq c^n,$$

czyli z kryterium porównawczego szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

(ii) Jeżeli $g > 1$, to istieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ taki, że $|a_{n_k}| \geq 1$. Ciąg $\{a_n\}$ nie może więc być zbieżny do 0, a więc szereg $\sum a_n$ nie jest zbieżny, $\square$

Uwagi: (i) Podobnie jak w przypadku kryterium d'Alemberta kryterium Cauchy'ego pozostawia nierozstrzygnięty przypadek $g = 1$. W takim przypadku dla różnych szeregów może być różnie.

(ii) Oba kryteria mają zastosowanie dla szeregów o wyrazach zespolonych. Wartość bezwzględna jest wtedy modułem liczby zespolonej.

Przyklad: Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Mamy $a_n = \frac{1}{n!}$, a więc

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Korzystając z kryterium d'Alemberta otrzymujemy, że szereg $\sum \frac{1}{n!}$ jest zbieżny. Udowodnimy teraz, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e. \tag{5.3}$$

Przypomnijmy, że liczba e jest granicą

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Dowodząc istnienia tej granicy pokazaliśmy w (4.4), że

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n,$$

gdzie $\{s_n\}$ jest ciągiem sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Przechodząc do granicy po n po obu stronach nierówności otrzymujemy

$$e \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{5.4}$$

Z drugiej strony, ustalmy $k \in \mathbf{N}$ i niech $n \geq k$. Wtedy z rozwinięcia (4.3) (ucinając rozwinięcie po k-tym wyrazie) mamy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Przechodząc do granicy względem n po obu stronach nierówności (k pozostawiając ustalone) otrzymujemy

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} = s_k,$$

dla każdego $k \in \mathbf{N}$. Teraz przechodząc do granicy po k (lewa strona jest stała) otrzymujemy

$$e \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

co razem z (5.4) daje (5.3).

Szeregi zbieżne absolutnie

Definicja 5.8. *Jeżeli szereg $\sum |a_n|$ jest zbieżny, to mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny absolutnie. Jeżeli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, ale nie jest zbieżny absolutnie (to znaczy szereg $\sum |a_n|$ nie jest zbieżny), to mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny warunkowo.*

Uwagi: (i) Jeżeli szereg jest zbieżny absolutnie to jest też zbieżny w zwykłym sensie. Wynika to z warunku Cauchy'ego:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m|.$$

Jeżeli $\sum |a_n|$ jest zbieżny, to spełnia warunek Cauchy'ego, a więc $\sum a_n$ też spełnia warunek Cauchy'ego, czyli też jest zbieżny. Zbieżność absolutna jest to więc szczególny rodzaj zbieżności.

(ii) Jeżeli wyrazy szeregu $\sum a_n$ nie zmieniają znaku, to zbieżność absolutna wynika ze zbieżności zwykłej, i oba rodzaje zbieżności są równoważne. Zbieżność absolutna jest więc istotna dla szeregów których wyrazy zmieniają znak.

(iii) Zauważmy, że wszystkie kryteria zbieżności poznane omawiane dotychczas dotyczą zbieżności absolutnej. Żadne z tych kryteriów nie umożliwia stwierdzenia zbieżności warunkowej.

(iv) Zabieżność absolutna jest ważna – tylko dla szeregów zbieżnych absolutnie zbieżność i suma nie zależą od kolejności sumowania i rozstawienia nawiasów.

Szeregi naprzemienne

Mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest naprzemienny jeżeli jego wyrazy na przemian zmieniają znak, to znaczy $a_n = (-1)^n \cdot b_n$ i $b_n \geq 0$ lub $b_n \leq 0$ dla wszystkich n.

Twierdzenie 5.9 (kryterium Leibniza). *Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest malejący (słabo) i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg naprzemienny*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

jest zbieżny.

Dowód. Niech $s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + \pm a_n$ będzie ciągiem sum częściowych. Zauważmy, że podciąg o numerach parzystych s_{2n} jest rosnący:

$$s_{2(n+1)} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq s_{2n},$$

a podciąg o numerach nieparzystych s_{2n+1} malejący:

$$s_{2(n+1)+1} = s_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} = s_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \leq s_{2n+1}.$$

Zauważmy, że podciąg s_{2n} (który jest rosnący) jest ograniczony od góry:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-1} - a_{2n}) \leq a_1, \end{aligned}$$

a podciąg s_{2n+1} (który jest malejący) jest ograniczony od dołu

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2n} + a_{2n+1} \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + a_{2n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Oba podciągi są więc zbieżne. Niech $s = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = s + 0 = s.$$

Oba podciągi mają więc wspólną granicę. Ciąg $\{s_n\}$ rozkłada się więc na 2 podciągi, wyrazy o numerach parzystych i wyrazy o numerach nieparzystych. Każdy element ciągu $\{s_n\}$ należy do jednego z dwóch podciągów, i oba podciągi mają wspólną granicę s. Wynika z tego, że cały ciąg $\{s_n\}$ jest zbieżny do s. Zapiszmy to rozumowanie. Niech $\epsilon > 0$. Z tego, że $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$ wynika, że

$$\exists\, k_1 \in \mathbf{N} \quad \forall\, k \geq k_1 \quad |s_{2k} - s| < \epsilon,$$

a z tego, że $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s$ mamy

$$\exists\, k_2 \in \mathbf{N} \quad \forall\, k \geq k_2 \quad |s_{2k+1} - s| < \epsilon.$$

Niech $n_0 = \max\{2k_1, 2k_2 + 1\}$. Wtedy, jeżeli $n \geq n_0$ to $n = 2k$, $k \geq k_1$ lub $n = 2k + 1$, $k \geq k_2$, w zależności od parzystości n. W obu przypadkach

$$|s_n - s| < \epsilon.$$

□

Uwaga: Zauważmy, że z dowodu wynika też oszacowanie wartości sumy. Dla dowolnych $k, l \in \mathbf{N}$

$$s_{2l} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \leq s_{2k+1}.$$

Suma jest większa od każdej parzystej sumy częściowej, a mniejsza od każdej nieparzystej. Odnosi się to do szeregów naprzemiennych których wyrazy parzyste są ≤ 0 a nieparzyste ≥ 0.

Przykład: Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest zbieżny, ale nie absolutnie. W niedalekiej przyszłości przekonamy się, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2. \tag{5.5}$$

Szeregi potęgowe

Definicja 5.10. *Szeregiem potęgowym nazywamy szereg postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, gdzie ciąg współczynników $\{a_n\}$ oraz liczba x mogą być rzeczywiste lub zespolone.*

Uwagi: (i) Szereg potęgowy, dla ustalonego ciągu $\{a_n\}$ może być zbieżny lub nie, w zależności od liczby x. Zawsze jest zbieżny dla $x = 0$.

(ii) W tych punktach x, w których szereg potegowy jest zbieżny definiuje on funkcję:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, x^n.$$

Funkcje, będące sumami zbieżnych szeregów potęgowych są bardzo ważne. Zobaczymy, że praktycznie każda funkcja ma tą postać, w szczególności wszystkie funkcje elementarne można zapisać w ten sposób (mówi się czasem, że można je „rozwinąć w szereg potęgowy”).

(iii) Oczywiście, każdy szereg liczbowy można zapisać w postaci szeregu potęgowego, z odpowiednio dobranymi współczynnikami. Określenie „szereg potęgowy” odnosi się więc do sposobu zapisu szeregu liczbowego.

(iv) W dalszym ciągu skoncentrujemy się na szeregach o wyrazach rzeczywistych.

Twierdzenie 5.11. *Szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest albo zbieżny absolutnie dla każdego $x \in \mathbf{R}$, albo istnieje liczba $R \geq 0$ taka, że*

(i) dla $x \in (-R, R)$ szereg jest zbieżny absolutnie,

(ii) dla $x \notin [-R, R]$ szereg jest rozbieżny.

Zbiór tych x dla których szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny ma więc postać przedziału, zawierającego jeden lub oba końce albo bez końców (może to być cała prosta **R***). Zbiór ten nazywamy „przedziałem zbieżności szeregu". Liczbę R nazywamy „promieniem zbieżności" (w przypadku gdy przedziałem zbieżności jest $(-\infty, \infty)$, to mówimy, że promień zbieżności jest nieskończony).*

Uwaga: Na końcach przedziału zbieżności może być różnie. Na przykład, szereg $\sum x^n$ ma przedział zbieżności $(-1, 1)$, szereg $\sum \frac{1}{n} x^n$ ma przedział zbieżności $[-1, 1)$, natomiast szereg $\sum \frac{1}{n^2} x^n$ przedział zbieżności $[-1, 1]$.

Dowód twierdzenia. Jeżeli dla $x_0 \in \mathbf{R}$ szereg $\sum a_n x_0^n$ jest zbieżny, to ciąg $\{a_n x_0^n\}$ jest zbieżny do 0, a więc w szczególności jest ograniczony:

$$\exists\, M \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad |a_n x_0^n| \leq M.$$

Jeżeli $|x| < |x_0|$ to niech $q = \frac{|x|}{|x_0|} < 1$. Mamy wtedy

$$|a_n x^n| = \left| a_n\, x_0^n\, \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n\, x_0^n| \cdot \left(\frac{|x|}{|x_0|} \right)^n \leq M \cdot q^n.$$

Szereg geometryczny o wyrazach q^n jest zbieżny, gdyż $0 \leq q < 1$. Z kryterium porównawczego szereg $\sum a_n x^n$ jest więc zbieżny absolutnie. Niech

$$A = \left\{ |x| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \text{ jest zbieżny, } x \in \mathbf{R} \right\}.$$

Jeżeli A nie jest ograniczony, to szereg jest zbieżny absolutnie dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Dla każdego $x \in \mathbf{R}$ znajdziemy bowiem x_0 takie, że $|x_0| > |x|$ oraz szereg $\sum a_n x_0^n$ jest zbieżny. Jeżeli A jest ograniczony, to niech

$$R = \sup A.$$

Tak zdefiniowane R spełnia warunki twierdzenia. Jeżeli bowiem $|x| < R$, to znajdziemy x_0 takie, że $|x_0| > |x|$, i szereg $\sum a_n x_0^n$ jest zbieżny. W takim razie szereg $\sum a_n x^n$ jest zbieżny absolutnie. Z drugiej strony, jeżeli $|x| > R$ to szereg $\sum a_n x^n$ nie może być zbieżny: w przeciwnym przypadku mielibyśmy $|x| \in A$, czyli $|x| \leq R$. □

Przykłady: (a) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ma promień zbieżności $R = 1$, co można sprawdzić z kryterium d'Alemberta. W punkcie $x = 1$ jest rozbieżny (jest to wtedy szereg harmoniczny), a w punkcie $x = -1$ jest zbieżny, co wynika z kryterium Leibniza.

(b) Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ma promień zbieżności nieskończony, co można sprawdzić z kryterium d'Alemberta:

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = |x| \cdot \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

niezależnie od x.

(c) Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ ma promień zbieżności $R = 0$:

$$\left| \frac{(n+1)^{n+1}\, x^{n+1}}{n^n\, x^n} \right| = |x| \cdot (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty,$$

dla każdego $x \neq 0$.

Stosując znane kryteria zbieżności szeregów otrzymujemy różne wzory na promień zbieżności.

Twierdzenie 5.12. *Rozważmy szereg potęgowy $\sum a_n x^n$ i niech*

$$g = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Jeżeli $g = 0$ to promień zbieżności szeregu jest nieskończony, jeżeli $g = +\infty$ to $R = 0$, a jeżeli $0 < g < \infty$ to

$$R = \frac{1}{g}.$$

Dowód. Zastosujmy kryterium Cauchy'ego do szeregu $\sum a_n x^n$.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n\, x^n|} = \limsup_{n\to\infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot g.$$

Jeżeli $g = 0$ to szereg jest zbieżny (absolutnie) dla każdego $x \in \mathbf{R}$, czyli promień zbieżności jest nieskończony. Jeżeli $g = +\infty$ to szereg jest rozbieżny dla każdego $x \neq 0$, czyli $R = 0$. W końcu, jeżeli $0 < g < \infty$ to szereg jest zbieżny (absolutnie) dla $|x| < \frac{1}{g}$ i rozbieżny dla $|x| > \frac{1}{g}$, czyli $R = \frac{1}{g}$. □

Uwaga: Stosując kryterium d'Alemberta w podobny sposób otrzymalibyśmy następujące twierdzenie: jeżeli

$$g = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

istnieje (właściwa lub niewłaściwa), to $R = \frac{1}{g}$ (przy czym rozumiemy, że $R = 0$ dla $g = +\infty$ i R nieskończony dla $g = 0$).

Przykład: Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$. Stosując powyższą uwagę liczymy:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e.$$

A więc $R = \frac{1}{e}$. Przy okazji, porównując to z Twierdzeniem 5.12 możemy wywnioskować, że

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Pokażemy teraz, że ciąg $\{\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}\}$ jest rosnący, a skoro tak, to jego granica górna jest też granicą (ćwiczenie), i mamy następujący wniosek, który warto zapamiętać

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Sprawdźmy, że ciąg ten istotnie jest rosnący. Wprowadźmy oznaczenie $c_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Wiemy, że $2 = c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < e$, a więc

$$\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = c_n^n > c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_{n-1} = \frac{n^n}{n!}. \quad (5.6)$$

Ostatnią równość możemy udowodnić indukcyjnie: dla $n = 2$ mamy $c_1 = \frac{2^2}{2} = 2$, czyli równość jest prawdziwa. Następnie wykonajmy krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \cdots \cdot c_{n-1} \cdot c_n &= \frac{n^n}{n!} \cdot c_n = \frac{n^n}{n!}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \frac{n^n}{n!}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Mamy więc udowodnioną nierówność (5.6). Wynika z niej natychmiast następujące nierówności:

$$\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n(n+1)}} > \frac{1}{n!} \quad \Rightarrow \quad \frac{(n+1)^{n^2}}{(n!)^n} > \frac{n^{n(n+1)}}{(n!)^{n+1}}.$$

Teraz wystarczy wyciągnąć stronami pierwiastki stopnia $n(n+1)$, i otrzymujemy

$$\sqrt[n+1]{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}} > \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}},$$

czyli to, co chcieliśmy.

Rozdział 6

Granica funkcji

Niech f będzie funkcją zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych, to znaczy $f : D_f \to \mathbf{R}$, $D_f \subset \mathbf{R}$, dziedzina f. Niech $\overline{D_f}$ będzie „uzupełnieniem" D_f, czyli zbiorem tych wszystkich punktów x, dla których istnieje ciąg $\{x_n\} \subset D_f$, $x_n \neq x$, zbieżny do x. Na przykład, dziedziną naturalną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ jest zbiór $D_f = \{x : x \neq 0\}$. Wtedy $\overline{D_f} = \mathbf{R}$. Pojęcie granicy funkcji w punkcie będziemy chcieli wprowadzić dla punktów z $\overline{D_f}$, czyli takich, które należą do dziedziny f (ale nie są izolowane), albo nie należą, ale są na „samym brzegu" dziedziny.

Definicja 6.1. *Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \overline{D_f}$ granicę g, jeżeli*

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D_f \qquad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon.$$

W takiej sytuacji piszemy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g.$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \overline{D_f}$ granicę niewłaściwą ∞ $(-\infty)$ jeżeli

$$\forall\, M \in \mathbf{R} \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D_f \qquad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M \quad (f(x) < M).$$

Piszemy wtedy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty.$$

Definicję granicy funkcji w punkcie można natychmiast przetłumaczyć na język zbieżności ciągów liczbowych:

Twierdzenie 6.2. *Niech $x_0 \in \overline{D_f}$. Wtedy $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\} \subset D_f$, $x_n \neq x_0$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ zachodzi*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g.$$

Podobnie, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu* $\{x_n\} \subset D_f$*,* $x_n \neq x_0$*,* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *zachodzi*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pm\infty.$$

Dowód. Niech f ma w punkcie x_0 granicę g

$$g = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem z D_f, zbieżnym do x_0, $x_n \neq x_0$. Pokażemy, że ciąg $\{f(x_n)\}$ zbiega do g. Niech $\epsilon > 0$. Z definicji granicy wynika, że istnieje $\delta > 0$ takie, że jeżeli $x \in D_f$, $x \neq x_0$ to

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon. \tag{6.1}$$

Skoro $x_n \to x_0$ to (δ pełni rolę ϵ z definicji granicy ciągu) istnieje $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że $\forall\ n \geq n_0$ mamy $|x_n - x_0| < \delta$, czyli, korzystając z (6.1)

$$|f(x_n) - g| < \epsilon.$$

W ten sposób pokazaliśmy, że $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Teraz dowód w drugą stronę. Niech $f(x_n) \to g$ dla każdego ciągu $x_n \to x_0$, spełniającego $x_n \neq x_0$ i $\{x_n\} \subset D_f$. Pokażemy, że f ma w x_0 granicę g. Dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że f nie ma granicy g w x_0, czyli że nie zachodzi warunek z definicji granicy funkcji w punkcie, czyli, innymi słowy załóżmy, że

$$\exists\ \epsilon_0 > 0 \quad \forall\ \delta > 0 \quad \exists\ x \in D_f \qquad 0 < |x - x_0| < \delta\ \wedge\ |f(x) - g| \geq \epsilon_0.$$

Korzystając z powyższego zdefiniujemy ciąg $\{x_n\}$ który da nam sprzeczność. Ciąg $\{x_n\}$ definiujemy następująco. Dla $n \in \mathbf{N}$ niech $\delta = \frac{1}{n}$, a x_n niech będzie tym elementem D_f, który spełnia $0 < |x - x_0| < \frac{1}{n}\ \wedge\ |f(x) - g| \geq \epsilon_0$. Zauważmy, że tak powstały ciąg $\{x_n\}$ spełnia $\{x_n\} \subset D_f$, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$, ale $f(x_n) \not\to g$. Otrzymaliśmy więc sprzeczność.

Przypadek granic niewłaściwych pozostawiamy jako ćwiczenie dla czytelnika. □

Korzystając z powyższego twierdzenia, i twierdzeń o zbieżności i granicach ciągów mamy następujący wniosek.

Wniosek 6.3. *(i) Jeżeli* $a = \lim_{x\to x_0} f(x)$ *i* $b = \lim_{x\to x_0} g(x)$ *to*

$$\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = a \pm b, \qquad \lim_{x\to x_0} (f\ \cdot\ g)(x) = a\ \cdot\ b,$$

a jeżeli dodatkowo $b \neq 0$ to

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{a}{b}.$$

(ii) Jeżeli w pewnym otoczeniu x_0 mamy

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

oraz

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = a,$$

to także

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

(iii) Z granicą funkcji w punkcie możemy „wchodzić pod pierwiastki", czyli

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \to x_0} f(x)},$$

o ile odpowiednie pierwiastki są określone ($f \geq 0$ dla k parzystego).

Przykłady: (a) Obliczymy granicę

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x - 5}{x^3 - 1}.$$

Skorzystamy z Twierdzenia 6.2, czyli ciągowej charakteryzacji granic. Weźmy dowolny ciąg $x_n \to 2$, $x_n \neq 2$ oraz $x_n \neq 1$. Wstawmy wyrazy ciągu do funkcji i rozważmy powstały ciąg

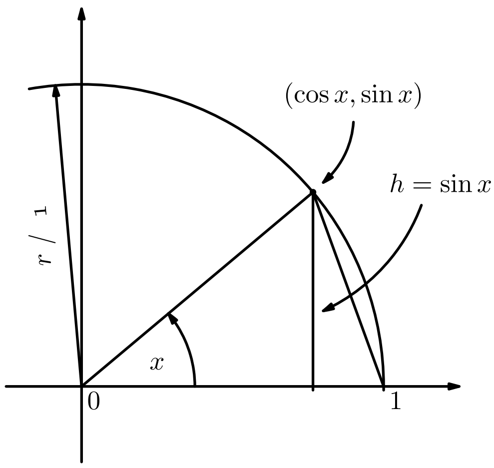
$$\frac{3x_n - 5}{x_n^3 - 1}.$$

Licznik dąży do $3 \cdot 2 - 5 = 1$ a mianownik do $2^3 - 1 = 7$. Cały ciąg dąży więc do $\frac{1}{7}$. Pokazaliśmy więc, że

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x - 5}{x^3 - 1} = \frac{1}{7}.$$

(b) Obliczymy $\lim_{x \to 0} \sin x$. Skorzystamy z następującego oszacowania:

$$0 \leq \sin x \leq x \qquad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \tag{6.2}$$



Rysunek 6.1: Oszacowanie $\sin x$.

Wynika to z Rysunku 6.1. Na rysunku zaznaczone sa dwie figury: sektor koła, wycięty kątem o mierze łukowej (w radianach) x, oraz trójkąt zawarty w tym sektorze, o wysokości $h = \sin x$ oraz podstawie 1. Ponieważ koło ma promień 1, więc pole sektora wyciętego z tego koła kątem centralnym x wynosi $\frac{x}{2}$. Pole trójkąta wynosi oczywiście $\frac{\sin x}{2}$, a skoro trójkąt jest w całości zawarty wewnątrz sektora, to jego pole musi być mniejsze. To jest dokładnie nierówność (6.2). Rozważmy teraz $x \le 0$. Dla $-\frac{\pi}{2} \le x \le 0$, wstawiając do (6.1) $-x$ w miejsce x, i mnożąc stronami przez -1 otrzymujemy:

$$x \le \sin x \le 0.$$

(Pamiętamy, że $\sin(-x) = -\sin(x)$.) Nierówność (6.2) możemy połączyć z powyższą w jedną:

$$0 \le |\sin x| \le |x|, \qquad \text{dla} \quad |x| \le \frac{\pi}{2}.$$

Korzystając z 3 funkcji otrzymujemy

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0.$$

(c) W przypadku $\cos x$ możemy skorzystać z tego, co pokazaliśmy dla $\sin x$. W otoczeniu zera $\cos x$ jest dodatni, a więc

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\lim_{x \to 0} \sin x\right)^2} = 1.$$

(d) Korzystając z tożsamości trygonometrycznych możemy znaleźć granice w innych punktach

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \sin x &= \lim_{x\to 0} \sin(x + x_0)\\ &= \lim_{x\to 0}(\sin x \cos x_0 + \cos x \sin x_0)\\ &= \cos x_0 \cdot \lim_{x\to 0} \sin x + \sin x_0 \cdot \lim_{x\to 0} \cos x\\ &= \sin x_0,\end{aligned}$$

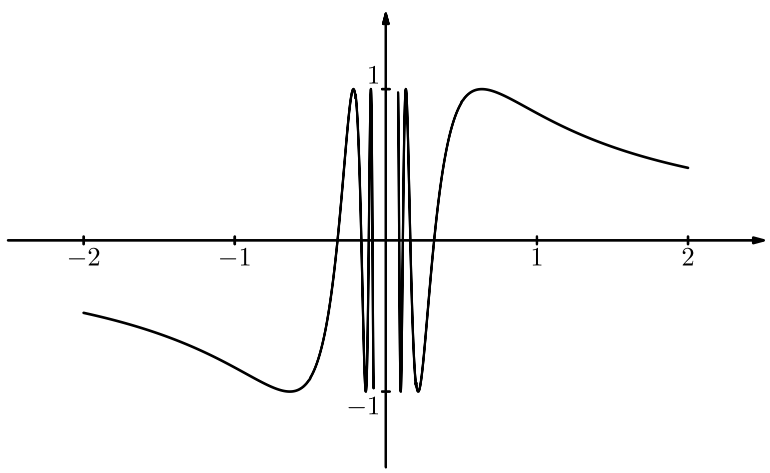
oraz

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \cos x &= \lim_{x\to 0} \cos(x + x_0)\\ &= \lim_{x\to 0}(\cos x \cos x_0 - \sin x \sin x_0)\\ &= \cos x_0 \cdot \lim_{x\to 0} \cos x - \sin x_0 \cdot \lim_{x\to 0} \sin x\\ &= \cos x_0.\end{aligned}$$

W rachunkach wykorzystaliśmy następujący fakt:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x + x_0).$$

Ta równość jest oczywista, i wynika natychmiast z definicji granicy. Punkt x_0 dla funkcji f jest tym samym, czym punkt 0 dla funkcji f przesuniętej „w lewo” o x_0.



Rysunek 6.2: Funkcja $\sin \frac{1}{x}$ w otoczeniu 0.

(e) Zauważmy, że granica

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

nie istnieje. Weźmy dwa ciągi,

$$x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \qquad \text{oraz} \qquad y_n = \frac{1}{3\pi/2 + 2n\pi}.$$

Oba ciągi są zbieżne do 0. Gdyby granica funkcji istniała, to po nałożeniu tej funkcji na każdy z ciągów oba zbiegałyby do tej granicy. Zauważmy jednak, że

$$\sin\frac{1}{x_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$
$$\sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(\frac{3\,\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) = -1,$$

a więc

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1.$$

Po nałożeniu funkcji oba ciągi zbiegają do różnych granic. Sytuację wyjaśnia Rysunek 6.2.

(f) Niech $a > 1$. Pokażemy, że

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1.$$

Niech $\epsilon > 0$ i $x > 0$. Mamy więc $a^x > 1$. Niech $n_0 \in \mathbf{N}$ będzie takie, że $\sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon$ dla $n \geq n_0$. Korzystamy z tego, że wiemy, że $\sqrt[n]{a} \to 1$. Niech $\delta_0 = \frac{1}{n_0}$. Wtedy, jeżeli

$$0 < x < \delta_0 \;\Rightarrow\; 1 < a^x < a^{\frac{1}{n_0}} \;\Rightarrow\; 0 < a^x - 1 < \sqrt[n_0]{a} - 1 < \epsilon.$$

Niech teraz $x < 0$. Wiemy, że

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1,$$

i niech $n_1 \in \mathbf{N}$ będzie takie, że dla $n \geq n_1$ zachodzi $0 < 1 - \sqrt[n]{1/a} < \epsilon$. Niech $\delta_1 = \frac{1}{n_1}$, wtedy jeżeli $-\delta_1 < x < 0$ to

$$a^{-\frac{1}{n_1}} < a^x < 1 \;\Rightarrow\; \sqrt[n_1]{\frac{1}{a}} < a^x < 1 \;\Rightarrow\; 0 < 1 - a^x < 1 - \sqrt[n_1]{\frac{1}{a}} < \epsilon.$$

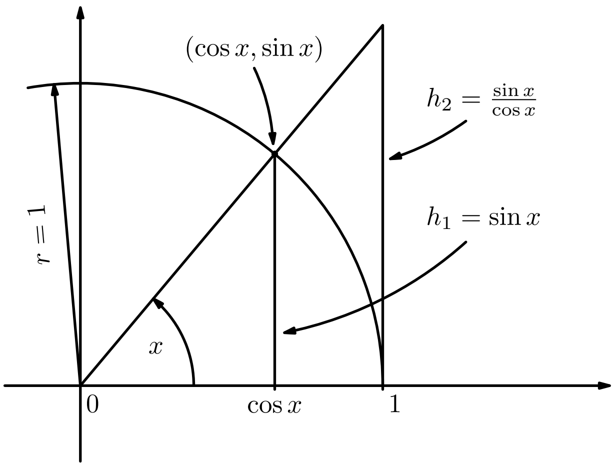
Ostatecznie niech $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, wtedy $0 < |x| < \delta$ pociąga $|1 - a^x| < \epsilon$.

(g) Niech $a > 1$, wtedy

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Mamy

$$\lim_{x \to x_0} a^x = \lim_{x \to 0} a^{x+x_0} = \lim_{x \to 0} a^x \cdot a^{x_0} = a^{x_0} \cdot \lim_{x \to 0} a^x = a^{x_0}.$$



Rysunek 6.3: Dalsze oszacowanie funkcji $\sin(x)$.

(h) Ponownie odwołajmy się do definicji funkcji $\sin(x)$, i porównajmy pole sektora koła jednostkowego, wyciętego kątem środkowym x, oraz pole dużego trójkąta (Rysunek 6.3). Pole sektora to $\frac{x}{2}$, natomiast duży trójkąt ma wysokość $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ i podstawę 1, czyli pole równe $\frac{\tan(x)}{2}$. Dla $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ mamy więc

$$\frac{x}{2} \leq \frac{\sin(x)}{2\cos(x)},$$

a więc, łącząc to z (6.2) otrzymujemy podwójne oszacowanie

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1. \tag{6.3}$$

Rozważając parzystość funkcji, otrzymujemy (6.3) także dla $|x| \leq \frac{\pi}{2}$. Skrajne funkcje mają granicę 1 w zerze, więc także

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \tag{6.4}$$

Jest to jedna z ważnych granic, która będzie się jeszcze pojawiać na tym wykładzie.

Granice jednostronne

Jeżeli w definicji granicy ograniczymy się tylko do $x > x_0$ (lub $x < x_0$)i warunek jest spełniony, to mówimy, że funkcja ma w punkcie x_0 granicę prawostronną (lewostronną). Na przykład dla granic właściwych (skończonych) warunek na istnienie granicy prawostronnej jest następujący

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D_f \qquad 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon.$$

Dla granicy lewostronnej warunek wygląda następująco

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D_f \qquad 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon.$$

Granice prawostronną i lewostronną oznaczamy odpowiednio

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x), \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Dla granic niewłaściwych warunki te trzeba zmodyfikować w zwykły sposób.

Wniosek 6.4. *(i)* $g = \lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$ *jeżeli dla dowolnego ciągu* $\{x_n\} \subset D_f$, $x_n > x_0$ *(lub* $x_n < x_0$*) i* $x_n \to x_0$ *mamy* $f(x_n) \to g$. *Sytuacja jest całkowicie analogiczna do Twierdzenia 6.2.*

(ii) Funkcja f *ma w punkcie* x_0 *granicę* g *(właściwą lub niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy ma w* x_0 *obie granice jednostronne, i są sobie równe. Wynika to wprost z definicji.*

(iii) Twierdzenia dotyczące działań na granicachodnoszą się także do granic jednostronnych, na przykład

$$\lim_{x \to x_0^+} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) + \lim_{x \to x_0^+} g(x).$$

Przykłady: (a) $f(x) = [x]$. Jeżeli $x_0 \in \mathbf{Z}$ to, jak łatwo sprawdzić

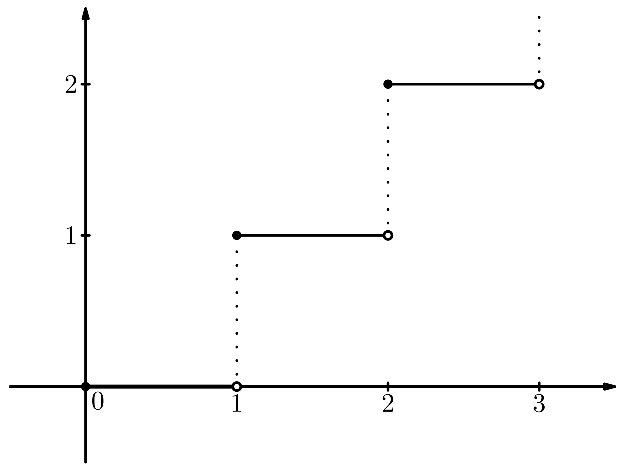
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = x_0, \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = x_0 - 1.$$

W punktach $x_0 \in \mathbf{Z}$ f ma więc różne granice jednostronne, czyli zwykłej (obustronnej) granicy nie ma. W pozostałych punktach f ma granicę obustronną.

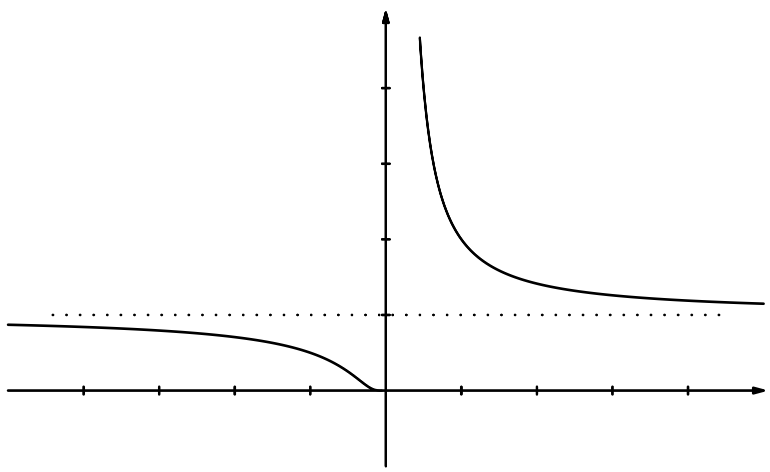
(b) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$. Dziedzina $D_f = \{x : x \neq 0\}$, a więc $0 \in \overline{D_f}$. Mamy

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0.$$

Pierwsza granica wynika stąd, że funkcja 2^y jest rosnąca i nieograniczona.



Rysunek 6.4: Granice jednostronne funkcji $[x]$.



Rysunek 6.5: Granice w zerze funkcji $2^{\frac{1}{x}}$.

Granice w nieskończoności

Jeżeli dziedzina funkcji to umożliwia, to możemy rozważać granice funkcji w $+\infty$ i $-\infty$. Granice te mogą być właściwe (skończone), lub niewłaściwe (nieskończone).

Definicja 6.5. *Mówimy, że funkcja f ma w $+\infty$ $(-\infty)$ granicę g, jeżeli*

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, M\ \forall\, x \in D_f \quad x > M \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon \quad (x < M \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon).$$

Piszemy wtedy

$$g = \lim_{x \to \pm\infty} f(x).$$

Podobnie definiujemy granice niewłaściwe. Na przykład, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *jeżeli*

$$\forall\ M \quad \exists\ K \quad \forall\ x \in D_f \qquad x > K \Rightarrow f(x) > M.$$

Wniosek 6.6. *Powyższą definicję również można wyrazić przy pomocy ciągów. Na przykład,* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego ciągu* $\{x_n\}$ *z dziedziny funkcji* f*, rozbieżnego do* $+\infty$ *ciąg* $\{f(x_n)\}$ *też jest rozbieżny do* $+\infty$*.*

Przykłady: (a) Znajdziemy granicę w $+\infty$ funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Oczywiście funkcja ta ma granicę 0 w $-\infty$. Natomiast gdy $x \to +\infty$ zarówno licznik jak i mianownik dążą do $+\infty$. Najpierw rozważmy ciąg

$$\frac{e^n}{n} = \left(\frac{e}{\sqrt[n]{n}}\right)^n.$$

Ponieważ $\sqrt[n]{n} \to 1$, więc

$$\frac{e}{\sqrt[n]{n}} \to e.$$

W takim razie

$$\exists\ n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\ n \geq n_0 \qquad \frac{e}{\sqrt[n]{n}} > 2 \ \Rightarrow\ \frac{e^n}{n} > 2^n.$$

Ciąg 2^n jest rozbieżny do $+\infty$, mamy więc granicę niewłaściwą

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty.$$

Mamy też następujące oszacowania. Oznaczmy na chwilę $\epsilon = x - [x]$, więc $0 \leq \epsilon < 1$, więc

$$\frac{e^x}{x} = \frac{e^{[x]+\epsilon}}{[x]+\epsilon} \geq \frac{e^{[x]}}{[x]+1} = \frac{1}{e}\,\frac{e^{[x]+1}}{[x]+1}.$$

Niech $x_n \to +\infty$ i niech $M > 0$. Wtedy

$$\exists\ n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\ n \geq n_0 \qquad \frac{e^n}{n} \geq e \cdot M,$$

oraz

$$\exists\ n_1 \in \mathbf{N} \quad \forall\ n \geq n_1 \qquad x_n \geq n_0 \ \Rightarrow\ [x_n] \geq n_0.$$

Czyli dla $n \geq n_1$ mamy

$$\frac{e^{x_n}}{x_n} \geq \frac{1}{e}\,\frac{e^{[x_n]+1}}{[x_n]+1} \geq \frac{1}{e} \cdot e \cdot M = M.$$

Udowodniliśmy więc, że
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty. \tag{6.5}$$
Można to rozumieć następująco. Gdy x rośnie do ∞ to funkcja wykładnicza e^x rośnie szybciej niż x. Zauważmy, że powyższe rozumowanie można łatwo zmodyfikować, i pokazać, że funkcja wykładnicza rośnie szybciej niż dowolny wielomian.

(b) Rozważmy granicę
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x. \tag{6.6}$$
Granicę odpowiedniego ciągu (gdy $x=n$) znamy, to jest z definicji liczba e. Teraz w chcielibyśmy zaadaptować rozumowanie z przykładu (a), i oszacować wartości funkcji w punktach x przez wartości w pewnych punktach naturalnych n. Potrzebne nam będą różne oszacowania, ale rozumowanie jest proste. Niech $\epsilon>0$, ciąg $x_n\to\infty$, i oznaczmy $k_n=[x_n]$. Zauważmy, że $k_n\to\infty$ i spełniają one
$$k_n\le x_n<k_n+1$$
$$\frac{1}{k_n+1}<\frac{1}{x_n}\le\frac{1}{k_n},$$
(wystarczy, że $x_n\ge 1$), więc dalej
$$1+\frac{1}{k_n+1}<1+\frac{1}{x_n}\le 1+\frac{1}{k_n}$$
$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}<\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}<\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}$$
$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\frac{1}{1+\frac{1}{k_n+1}}<\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}<\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)$$
Wiemy, że ciągi
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\qquad\text{oraz}\qquad\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}$$
są zbieżne do e, a więc istnieje $_1\in\mathbf{N}$ takie, że dla $n\ge n_1$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)<e+\epsilon\qquad\text{oraz}\qquad\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}>e-\epsilon.$$
Niech $n_0\in\mathbf{N}$ będzie takie, że dla $n\ge n_0$ mamy $x_n\ge n_1$ czyli $k_n=[x_n]\ge n_1$. Wtedy

$$e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n+1} \frac{1}{1 + \frac{1}{k_n+1}} <$$
$$< \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right) < e + \epsilon,$$

czyli

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} - e \right| < \epsilon.$$

Podobnie możemy udowodnić, że granica tej funkcji w $-\infty$ też wynosi e. Dowód będzie podobny, z wykorzystaniem znanej nam granicy ciągu

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \ .$$

Rozdział 7

Funkcje ciągłe

Definicja 7.1. *Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x swojej dziedziny, jeżeli*

$$f(x) = \lim_{y \to x} f(y).$$

Mówimy, że funkcja jest ciągła na zbiorze $A \subset D_f$ jeżeli jest ciągła w każdym punkcie $x \in A$. Jeżeli funkcja jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, to mówimy po prostu, że jest ciągła.

Mówiąc kolokwialnie funkcja ciągła to taka, „pod którą można wejść" z granicą. Intuicyjne znaczenie jest takie, że wykres f jest linią ciągłą.

Uwaga: Przypominając definicję granicy funkcji w punkcie otrzymujemy następujący warunek na ciągłość funkcji w punkcie x

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, y \in D_f \qquad |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Stosując język ciągów, czyli Twierdzenie 6.2 otrzymujemy następujące sformułowanie ciągłości funkcji w punkcie x

$$\forall\, \{x_n\} \subset D_f \quad x_n \to x \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(x).$$

Podobnie jak w przypadku granicy funkcji w punkcie mamy więc dwa powyższe równoważne sformułowania ciągłości funkcji w punkcie. Pierwsze sformułowanie tradycyjnie nazywa się „definicją Cauchy'ego", a drugie sformułowanie „definicją Heinegoćiągłości.

Wniosek 7.2. *Wszystkie funkcje elementarne, czyli wielomiany, funkcje wymierne, trygonometryczne, funkcje potęgowa i wykładnicza są ciągłe.*

Twierdzenie 7.3. *Suma, różnica, iloczyn, iloraz oraz złożenie funkcji ciągłych są ciągłe w każdym punkcie, w którym operacja jest wykonalna.*

Dowód. Pokażemy tylko przypadek złożenia. Pozostałe działania na funkcjach ciągłych są natychmiastową konsekwencją twierdzenia o działaniach na granicach funkcji. Niech złożenie $g \circ f$ będzie wykonalne, czyli niech wartości funkcji f wpadają do dziedziny funkcji g, oraz niech f i g będą ciągłe. Niech $x_n \to x$, $x_n, x \in D_f$. Wtedy $f(x_n) \to f(x)$ (ciągłość f w x) oraz $g(f(x_n)) \to g(f(x))$ (ciągłość g w $f(x)$). Mamy więc $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x)$, czyli złożenie jest ciągłe. □

Przykład: Rozważmy funkcję $f(x) = x^x$ dla $x > 0$ oraz $f(0) = 1$. Pokażemy, że f jest ciągła w 0, czyli

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1.$$

Oznacza to, że f w 0 zachowuje się jak funkcja wykładnicza. Wykorzystamy następującą znaną nam granicę (6.5)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

Jak łatwo zauważyć, stosując zamianę zmiennych $y = e^x$ otrzymujemy z powyższego następującą granicę

$$\lim_{y \to \infty} \frac{y}{\log(y)} = \infty.$$

Z powyższej granicy, przechodząc do odwrotności, otrzymujemy następującą

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\log(y)}{y} = 0.$$

W końcu ponownie zamieniając zmienne $x = \frac{1}{y}$, i zauważając, że wtedy $y \to +\infty \Leftrightarrow x \to 0^+$ otrzymujemy granicę

$$\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0.$$

Ostatnia granica wynika z poprzedniej, gdyż $x_n \to \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x} \to 0^+$. Wróćmy do funkcji f, i zastosujmy często stosowany „chłyt":

$$f(x) = x^x = e^{\log(x^x)} = e^{x \log(x)}.$$

Wykorzystując ciągłość funkcji wykładniczej otrzymujemy

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \log x} = e^{\lim_{x \to 0^+} x \log x} = e^0 = 1.$$

W podobny sposób będziemy mogli pokazać ciągłość funkcji f w pozostałych punktach dziedziny, kiedy udowodnimy ciągłość funkcji $\log(x)$. To z kolei będzie konsekwencją twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej, które udowodnimy wkrótce.

Uwaga: Funkcja może być nieciągła z różnych powodów. Na przykład, może istnieć granica funkcji w punkcie

$$g = \lim_{y \to x} f(y),$$

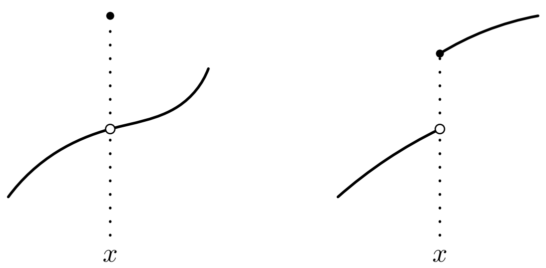
ale $g \neq f(x)$. Z taką sytuacją mamy na przykład do czynienia w przypadku $f(x) = [-|x|]$. Jeżeli $0 < |x| < 1$ to $-1 < -|x| < 0$ a więc $f(x) = -1$, czyli

$$\lim_{y \to 0} f(y) = -1.$$

Z drugiej strony $f(0) = 0$. Tego typu nieciągłość nazywamy nieciągłością usuwalną. Wystarczy zmienić wartość funkcji w punkcie x na wartość granicy w tym punkcie, i tak zmieniona w jednym punkcie funkcja jest już w tym punkcie ciągła.

Inny rodzaj nieciągłości to tak zwana nieciągłość skokowa. Jeżeli istnieją granice jednostronne funkcji w punkcie, ale są różne, to mówimy, że funkcja ma nieciągłość skokową. Przykładem może być funkcja $f(x) = [x]$, która ma nieciągłości skokowe w punktach będących liczbami całkowitymi.

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = k - 1, \qquad \lim_{x \to k^+} f(x) = k, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$



Rysunek 7.1: Nieciągłość usuwalna i nieciągłość skokowa.

Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0, \end{cases}$$

ma nieciągłość jeszcze innego rodzaju. Nie istnieją nawet granice jednostronne funkcji f w zerze.

Własności funkcji ciągłych

Funkcje ciągłe mają wiele ważnych własności, z których najważniejsze teraz udowodnimy. Funkcja ciągła na odcinku skończonym $[a, b]$ jest ograniczona i osiąga swoje wartości największą i najmniejszą, oraz przyjmuje wszystkie wartości pośrednie pomiędzy najmniejszą i największą.

Twierdzenie 7.4. *Funkcja f ciągła na przedziale $[a, b]$ (skończonym i zawierającym końce) jest ograniczona.*

Dowód. Udowodnimy, że f jest ograniczona od góry. Dowód tego, że jest też ograniczona od dołu pozostawiamy czytelnikowi. Można przerobić dowód ograniczoności od góry, albo zauważyć, że funkcja $-f$ jest ograniczona od góry dokładnie wtedy, gdy funkcja f jest ograniczona od dołu. Dowód ograniczoności od góry przeprowadzimy metodą nie wprost. Załóżmy więc, że f nie jest ograniczona od góry. Istnieje zatem ciąg punktów $\{x_n\} \subset [a, b]$, dla których

$$f(x_n) > n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Ciąg ten konstruujemy wykorzystując, kolejno, że f nie jest ograniczona od góry przez 1, przez 2, i przez kolejne $n \in \mathbf{N}$. Ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony (bo zawiera się w skończonym odcinku $[a, b]$), a zatem można wybrać z niego podciąg $\{x_{n_k}\}$ zbieżny do jakiejś liczby $x_\infty \in [a, b]$ (Twierdzenie 4.12):

$$x_{n_k} \to x_\infty.$$

Z definicji ciągłości mamy $f(x_{n_k}) \to f(x_\infty)$, co jest sprzecznością, bo ciąg $\{f(x_{n_k})\}$ nie jest ograniczony, i nie może więc w ogóle być zbieżny. $\square$

Uwaga: Istotne jest, że przedział $[a, b]$ jest skończony, i że zawiera końce. Bez tych założeń funkcja może nie być ograniczona. Na przykład, funkcja $f(x) = x$ jest ciągła na $[0, \infty)$, a $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła na $(0, 1)$, a żadna z nich nie jest ograniczona. Uwaga ta odnosi się też do następnego twierdzenia.

Twierdzenie 7.5. *Funkcja f ciągła na przedziale $[a, b]$ (skończonym i zawierającym końce) przyjmuje swoje wartości największą i najmniejszą.*

Dowód. Pokażemy tylko, że f przyjmuje wartość największą. Niech

$$M = \sup\{y : y = f(x),\ x \in [a, b]\}.$$

Wiemy, że zbiór wartości funkcji f jest ograniczony, więc powyższy kres górny istnieje (jest skończony). Z definicji kresu wynika, że istnieje ciąg $\{x_n\} \subset [a, b]$ taki, że $f(x_n) \to M$. Ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony, więc można z niego wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}$ zbieżny do jakiejś liczby $x_\infty \in [a, b]$ (ponownie Twierdzenie 4.12). Mamy więc $f(x_{n_k}) \to f(x_\infty)$, czyli $f(x_\infty) = M$. $\square$

Twierdzenie 7.6 (Własność Darboux). *Funkcja f ciągła na przedziale $[a,b]$ przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy swoją wartością najmniejszą m i największą M. Innymi słowy, zbiorem wartości funkcji ciągłej na przedziale $[a,b]$ jest przedział $[m,M]$.*

Dowód. Wiemy, że funkcja f przyjmuje swoje wartości ekstremalne, czyli istnieją liczby $c,d \in [a,b]$ takie, że $f(c)=m$ i $f(d)=M$. Rozpatrzmy przypadek gdy $c<d$. W przypadku, gdy $c=d$ f jest stała, a w przypadku nierówności przeciwnej możemy rozważać $-f$ zamiast f, albo zmodyfikować ten dowód. Niech więc $c<d$. Załóżmy, że $y_0 \in (m,M)$, czyli y_0 jest wartością pośrednią, pomiędzy wartością najmniejszą i największą. Rozważmy zbiór

$$\{t \in [c,d] : f(x) < y_0 \text{ dla } x \in [c,t]\}.$$

Wiemy, że zbiór ten jest niepusty, gdyż zawiera przynajmniej c ($f(c)=m<y_0$), oraz jest ograniczony, gdyż rozważamy tylko $t \in [c,d]$. Kres górny tego zbioru więc istnieje (jest skończony), i oznaczmy go przez x_0:

$$x_0 = \sup\{t \in [c,d] : f(x) < y_0 \text{ dla } x \in [c,t]\}.$$

Pokażemy, że musi zachodzić

$$f(x_0) = y_0, \tag{7.1}$$

czyli istotnie y_0 jest wartością funkcji f. Udowodnimy (7.1) poprzez wykluczenie pozostałych możliwości. Załóżmy najpierw, że $f(x_0)<y_0$. Wtedy, skoro f jest ciągła, to istnieje $\delta>0$ takie, że $f(x)<y_0$ dla $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Widzimy więc, że $f(x)<y_0$ na przedziale $[c, x_0+\delta)$, co przeczy definicji x_0. Mamy więc sprzeczność, a więc nie może być $f(x_0)<y_0$. Załóżmy więc, że $f(x_0)>y_0$. Tym razem, z ciągłości f w x_0 mamy, że $f(x)>y_0$ na pewnym przedziale $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, dla pewnego $\delta>0$. Natomiast z definicji x_0 wynika, że $f(x)<y_0$ dla $x<x_0$, a więc znowu mamy sprzeczność. Jedyną możliwością pozostaje (7.1). $\square$

Uwaga: Powyższe twierdzenie może być wykorzystane do przybliżonego znajdowania pierwiastków równań. Jeżeli wiemy, że funkcja f jest ciągła, i $f(a)\cdot f(b)<0$, to f ma pierwiastek w przedziale (a,b):

$$f(x)=0 \qquad \text{dla pewnego } x \in (a,b).$$

Algorytm przybliżonego znajdowania tego pierwiastka, tak zwana metoda „przez połowienie", jest rekurencyjny. Niech $c=\frac{a+b}{2}$. Albo $f(c)=0$, i wtedy pierwiastek jest znaleziony, albo $f(c)\neq 0$ a więc musi być $f(a)\cdot$

$f(c) < 0$ lub $f(c) \cdot f(b) < 0$. Innymi słowy, pierwiastek musi być albo w lewej połówce przedziału $[a, b]$, albo w prawej. Trafiamy więc do punktu wyjścia (to znaczy wiemy, że pierwiastek jest w przedziale), ale z przedziałem o połowę krótszym. Na przykład, żeby obliczyć numerycznie $\sqrt{2}$ możemy, szukać pierwiastka równania

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Mamy $f(1) \cdot f(2) = -2 < 0$, a funkcja f jest ciągła, więc istnieje pierwiastek w przedziale $(1, 2)$ (niewielka niespodzianka). Łatwo zauważyć, że metodą połowienia osiągamy 3 dodatkowe cyfry dziesiętne przybliżenia na każde 10 iteracji. Każda iteracja sprowadza się (w tym przykładzie) do 1 mnożenia, czyli algorytm jest bardzo efektywny — 3 cyfry dziesiętne dokładności na 10 mnożeń.

Twierdzenie 7.7. *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i różnowartościowa, to funkcja g, odwrotna do f, jest ciągła na zbiorze wartości f, czyli na przedziale $[m, M]$, gdzie stałe m i M oznaczają, podobnie jak w poprzednim twierdzeniu wartość najmniejszą i największą funkcji f na $[a, b]$.*

Dowód. Obrazem (zbiorem wartości) f, zgodnie z Twierdzeniem 7.6,jest przedział $[m, M]$, i jest więc on dziedziną funkcji odwrotnej g. Jeżeli $m \leq y \leq M$ to g jest określona w punkcie y. Niech $y_n \to y$ i $y_n \in [m, M]$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Skoro y_n i y należą do zbioru wartości f, to istnieją $x, x_n \in [a, b]$ takie, że $f(x_n) = y_n$ i $f(x) = y$. Ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony. Niech jego granica dolna będzie oznaczona przez x', a granica górna przez x''. Niech podciągi $\{x_{n'_k}\}$ i $\{x_{n''_k}\}$ odpowiednio zbiegają do x' i x''. Z ciągłości f wynika, że

$$f(x') = \lim_{k\to\infty} f(x_{n'_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n'_k} = y,$$

i podobnie

$$f(x'') = \lim_{k\to\infty} f(x_{n''_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n''_k} = y.$$

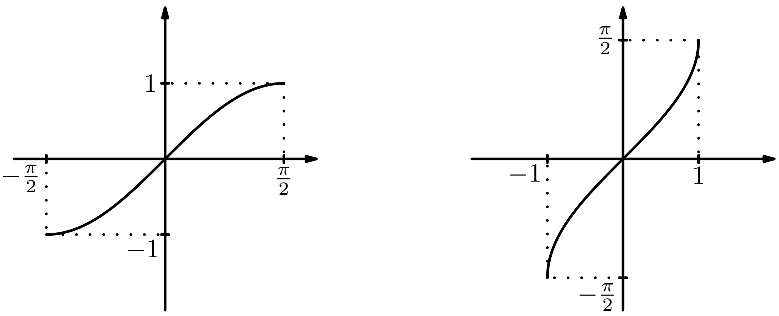
Mamy więc $f(x') = f(x'') = y = f(x)$. Skoro f jest różnowartościowa, to $x = x' = x''$. Granica górna i dolna ciągu $\{x_n\}$ są więc równe x, a więc ciąg jest zbieżny do x. Mamy więc

$$g(y_n) = x_n \xrightarrow{n\to\infty} x = g(y),$$

czyli g jest ciągła w y. □

Wniosek 7.8. *Funkcja $\log_a(x)$ jest ciągła na $(0, \infty)$, jako funkcja odwrotna do funkcji ciągłej a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$.*

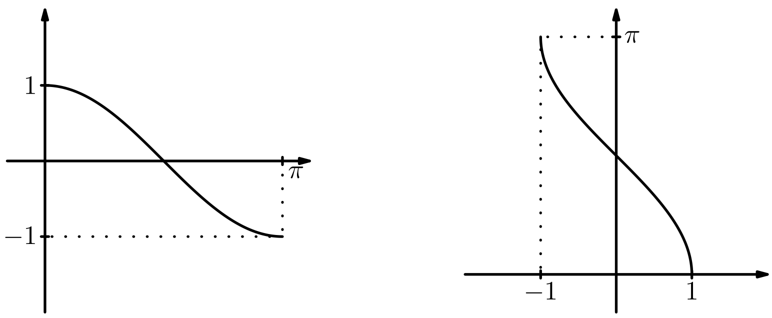
Uwaga: Funkcja ciągła, różnowartościowa na odcinku $[a, b]$ musi być ściśle monotoniczna. Dowód tego prostego faktu pozostawiamy jako ćwiczenie.



Rysunek 7.2: Funkcja $\sin(x)$ i $\arcsin(x)$.

Funkcje cyklometryczne

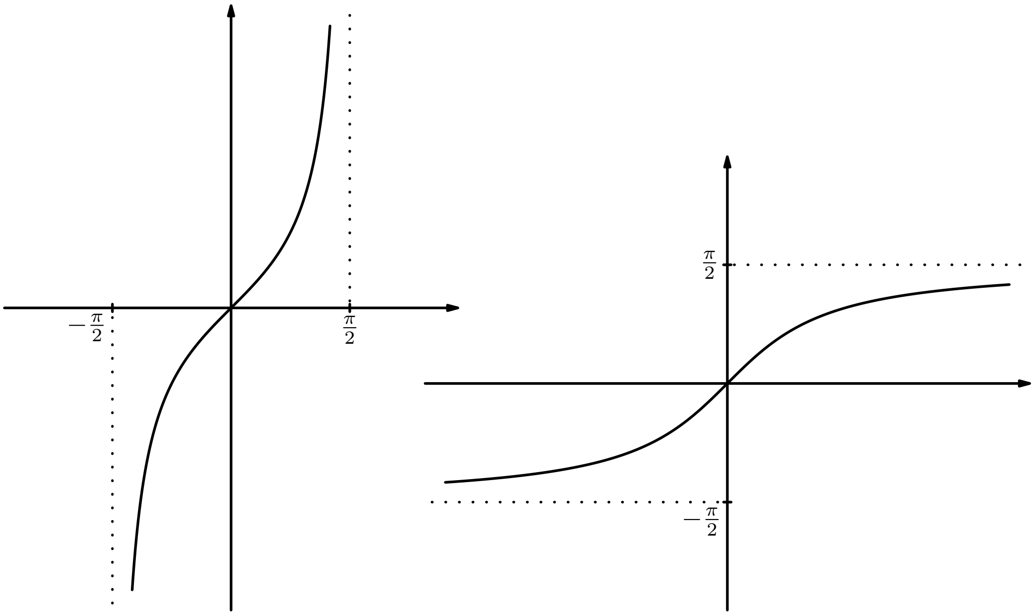
Funkcje $\sin(x)$ i $\cos(x)$ nie są różnowartościowe a więc nie są odwracalne. Można jednak rozważać te funkcje na mniejszej dziedzinie, na której są różnowartościowe. Funkcja $\sin(x)$ z dziedziną ograniczoną do $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jest funkcją ściśle rosnącą od -1 do 1, a więc jest różnowartościowa i odwracalna.



Rysunek 7.3: Funkcja $\cos(x)$ i $\arccos(x)$.

Funkcja odwrotna, określona na $[-1, 1]$ nazywa się $\arcsin(x)$, i zgodnie z powyższym twierdzeniem, jest ciągła. Podobnie $\cos(x)$, z dziedzina ograniczoną do przedziału $[0, \pi]$ jest funkcją ściśle malejącą od 1 do -1, a więc odwracalną. Funkcja odwrotna, określona na przedziale $[-1, 1]$ nazywa się $\arccos(x)$, i również jest ciągła.

Funkcja $\tan(x)$ jest okresowa, o okresie π, i składa się z „gałęzi". Z dziedziną ograniczoną do $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ jest funkcją ściśle rosnącą, odwracalną. Funkcja odwrotna, określona na całej prostej $\mathbf{R}$ nazywa się $\arctan(x)$ i również jest ciągła.



Rysunek 7.4: Gałąź funkcji $\tan(x)$ i funkcja $\arctan(x)$.

Rozdział 8

Pochodna

Pochodna funkcji to chwilowa prędkość jej zmian.

Definicja 8.1. *Pochodną funkcji f w punkcie x nazywamy granicę*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{8.1}$$

o ile ta granica istnieje. Jeżeli istnieje, to mówimy, że f jest różniczkowalna w punkcie x (albo że „ma pochodną” w punkcie x). Pochodną funkcji f w punkcie x oznaczamy

$$f' \quad (\text{„}f\text{ prim”}) \quad \text{lub} \quad \frac{df}{dx} \quad (\text{„}df\text{ po }dx\text{”}).$$

Uwagi: (i) Pochodna funkcji f też jest funkcją, której dziedziną jest zbiór punktów, w których f jest różniczkowalna. Obliczanie pochodnej nazywa się „różniczkowaniem” funkcji.

(ii) Iloraz

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

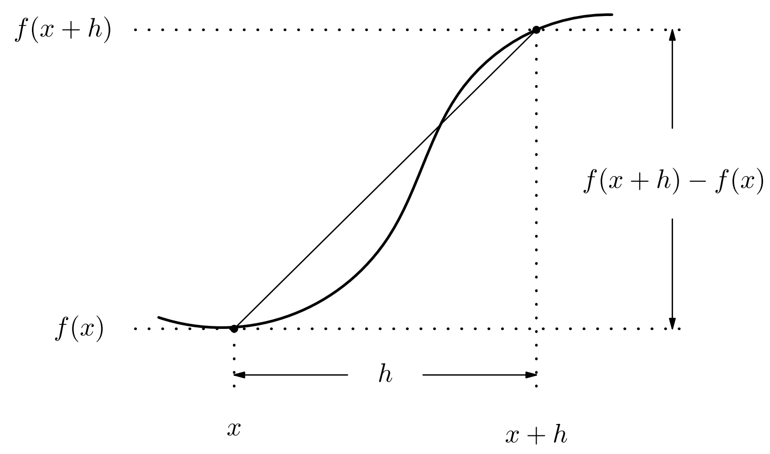
występujący w granicy (8.1) nazywamy „ilorazem różnicowym”. Iloraz różnicowy, czyli przyrost funkcji podzielony przez przyrost argumentu wyznacza średnią prędkość wzrostu funkcji f na przedziale $[x, x+h]$ (jeżeli $h > 0$, w przeciwnym wypadku na przedziale $[x+h, x]$). Stąd interpretacja pochodnej jako chwilowej prędkości zmian funkcji.

(iii) Pochodna ma też interpretację geometryczną. Iloraz różnicowy (8.1) to tangens kąta nachylenia φ siecznej wykresu, poprowadzonej przez punkty $(x, f(x))$ i $(x+h, f(x+h))$. Gdy $h \to 0$ sieczna staje się styczną, więc w interpretacji geometrycznej pochodna to tangens kąta nachylenia stycznej do wykresu w punkcie $(x, f(x))$. Istnienie pochodnej oznacza po prostu istnienie stycznej do wykresu, rozumianej jako granica siecznych.

(iv) Granicę (8.1) można oczywiście zapisać jako

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

używając zmiennej $y = x + h$.



Rysunek 8.1: Iloraz różnicowy i sieczna wykresu.

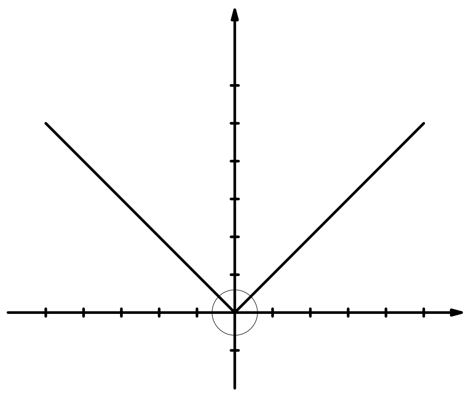
(v) Pochodna może nie istnieć. Na przykład, dla funkcji $f(x) = |x|$ mamy

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Ilorazy różnicowe mają różne granice jednostronne w zerze, a więc f nie jest różniczkowalna w 0. Interpretacja geometryczna nieróżniczkowalności w 0 jest szczególnie sugestywna: wykres f ma w punkcie $(0, 0)$ „dziubek”, i nie ma stycznej.

(vi) Pochodną funkcji f definiujemy w punktach „wewnętrznych” dziedziny, to znaczy w takich punktach x, które należą do dziedziny f wraz z pewnym otoczeniem $(x - \delta, x + \delta)$.

Twierdzenie 8.2. *Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie x to jest także ciągła w x.*



Rysunek 8.2: Wykres $f(x) = |x|$ i nieróżniczkowalny „dzióbek”.

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\lim_{y\to x} f(y) - f(x) &= \lim_{y\to x}(f(y) - f(x))\\ &= \lim_{y\to x}\left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\cdot(y-x)\right)\\ &= \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\cdot\lim_{y\to x}(y-x)\\ &= f'(x)\cdot 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 8.3. *Jeżeli f i g są różniczkowalne w punkcie x, to także $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ i (jeżeli dodatkowo $g(x)\neq 0$) $\frac{f}{g}$ są różniczkowalne w punkcie x oraz mamy wzory*

- $(f\pm g)'(x) = f'(x)\pm g'(x)$,
- $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ *(tak zwana reguła Leibniza),*
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, *(jeżeli $g(x)\neq 0$).*

Dowód. Pokażemy iloczyn i iloraz, natomiast sumę i różnicę pozostawiamy czytelnikowi. Zacznijmy od iloczynu. W liczniku odejmujemy i dodajemy wyrażenie $f(x)g(x+h)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \frac{(g(x+h) - g(x))f(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}
$$

Przypomnijmy, że g musi być ciągła w x, a więc $g(x+h) \to g(x)$ gdy $h \to 0$. Rozważmy teraz pochodną ilorazu. Jeżeli $g(x) \neq 0$ to g musi być różna od zera w pewnym otoczeniu x (bo jest ciągła w x), a więc iloraz $\frac{f}{g}$ istnieje nie tylko w x ale też w pewnym jego otoczeniu.

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\, g(x+h)\, g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) - (f(x)g(x+h) - f(x)g(x))}{h}}{g(x+h)\, g(x)} \\
&= \frac{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g^2(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}
$$

□

Przykłady: (a) Funkcja stała $f(x) = c$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Pochodna funkcji stałej jest równa 0.

(b) $f(x) = x$. Mamy

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

(c) $f(x) = x^n$, dla $n \in \mathbf{N}$. Pochodna jest równa $f'(x) = nx^{n-1}$. Możemy to udowodnić posługując się (b) (to przypadek $n = 1$), regułą Leibniza i indukcją. Możemy też zastosować wzór dwumianowy Newtona.

(d) Wielmian stopnia n: $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Pochodna $f'(x) = na_n^{n-1} + \cdots + a_1$, czyli jest wielomianem stopnia $n - 1$.

(e) $f(x) = \sin x$. Mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\,\sin(\frac{1}{2}h)\,\cos(x + \frac{1}{2}\,h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} \cdot \lim_{h\to 0} \cos(x + \frac{1}{2}\,h) \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z tożsamości trygonometrycznej

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\,\sin b\,\cos a,$$

dla $a = x + \frac{1}{2}h$ i $b = \frac{1}{2}h$.

(f) $f(x) = \cos x$. Podobnie jak w (e) z tym, że dla funkcji cos skorzystamy z tożsamości

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\,\sin a\,\sin b.$$

Liczymy więc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2\,\sin(\frac{1}{2}h)\,\sin(x + \frac{1}{2}\,h)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h} \cdot \lim_{h\to 0} \sin(x + \frac{1}{2}\,h) \\ &= -\sin x. \end{aligned}$$

(g) $f(x) = \log x$. Korzystając z własności logarytmu mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\,\log\left(\frac{x+h}{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \log\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}. \end{aligned}$$

Jak wiemy logarytm jest funkcją ciągłą, więc z granicą możemy „wejść” pod logarytm. Rozważmy wyrażenie pod logarytmem.

$$\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Wiemy, że z granicą można „wejść” pod dowolną potęgę (w tym przypadku pod $(\cdots)^{\frac{1}{x}}$). Zauważmy, że gdy $h \to 0^+$ to $\frac{x}{h} \to +\infty$, a gdy $h \to 0^-$ to $\frac{x}{h} \to -\infty$ (przypomnijmy, że $x > 0$). Zamieniając $\frac{x}{h}$ na t otrzymujemy

$$\lim_{h\to 0^+}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e,$$
$$\lim_{h\to 0^-}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}} = \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e.$$

Obie powyższe granice rozważaliśmy wcześniej (6.6). Ponieważ granice jednostronne są równe, więc

$$\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}} = e.$$

Składając kawałki rozumowania otrzymujemy

$$f'(x) = \log e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x}.$$

Twierdzenie 8.4 (Różniczkowanie funkcji odwrotnej)**.** *Niech funkcja f określona na przedziale $[a,b]$ będzie ciągła i różnowartościowa, oraz różniczkowalna w punkcie $x \in (a,b)$, przy czym $f'(x) \neq 0$. Niech g będzie funkcją odwrotną do f. Wtedy g jest różniczkowalna w punkcie $y = f(x)$, i zachodzi wzór:*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Dowód. Oznaczmy $k = f(x+h) - f(x)$ (k jest związane z h). Ponieważ $f(x) = y$, więc $y+k = f(x+h)$, a zatem $g(y+k) = x+h$ gdyż g jest funkcją odwrotną do f. Dla $k \to 0$ mamy więc $h \to 0$, bo g jest ciągła. Zauważmy jeszcze, że $g(y+k) - g(y) = f(x) + h - f(x) = h$, i mamy:

$$\begin{aligned} g'(y) &= \lim_{k\to 0}\frac{g(y+k)-g(y)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0}\frac{h}{f(x+h)-f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x_0)}{h}} \\ &= \frac{1}{f'(x)}. \end{aligned}$$

□

Wniosek 8.5. *Dla funkcji $f(x) = \log x$ funkcją odwrotną jest $g(y) = e^y$. Ustalmy $y = \log x$ czyli $x = e^y$, i otrzymujemy*

$$g'(y) = (e^y)' = \frac{1}{\log'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = e^y.$$

Mamy więc $(e^x)' = e^x$.

Ekstrema funkcji

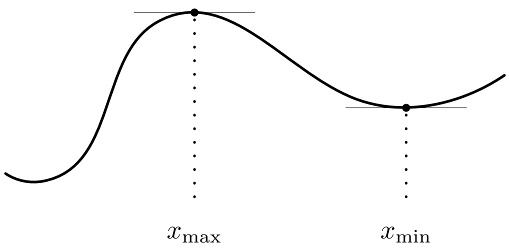
Mówimy, że w punkcie x funkcja f ma maksimum (czasem podkreślamy: lokalne maksimum), jeżeli

$$f(y) \leq f(x),$$

dla $y \in D_f$ z pewnego otoczenia x. Podobnie, mówimy, że ma w x minimum (lokalne minimum), jeżeli

$$f(y) \geq f(x),$$

dla $y \in D_f$ z pewnego otoczenia x. Ogólnie, mówimy że f ma w punkcie x ekstremum, jeżeli ma w tym punkcie maksimum lub minimum.



Rysunek 8.3: Lokalne maksimum i minimum.

Twierdzenie 8.6. *Jeżeli $f'(x) > 0$ to w pewnym otoczeniu punktu x mamy*

$$f(y) > f(x) \quad \text{dla } y > x \quad \text{oraz} \quad f(y) < f(x) \quad \text{dla } y < x. \qquad (8.2)$$

Podobnie, jeżeli $f'(x) < 0$ to w pewnym otoczeniu punktu x

$$f(y) < f(x) \quad \text{dla } y > x \quad \text{oraz} \quad f(y) > f(x) \quad \text{dla } y < x. \qquad (8.3)$$

Dowód. Wystarczy rozważyć znak ilorazu różnicowego. Jeżeli $f'(x) > 0$, to w pewnym otoczeniu punktu x musi zachodzić:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0.$$

Licznik i mianownik mają ten sam znak, i otrzymujemy (8.2). Podobnie w przypadku $f'(x) < 0$, licznik i mianownik ilorazu różnicowego muszą mieć przeciwne znaki, a więc otrzymujemy (8.3). □

Otrzymujemy natychmiast następujący bardzo użyteczny wniosek:

Wniosek 8.7. *Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie x i ma w tym punkcie ekstremum, to $f'(x) = 0$.* □

Uwagi: (i) Punkt w którym pochodna funkcji przyjmuje wartość zero nazywa się punktem krytycznym funkcji.

(ii) Jeżeli f ma w punkcie x ekstremum, to $f'(x) = 0$, ale nie na odwrót. Na przykład, funkcja $f(x) = x^3$ spełnia $f'(0) = 0$, ale nie ma w 0 ekstremum. Innymi słowy, w punkcie krytycznym funkcja może mieć ekstremum, ale nie musi.

(iii) Powyższy wniosek może służyć do szukania wartości największej czy najmniejszej funkcji. Wartość największa i najmniejsza jest przyjęta albo w punkcie, gdzie funkcja nie jest różniczkowalna (na przykład na końcach przedziału na którym badamy funkcję), albo w punkcie krytycznym.

(iv) Twierdzenie 8.6 i Wniosek 8.7 są oczywiste geometrycznie. Na przykład, jeżeli funkcja ma w punkcie ekstremum, to styczna do wykresu w tym punkcie (jeżeli istnieje) musi być pozioma.

Twierdzenie 8.8 (Rolle'a)**.** *Niech $f(x)$ będzie ciągła na przedziale $[a, b]$, i różniczkowalna w (a, b). Załóżmy, że $f(a) = f(b)$. Wtedy istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $f'(c) = 0$.*

Dowód. $f(x)$ przyjmuje swoje wartości najmniejszą i największą. Jeżeli obie są przyjęte na końcach przedziału $[a, b]$, to znaczy, że funkcja jest stała, i $f'(x) \equiv 0$ na całym przedziale (a, b). W przeciwnym wypadku jedno z ekstremów musi być przyjęte w punkcie wewnętrznym przedziału $c \in (a, b)$, a w takim razie w tym punkcie musi być $f'(c) = 0$. □

Następujące twierdzenie jest ważne i z punktu widzenia teorii, i z punktu widzenia zastosowań.

Twierdzenie 8.9 (O wartości średniej)**.** *Jeżeli f jest ciągła na $[a, b]$, i różniczkowalna na (a, b), to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Dowód. Zauważmy, że funkcja

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + (x - a)\, \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$$

spełnia założenia twierdzenia Rolle'a: $g(a) = g(b) = 0$. Po prostu od funkcji f odjęliśmy funkcję liniową o tych samych wartościach punktach a i b. Z Twierdzenia 8.8 istnieje więc punkt $c \in (a, b)$ taki, że $g'(c) = 0$. Ale

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

co kończy dowód. □

Z twierdzenia o wartości średniej natychmiast otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 8.10. *Jeżeli na jakimś przedziale (a, b) mamy:*

- $f' \geq 0$ *to funkcja f jest rosnąca na (a, b),*
- $f' \leq 0$ *to funkcja f jest malejąca na (a, b),*
- $f' = 0$ *to funkcja f jest stała na (a, b),*

Dowód. Niech $x, y \in (a, b)$ i $x < y$. Z twierdzenia o wartości średniej

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c), \qquad c \in (x, y) \subset (a, b).$$

Jeżeli $f' \geq 0$ na całym przedziale (a, b) to także iloraz po lewej stronie równości, a więc i licznik muszą być ≥ 0. Podobnie w pozostałych dwóch przypadkach. Zauważmy, że jeżeli f' jest stale ściśle dodatnia, lub ściśle ujemna, to funkcja jest ściśle rosnąca, lub ściśle malejąca na (a, b). □

Uwagi: (i) Zauważmy, że we wniosku zakładamy, że odpowiednia nierówność zachodzi na odcinku. To jest ważne założenie, bo na przykład funkcja $\frac{1}{x}$ ma pochodną stale ściśle ujemną na całej swojej dziedzinie, a nie jest malejąca. Jest malejąca na każdym z odcinków $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$, ale nie na całej swojej dziedzinie.

(ii) Wprost z definicji pochodnej wynika następująca obserwacja: jeżeli pewnym otoczeniu x funkcja f jest rosnąca, to ilorazy różnicowe w tym punkcie są dodatnie, a więc $f'(x) \geq 0$. Podobnie jeżeli f jest w jakimś otoczeniu punktu x malejąca, to ilorazy różnicowe w tym punkcie są ujemne, a więc $f'(x) \leq 0$. Widzimy więc, że monotoniczność funkcji jest ściśle związana ze znakiem pochodnej. przypomnijmy też związane z tym Twierdzenie 8.6.

Następujące twierdzenie jest podstawowym narzędziem do praktycznego liczenia pochodnych.

Twierdzenie 8.11 (Reguła łańcuchowa)**.** *Niech funkcje f i g będą różniczkowalne. Załóżmy, że złożenie $g \circ f$ będzie określone, to znaczy wartości f wpadają do dziedziny g. Wtedy złożenie $g \circ f$ też jest funkcją różniczkowalną i zachodzi następujący wzór na jej pochodną:*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x). \tag{8.4}$$

Dowód. Ustalmy punkt x i załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna w x, a g różniczkowalna w $f(x)$. Rozpatrzmy najpierw przypadek $f'(x) \neq 0$. Zgodnie z Twierdzeniem 8.6 dla $h \neq 0$ wystarczająco małego mamy $f(x+h) \neq f(x)$. Zapiszmy następujący iloraz różnicowy

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Oczywiście, gdy $h \to 0$ to $f(x+h) \to f(x)$ (f jest ciągła w x), czyli

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} &= \\ &= \lim_{y \to f(x)} \frac{g(y) - g(f(x))}{y - f(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x).\end{aligned}$$

Teraz rozpatrzmy przypadek $f'(x) = 0$. Ustalmy $\epsilon > 0$. Iloraz różnicowy

$$\frac{g(y) - g(f(x))}{y - f(x)}, \qquad y \neq f(x)$$

ma granicę (równą $g'(f(x))$) gdy $y \to f(x)$, a więc jest w pewnym otoczeniu $f(x)$ ograniczony:

$$\exists\, \alpha > 0\ \exists\, M\ \forall\, y \quad 0 < |y - f(x)| < \alpha \ \Rightarrow \ \left| \frac{g(y) - g(f(x))}{y - f(x)} \right| < M.$$

Z drugiej strony f jest ciągła w x, a więc

$$\exists\, \delta_1 > 0\ \forall\, h \quad |h| < \delta_1 \ \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| < \alpha.$$

W końcu, skoro $f'(x) = 0$, to

$$\exists\, \delta_2 > 0\ \forall\, h \quad 0 < |h| < \delta_2 \ \Rightarrow \ \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| < \frac{\epsilon}{M}.$$

Niech $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ i $0 < |h| < \delta$. Jeżeli $f(x+h) = f(x)$ to

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = 0.$$

W przeciwnym przypadku

$$\left|\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}\right| =$$

$$= \left|\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\right| \cdot \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Ponieważ ϵ było dowolne, to pokazaliśmy, że

$$(g\circ f)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h} = 0,$$

czyli, skoro także $f'(x)=0$, pokazaliśmy (8.4). □

Wniosek 8.12. *Niech $f(x) = x^a$, gdzie a jest dowolną potęgą rzeczywistą. Mamy wtedy*

$$x^a = e^{a\log x} \;\Rightarrow\; (x^a)' = e^{a\log x}(a\log x)' = x^a\cdot\frac{a}{x} = a\,x^{a-1}.$$

Wzór ten udowodniliśmy wcześniej w przypadku gdy $a\in\mathbf{N}$.

Następujące twierdzenie to tak zwana reguła de l'Hôpitala. Jest to bardzo proste twierdzenie, jednak zaskakująco przydatne. Będziemy je stosować wielokrotnie. Pozwala ono w wielu przypadkach obliczyć granice (jeżeli istnieją) postaci

$$\lim_{y\to x}\frac{f(y)}{g(y)},$$

gdzie obie funkcje f i g mają granice równe 0. Wyrażenie takie nazywamy wyrażeniem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$ – łatwo się domyśleć dlaczego.

Wyrażając się ściślej, załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe w pewnym otoczeniu punktu x, oraz $f(x)=g(x)=0$. Załóżmy, że obie funkcje są różniczkowalne w pewnym otoczeniu x, poza, być może, samym punktem x. Zakładamy także, że w pewnym otoczeniu punktu x określone są ilorazy

$$\frac{f(y)}{g(y)} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{f'(y)}{g'(y)},$$

(to znaczy w jakimś otoczeniu x, z wyjątkiem samego punktu x, zachodzi $g(y)\neq 0$ i $g'(y)\neq 0$). W tak opisanej sytuacji prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.13 (Reguła de l'Hôpitala)**.** *Załóżmy, że istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa)*

$$\lim_{y\to x}\frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Wedy istnieje także granica

$$\lim_{y\to x}\frac{f(y)}{g(y)},$$

i obie te granice są sobie równe

$$\lim_{y\to x}\frac{f(y)}{g(y)}=\lim_{y\to x}\frac{f'(y)}{g'(y)}. \tag{8.5}$$

Reguła de l'Hôpitala jest również prawdziwa dla granic jednostronnych. Dowód przeprowadzimy właśnie dla granic prawostronnych. Zauważmy, że przypadek granic lewostronnych i obustronnych już z tej wersji wynika.

Dowód. Udowodnimy wersje twierdzenia dla granic prawostronnych. Punkt x jest więc ustalony, i wszystkie założenia opisane powyżej są spełnione dla $y>x$, a wszystkie granice są prawostronne dla $y\to x^+$. Niech $h>0$ będzie ustalone, i rozważmy przedział $[x,x+h]$. Pokażemy, że istnieje $c\in(x,x+h)$ takie, że

$$\frac{f(x+h)}{g(x+h)}=\frac{f(x+h)-f(x)}{g(x+h)-g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{8.6}$$

Zauważmy, że w przypadku gdy $g(y)=y$ powyższa równość to jest po prostu twierdzenie o wartości średniej. Ogólny przypadek nie wynika z twierdzenia o wartości średniej, ale można go udowodnić dokładnie tak, jak dowodziliśmy tego twierdzenia. Wprowadzimy odpowiednią funkcję pomocniczą, i skorzystamy z twierdzenia Rolle'a. Wprowadźmy następującą funkcję na przedziale $[x,x+h]$:

$$\Phi(y)=f(y)-g(y)\,\frac{f(x+h)}{g(x+h)}.$$

Mamy $\Phi(x)=\Phi(x+h)=0$ czyli z twierdzenia Rolle'a istnieje $c\in(x,x+h)$ takie, że $\Phi'(c)=0$. To oznacza

$$f'(c)-g'(c)\,\frac{f(x+h)}{g(x+h)}=0,$$

czyli dokładnie (8.6) Zauważmy też, że gdy $h\to 0^+$ to $c\to x^+$. Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{y\to x^+}\frac{f'(y)}{g'(y)}, \tag{8.7}$$

to granica

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

też musi istnieć i jest równa granicy (8.7). Mamy więc

$$\lim_{y\to x^+} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)}{g(x+h)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{y\to x^+} \frac{f'(y)}{g'(y)},$$

o ile granica po prawej stronie istnieje. □

Uwagi: (i) Zwróćmy uwagę, że równość (8.5) zachodzi o ile granica po prawej stronie istnieje. Może się zdarzyć, że granica po lewej stronie istnieje, chociaż ta po prawej stronie (8.5) nie istnieje. Na przykład rozważmy funkcje

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad g(x) = x,$$

(niech $f(0) = 0$). Obie funkcje są ciągłe i różniczkowalne na całej prostej, ułamek $\frac{f}{g}$ jest wyrażeniem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$ w zerze, istnieje granica

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

chociaż granica wyrażenia

$$\frac{f'(y)}{g'(y)} = \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}}{1} = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

nie istnieje.

(ii) Regułę de l'Hôpitala można iterować. Na przykład rozważmy granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}.$$

Różniczkując licznik i mianownik znowu otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone typu $\frac{0}{0}$ w zerze, $\frac{\cos(x)-1}{3x^2}$. Różniczkując licznik i mianownik ponownie otrzymujemy $\frac{-\sin(x)}{6x}$, wciąż wyrażenie nieoznaczone typu $\frac{0}{0}$ w zerze. Moglibyśmy różniczkować ponownie, ale akurat tą granicę znamy, (6.4), wynosi ona $-\frac{1}{6}$. Wracamy więc, stosując regułę de l'Hôpitala dwukrotnie.

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{6x} = -\frac{1}{6} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{3x^2} = -\frac{1}{6} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

(iii) Regułę de l'Hôpitala można też stosować do granic w nieskończoności. Rozważmy na przykład granicę

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

gdzie $f(x) \to 0$ i $g(x) \to 0$ gdy $x \to +\infty$. Wprowadźmy oznaczenia

$$\varphi(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{oraz} \quad \psi(t) = g\left(\frac{1}{t}\right),$$

wtedy $\varphi(t) \to 0$ i $\psi(t) \to 0$ gdy $t \to 0^+$, oraz

$$\varphi'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(\frac{-1}{t^2}\right), \quad \text{oraz} \quad \psi'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(\frac{-1}{t^2}\right).$$

Otrzymujemy więc

$$\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}.$$

Wynika z tego, że granice

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{oraz} \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

są identyczne, istnienie jednej jest równoważne istnieniu drugiej i jeżeli istnieją to są sobie równe. Oczywiście identyczne są również granice

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{oraz} \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)},$$

czyli mamy

$$A = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} \;\Rightarrow\; A = \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

(iv) Można też udowodnić (z grubsza w podobny sposób) wersję reguły de l'Hôpitala dla wyrażeń nieoznaczonych postaci $\frac{\infty}{\infty}$: jeżeli $\lim_{y \to x} f(y) = \pm\infty$ oraz $\lim_{y \to x} g(y) = \pm\infty$ to zachodzi reguła de l'Hôpitala, to znaczy mamy równość (8.5) (o ile granica po prawej stronie istnieje, właściwa lub niewłaściwa). Podobnie jak w przypadku Twierdzenia 8.13 udowodnimy wersję dla granic prawostronnych, z której wynikają pozostałe wersje, również dla granic w $\pm\infty$, analogicznie jak w tamtym przypadku. Zróbmy więc następujące założenia: niech f, f', g, g' oraz ilorazy $\frac{f}{g}$ i $\frac{f'}{g'}$ będą określone w jakimś otoczeniu prawostronnym punktu x i niech

$$\lim_{y \to x^+} g(y) = \pm\infty \tag{8.8}$$

(nie musimy nawet zakładać $\lim_{y \to x^+} f(y) = \pm\infty$). Załóżmy, że istnieje granica (właściwa)

$$\lim_{y \to x^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \alpha.$$

Ustalmy $\epsilon > 0$ i niech $\delta > 0$ będzie taka, ze dla $x < y < x + \delta$

$$\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - \alpha \right| < \epsilon. \tag{8.9}$$

Wybierzmy i ustalmy $y_0 \in (x, x + \delta)$, i rozważmy dowolne $y \in (x, y_0)$. Podobnie jak w dowodzie reguły de l'Hôpitala 8.13 możemy pokazać, że istnieje $c \in (y, y_0)$, oczywiście zależne od y, takie, że

$$\frac{f(y) - f(y_0)}{g(y) - g(y_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

czyli, biorąc pod uwagę (8.9)

$$\left| \frac{f(y) - f(y_0)}{g(y) - g(y_0)} - \alpha \right| < \epsilon.$$

Dzielimy licznik i mianownik ułamka przez $g(y)$, możemy to zapisać w postaci

$$\alpha - \epsilon < \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(y_0)}{g(y)}}{1 - \frac{g(y_0)}{g(y)}} < \alpha + \epsilon.$$

Dzielenie przez $g(y)$ jest dopuszczalne, gdyż ze względu na (8.8) jeżeli tylko δ jest wystarczająco mała, to $g(y) \neq 0$ w $(x, x + \delta)$. Z tego samego względu mianownik dąży do 1 gdy $y \to x^+$, a więc w szczególności, gdy y jest wystarczająco blisko x, to mianownik jest dodatni. Niech więc $y < x + \eta \leq y_0$, wtedy powyższe nierówności możemy zapisać

$$(\alpha - \epsilon) \cdot \left(1 - \frac{g(y_0)}{g(y)}\right) + \frac{f(y_0)}{g(y)} < \frac{f(y)}{g(y)} < (\alpha + \epsilon) \cdot \left(1 - \frac{g(y_0)}{g(y)}\right) + \frac{f(y_0)}{g(y)}.$$

Weźmy dowolny ciąg $\{y_n\}$, taki, że $y_n \to x$ i $y_n > x$. Od pewnego miejsca $y_n < x + \eta$, więc możemy zastosować powyższe nierówności. Otrzymujemy więc

$$\alpha - \epsilon \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{f(y_n)}{g(y_n)} \leq \alpha + \epsilon.$$

ϵ było dowolne, więc widzimy, że musi istnieć granica, i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)}{g(y_n)} = \alpha.$$

Ciąg $\{y_n\}$ był dowolny, więc

$$\lim_{y\to x^+} \frac{f(y)}{g(y)} = \alpha = \lim_{y\to x^+} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

W ten sposób udowodniliśmy regułę de l'Hôpitala w przypadku granicy α właściwej (skończonej). Można ją też udowodnić dla granicy α niewłaściwej.

Przykłady: (a) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$. Jest to wyrażenie postaci $\frac{0}{0}$, więc mamy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1.$$

(b) $\lim_{x\to 0^+} x\log x$. Jest to wyrażenie postaci $0\cdot\infty$, ale przenosząc x do mianownika otrzymujemy wyrażenie postaci $\frac{\infty}{\infty}$. Mamy więc

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+} x=0.$$

(c) $\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$. Jest to wyrażenie postaci 1^∞. Przekształcamy je więc w zwykły sposób

$$(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\log\cos x}=e^{\frac{\log\cos x}{x}}.$$

W wykładniku jest wyrażenie typu $\frac{0}{0}$, więc obliczmy granicę w wykładniku

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log\cos x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{1}=0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

(d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}$. Jest to wyrażenie postaci $\frac{\infty}{\infty}$ w ∞, więc mamy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

Logarytm rośnie do ∞ wolniej niż pierwiastek.

Pochodne funkcji cyklometrycznych

(a) $f(x)=\arcsin(x)$. f jest określona na przedziale $[-1,1]$ i jest funkcją odwrotną do funkcji $\sin(x)$ zawężonej do przedziału $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Niech $x\in(-1,1)$ i $x=\sin(y)$ dla pewnego $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Z Twierdzenia 8.4 wiemy, że f jest różniczkowalna w x i

$$f'(x)=\frac{1}{\sin'(y)}=\frac{1}{\cos(y)}=\frac{1}{\cos\arcsin(x)}.$$

Wyrażenie to można uprościć. Dla $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\cos(y) > 0$, a więc $\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)}$. Mamy więc

$$f'(x) = \frac{1}{\cos \arcsin(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(b) $f(x) = \arccos(x)$. Jest to funkcja określona na przedziale $[-1, 1]$, odwrotna do funkcji $\cos(x)$ zawężonej do przedziału $[0, \pi]$. Niech $x \in (-1, 1)$, i $x = \cos(y)$ dla pewnego $y \in (0, \pi)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos'(y)} = \frac{1}{-\sin(y)} = \frac{-1}{\sin \arccos(x)}.$$

Podobnie jak poprzednio, $\sin(x)$ jest dodatni na $(0, \pi)$, więc $\sin(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)}$, czyli

$$f'(x) = \frac{-1}{\sin \arccos(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(c) $f(x) = \arctan(x)$. Funkcja f jest określona na całej prostej $\mathbf{R}$, i jest funkcją odwrotną do funkcji $\tan(x)$ zawężonej do przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Niech $x = \tan(y)$ dla pewnego $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Mamy

$$f'(x) = \frac{1}{\tan'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(y)}} = \cos^2(y).$$

Z drugiej strony

$$\cos^2(y) = \frac{\cos^2(y)}{\cos^2(y) + \sin^2(y)} = \frac{1}{1 + (\frac{\sin(y)}{\cos(y)})^2} = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Ostatecznie więc

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Pochodne wyższych rzędów

Jeżeli pochodna f' sama jest różniczkowalna, to jej pochodna, jest tak zwaną drugą pochodną funkcji f

$$(f')'(x) = f''(x) = f^{(2)}(x).$$

Podobnie możemy obliczyć pochodne dowolnego rzędu $f^{(n)}$ (jeżeli funkcja f jest różniczkowalna odpowiednią ilość razy). Piszemy $f^{(0)} = f$.

Przykłady: (a)

$$\sin^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos(x) & n \text{ – nieparzyste,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \sin(x) & n \text{ – parzyste.} \end{cases}$$

(b)

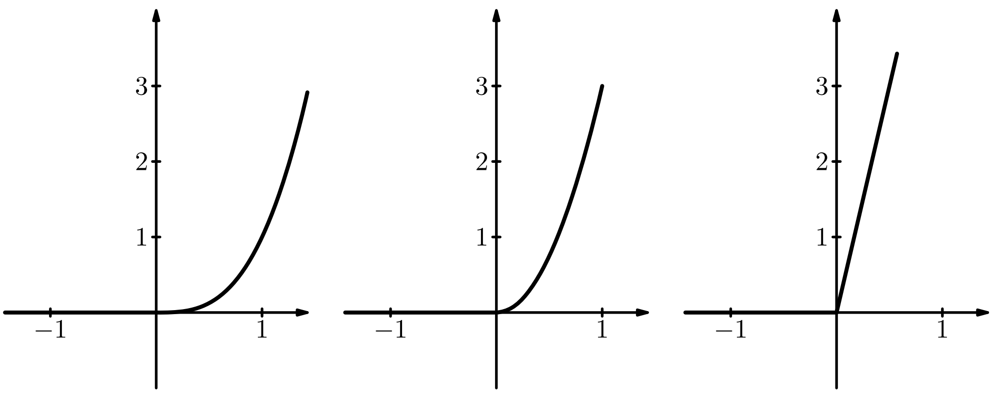
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \neq 0$ i $f'(x) = 3x^2$ dla $x > 0$ oraz $f'(x) = 0$ dla $x < 0$. Jest też różniczkowalna w zerze, i $f'(0) = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} = 0.$$

f jest więc różniczkowalna w każdym punkcie, i

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$



Rysunek 8.4: Funkcje f, f' i f'' z przykładu (b).

Obliczamy teraz pochodną f'. Dla $x > 0$ $f''(x) = 6x$, a dla $x < 0$ $f''(x) = 0$. W zerze f' też jest różniczkowalna, i $f''(0) = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} = 0.$$

f jest więc różniczkowalna 2-krotnie w każdym punkcie, i

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & x \geq 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że f'' nie jest różniczkowalna w zerze:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x)-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{6x}{x} = 6, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{f''(x)-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} = 0.$$

f jest więc 2-krotnie różniczkowalna w każdym punkcie, ale nie jest 3-krotnie różniczkowalna w zerze.

Uwaga: Wszystkie funkcje elementarne są różniczkowalne nieskończenie wiele razy w każdym punkcie swojej dziedziny.

Badanie przebiegu funkcji

Omówimy teraz procedurę badania przebiegu funkcji. Badanie przebiegu funkcji to typowe zadanie w zastosowaniach.

Uwaga: Procedura badania zmienności funkcji odnosi się do funkcji odpowiednio regularnych. Istnieją funkcje, których wykresu nie da się naszkicować, na przykład

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Funkcje, które badamy najczęściej są przynajmniej przedziałami ciągłe.

Przystępując do zbadania przebiegu funkcji postępujemy następująco. Kolejność poszczególnych operacji w zasadzie nie ma znaczenia.

(1) Ustalamy dziedzinę funkcji, jeżeli nie jest podana jawnie. Ustalamy punkty ciągłości, nieciągłości, różniczkowalności i nieróżniczkowalności. Z reguły funkcja badana jest przedziałami ciągła i przedziałami różniczkowalna, więc ustalamy te przedziały.

(2) Sprawdzamy parzystość i okresowość funkcji. Jeżeli f jest parzysta to znaczy $f(-x) = f(x)$ lub nieparzysta, to znaczy $f(-x) = -f(x)$, to wystarczy zbadać jej przebieg dla $x \geq 0$ a następnie wyniki odpowiednio przenieść na $x < 0$. Jeżeli funkcja jest okresowa, to znaczy istnieje T takie, że $f(x+T) = f(x)$, to wystarczy zbadać funkcję na dowolnym przedziale długości jednego okresu.

(3) Ustalamy pierwiastki funkcji, czyli punkty x w których

$$f(x) = 0,$$

oraz ustalamy przedziały na których funkcja zachowuje znak.

(4)Ustalamy przedziały monotoniczności i wyznaczamy ekstrema lokalne. Badamy znak pochodnej. Można z tego wyciągnąć wnioski na temat ekstremów. Czasem pomocne jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 8.14. *Jeżeli w pewnym punkcie x $f'(x) = 0$ i $f''(x) \neq 0$ to f ma w x ekstremum. Jeżeli $f''(x) < 0$ to jest to maksimum, a jeżeli $f''(x) > 0$ to jest to minimum.*

Dowód. Jeżeli $f''(x) > 0$ to stosując Twierdzenie 8.6 do f', pamiętając, że $f'(x) = 0$ otrzymujemy, że f' jest ujemna na lewo od x (czyli f maleje) i dodatnia na prawo od x (czyli f rośnie). W takim razie w x funkcja f ma minimum. Podobnie w przypadku $f''(x) < 0$: wtedy w x funkcja f ma maksimum. □

Należy pamiętać, że ekstrema mogą znajdować się w punktach, w których funkcja nie jest różniczkowalna.

(5) Jeżeli funkcja f ma drugą pochodną i na jakimś przedziale $f''(x) > 0$, to mówimy, że jest na tym przedziale wypukła. Jeżeli na jakimś przedziale $f''(x) < 0$ to mówimy, że jest na tym przedziale wklęsła. Jeżeli w jakimś punkcie funkcja zmienia się z wypukłej na wklęsłą, albo na odwrót, to taki punkt nazywamy punktem przegięcia. Taki punkt jest punktem ekstremalnym pochodnej. Znajdujemy punkty przegięcia funkcji, i określamy przedziały wypukłości/wklęsłości. Wypukłość i wklęsłość mają interpretację geometryczną. Na odcinku na którym funkcja jest wypukła styczne do wykresu leżą pod wykresem, a sieczne nad wykresem. Jeśli funkcja jest wklęsła to odwrotnie, styczne leżą nad wykresem a sieczne pod.

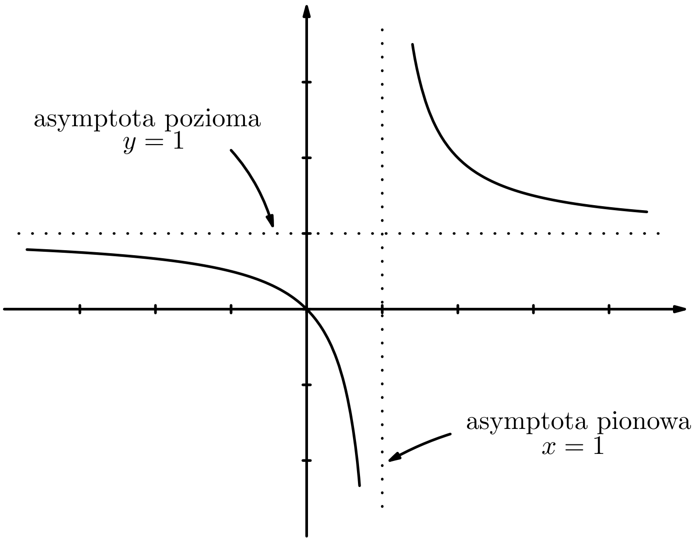
(6) Znajdujemy ewentualne asymptoty. Asymptoty mogą być różnego rodzaju.
(a) Jeżeli w jakimś punkcie a mamy $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$, to prostą pionową o równaniu $x = a$ nazywamy asymptotą pionową funkcji.
(b) Jeżeli istnieje granica $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = A$, to prostą poziomą o równaniu $y = A$ nazywamy asymptotą poziomą funkcji w $+\infty$ (lub w $-\infty$).
(c) Jeżeli isnieje stała m taka, że istnieje granica $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx) = c$, to prostą o równaniu $y = mx + c$ nazywamy asymptotą ukośną funkcji w $+\infty$ (lub w $-\infty$). Asymptota pozioma to szczególny przypadek asymptoty ukośnej, dla której $m = 0$. Jeżeli funkcja f ma w $+\infty$ albo $-\infty$ asymptotę ukośną , to stała m jest równa każdej z granic

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x+1) - f(x)), \quad \lim_{x\to\pm\infty} f'(x),$$

(ostatnia granica może nie istnieć, nawet jeżeli asymptota ukośna istnieje). Należy jednak pamiętać, że istnienie którejkolwiek z tych granic nie gwarantuje jeszcze istnienia asymptoty ukośnej. Żeby istniała asymptota ukośna musi jeszcze istnieć granica

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = c.$$

Przykłady: (a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ma asymptotę pionową $x = 1$ oraz asymptoty poziome $y = 1$ w obu nieskończonościach (Rys. 8.5).



Rysunek 8.5: Asymptoty funkcji $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

(b) $f(x) = \frac{x^3-2x^2+3}{2x^2}$. Funkcja ma asymptotę pionową $x = 0$. Będziemy szukali asymptot ukośnych.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^3} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \frac{1}{2},$$

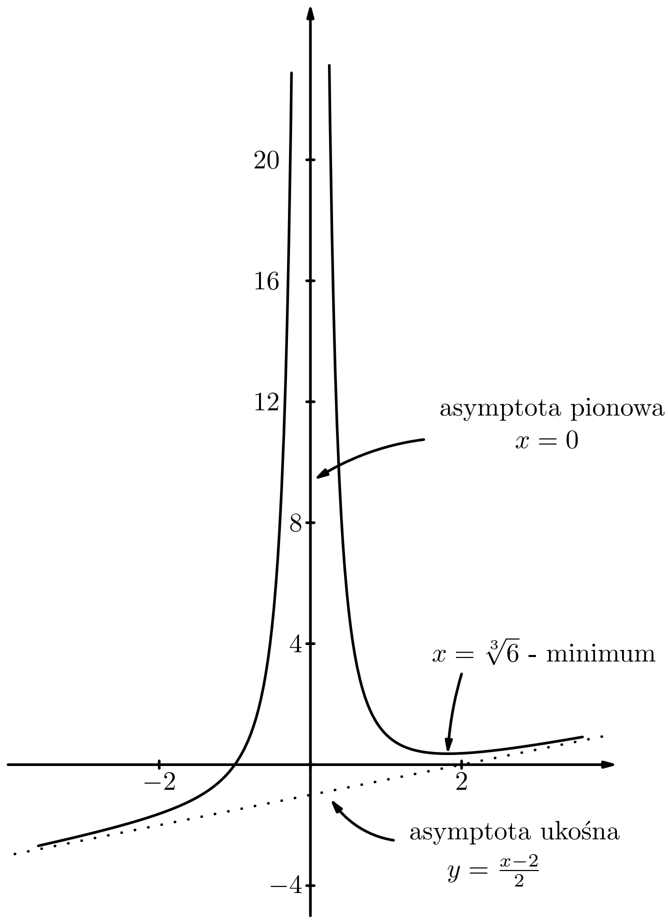
$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{2}\,x = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2} - \frac{x}{2} &= \frac{x^3 - 2x^2 + 3 - x^3}{2x^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 3}{2x^2} = -1 + \frac{3}{2x^2} \xrightarrow{x\to\pm\infty} -1. \end{aligned}$$

f ma więc asymptotę ukośną $y = \frac{1}{2}x - 1$ w obu nieskończonościach (Rys. 8.6).

(c) Zbadajmy przebieg zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{x + 1}.$$

Naturalną dziedziną funkcji jest $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, funkcja jest ciągła w każdym punkcie dziedziny i jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \neq 0$. Przedziały ciągłości to $(-\infty, -1)$ i $(-1, +\infty)$, a przedziały różniczkowalności to

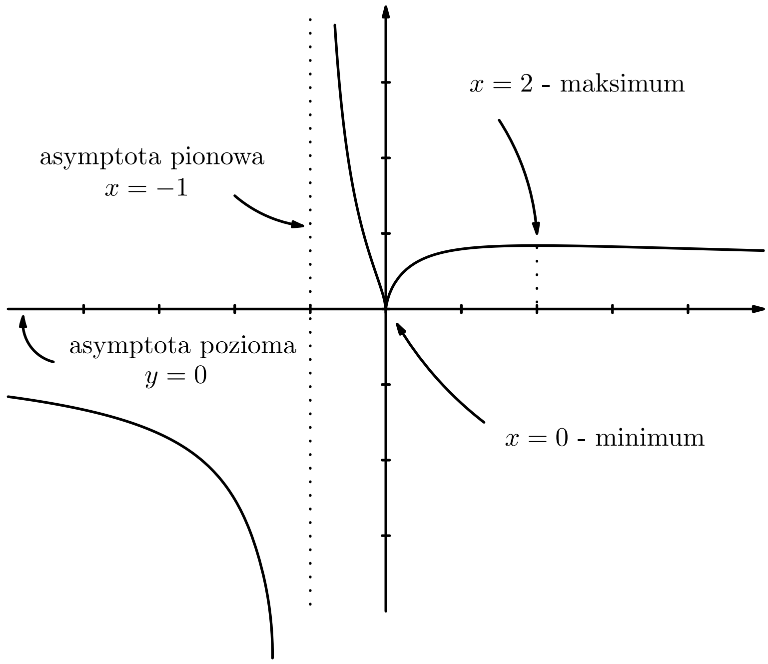


Rysunek 8.6: Asymptoty funkcji z przykładu (b).

$(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ oraz $(0, +\infty)$. Funkcja nie jest ani okresowa ani parzysta ani nieparzysta. Jedynym pierwiastkiem jest pierwiastek licznika, czyli $x = 0$. f jest dodatnia dla $x > -1$, $x \neq 0$ i ujemna dla $x < -1$. Obliczmy pochodną

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2\,\frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}\,(1+x) - 2\,x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^2} \\
&= \frac{2\,x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^2} \cdot \left(\frac{2}{3}\,\frac{1+x}{x} - 1 \right) \\
&= \frac{2\,x^{\frac{2}{3}}}{3\,(x+1)^2} \left(\frac{2}{x} - 1 \right).
\end{aligned}
$$

Pierwszy czynnik jest zawsze dodatni, więc znak pochodnej zależy tylko od znaku $(\frac{2}{x} - 1)$. Po łatwych rachunkach otrzymujemy, że pochodna jest dodatnia na przedziale $(0,2)$ i ujemna na przedziałach $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$ oraz $(2,+\infty)$. Funkcja f rośnie na przedziale $(0,2)$, a maleje na pozostałych przedziałach. Widzimy więc, że ma minimum w zerze (jest to punkt nieróżniczkowalności), i maksimum w 2. Widzimy , że funkcja ma asymptotę pionową $x=-1$, oraz poziomą w $\pm\infty$ $y=0$. Rozstrzygniemy teraz wypukłość. W tym celu policzymy drugą pochodną.



Rysunek 8.7: Wykres funkcji z przykładu (c).

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{\frac{4}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}}{x+1} - \frac{2\,x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^2} \right)' \\
&= \frac{-\frac{4}{9}\,x^{-\frac{4}{3}}\,(x+1) - \frac{4}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}}{(x+1)^2} - \frac{\frac{4}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}\,(x+1)^2 - 2\,x^{\frac{2}{3}}\,2\,(x+1)}{(x+1)^4} \\
&= \frac{-\frac{4}{9}\,x^{-\frac{4}{3}}\,(x+1)^2 - \frac{8}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}\,(x+1) + 4\,x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^3} \\
&= -\frac{4}{9}\,x^{-\frac{4}{3}}\,\frac{(x+1)^2 + 6\,x\,(x+1) - 9\,x^2}{(x+1)^3} \\
&= \frac{4}{9}\,x^{-\frac{4}{3}}\,\frac{2\,x^2 - 8\,x - 1}{(x+1)^3}.
\end{aligned}
$$

Wyrażenie $\frac{4}{9}x^{-\frac{4}{3}}$ jest zawsze dodatnie, a mianownik jest < 0 dla $x < -1$ i > 0 dla $x > -1$. Z kolei licznik jest > 0 dla $x \notin (2 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{3}{\sqrt{2}})$ i < 0 dla $x \in (2 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{3}{\sqrt{2}})$. Zauważmy jeszcze, że $-1 < 2 - \frac{3}{\sqrt{2}} < 0$, a więc funkcja $f(x)$ jest:

- wklęsła na $(-\infty, -1)$, $(2 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 0)$ oraz $(0, 2 + \frac{3}{\sqrt{2}})$,
- wypukła na $(-1, 2 - \frac{3}{\sqrt{2}})$ oraz $(2 + \frac{3}{\sqrt{2}}, +\infty)$,
- ma punkty przegięcia w $2 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Wiemy już wszystko co chcieliśmy, i możemy naszkicować wykres funkcji (Rys. 8.7).

Dowodzenie nierówności

Metody badanie funkcji można zastosować do dowodzenia nierówności.

Przykłady: (a) Udowdnimy nierówność $(1+x)^p \geq 1+px$ dla $x > -1$. Nierówność taką udowodniliśmy wcześniej dla wykładnika p naturalnego. Obecnie udowodnimy ją dla dowolnego $p \geq 1$. Rozważmy funkcję

$$f(x) = (1+x)^p - 1 - px, \quad x \geq -1.$$

Mamy

$$f'(x) = p\,(1+x)^{p-1} - p.$$

Dla $x \geq 0$ $1+x \geq 1$ oraz $p-1 \geq 0$ więc $(1+x)^{p-1} \geq 1$ czyli $f'(x) \geq 0$. Dla $x \leq 0$ $1+x \leq 1$ czyli $(1+x)^{p-1} \leq 1$, a więc $f'(x) \leq 0$. Funkcja f maleje dla $x < 0$ i rośnie dla $x > 0$, a więc ma w zerze swoją wartość najmniejszą

$$f(x) \geq f(0) = 0.$$

Funkcja jest więc zawsze ≥ 0, czyli

$$(1+x)^p \geq 1 + p\,x.$$

(b) Dla $x \geq 0$ mamy $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$. Prawa część nierówności jest jasna, i była pokazana. Pokażemy lewą część. Niech

$$f(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}.$$

Mamy $f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = -\sin(x) + x$. $f''(x) \geq 0$ dla $x \geq 0$, czyli f' rośnie dla $x \geq 0$, a skoro $f'(0) = 0$, to $f'(x) \geq 0$ dla $x \geq 0$. Sama funkcja więc rośnie dla $x \geq 0$, a więc

$$f(x) \geq f(0) = 0, \quad \text{dla } x \geq 0.$$

Wzór Taylora

Wzór Taylora jest jednym z ważniejszych narzędzi rachunku różniczkowego/ Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna n razy w jakimś punkcie x_0, to można ją przybliżyć w otoczeniu tego punktu przez tak zwany wielomian Taylora, stopnia n. Wzór Taylora umożliwia oszacowanie błędu tego przybliżenia. Bardzo często w praktyce schemat postępowania jest następujący. Szukamy rozwiązania jakiegoś zagadnienia (na przykład rozwiązujemy równanie) związanego z funkcją f. Zastępujemy funkcję f jej przybliżeniem wielomianem Taylora (im gładsza f, czyli wyższe n - tym lepsze przybliżenie i wielomian wyższego stopnia), rozwiązujemy tak powstałe prostsze zagadnienie i dowodzimy, że uzyskane rozwiązanie jest przybliżeniem rozwiązania dokładnego, z błędem, który jesteśmy w stanie kontrolować.

Niech więc funkcja f będzie różniczkowalna n razy w punkcie x_0 (jeżeli $n = 0$ to zamiast różniczkowalności załóżmy, że f jest ciągła w punkcie x_0). Wielomianem Taylora funkcji f stopnia n w punkcie x_0 nazywamy wielomian

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_n(x) = \\
&\quad = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.
\end{aligned}$$

Zauważmy,że

$$f^{(k)}(x_0) = \mathbb{P}_n^{(k)}(x_0) \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

czyli f i $\mathbb{P}_n$ mają w x_0 tą samą wartość oraz wszystkie pochodne do rzędu n włącznie. Mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 8.15 (Wzór Taylora). *Jeżeli f jest n razy różniczkowalna w punkcie x_0 i $\mathbb{P}_n$ jest jej wielomianem Taylora stopnia n w x_0, to*

$$f(x) = \mathbb{P}_n(x) + e_n(x)(x-x_0)^n, \tag{8.10}$$

gdzie

$$\lim_{x \to x_0} e_n(x) = 0. \tag{8.11}$$

Jeżeli o $\mathbb{P}_n(x)$ myślimy jako o przybliżeniu $f(x)$, to powyższy wzór daje nam oszacowanie błędu tego przybliżenia - tym błędem jest $e_n(x)(x-x_0)^n$. O funkcji e_n można powiedzieć więcej, istnieją konkretne wzory na nią, które pokażemy poniżej.

Dowód. Dowód sprowadza się do pokazania (8.11), gdzie $e_n(x)$ jest zdefiniowane przez równość (8.10). Chcemy więc udowodnić

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \mathbb{P}_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{8.12}$$

Jeżeli $n = 0$, to powyższa równość wynika natychmiast z ciągłości f w x_0. Jeżeli $n = 1$ to zauważmy:

$$\frac{f(x) - \mathbb{P}_1(x)}{(x-x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

Z definicji pochodnej (i z założenia, że pochodna f w x_0 istnieje) granica powyższego wyrażenia przy $x \to x_0$ istnieje i wynosi 0. Rozważmy teraz przypadek $n \geq 2$. W tym przypadku granica w (8.12) jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $\frac{0}{0}$ i można zastosować regułę de l'Hospitala. Co więcej, regułę tą można zastosować $n-1$ razy, bo cały czas mamy do czynienia z wyrażeniem nieoznaczonym postaci $\frac{0}{0}$. Licznik zawsze ma granicę 0, bo pochodne f do rzędu $n-1$ włącznie są ciągłe w x_0 (to wynika z n-krotnej różniczkowalności f w x_0). Podobnie wszystkie pochodne $\mathbb{P}_n$ są ciągłe, więc granica licznika to jego wartość w x_0 czyli $f^{(k)}(x_0) - \mathbb{P}_n^{(k)}(x_0) = 0$. Po $n-1$ krotnej *delopitalizacji* otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} & \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!\,(x-x_0)} = \\ & = \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)} - f^{(n)}(x_0) \right).\end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku $n = 1$ widzimy, że iloraz w nawiasie dąży do pochodnej funkcji $f^{(n-1)}$ w punkcie x_0 (czyli n-tej pochodnej funkcji f, która istnieje z założenia), a więc cały nawias dąży do 0. Pokazaliśmy więc (8.12) i całe twierdzenie. □

Uwagi: (i) Zauważmy, że

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)}$$

także jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $\frac{0}{0}$ ($f^{(n-1)}$ z założenia jest różniczkowalna w x_0 więc musi być ciągła w tym punkcie). W powyższym dowodzie nie opłaca się jednak stosować reguły de l'Hospitala jeszcze raz, gdyż do konkluzji potrzebna byłaby jeszcze ciągłość pochodnej $f^{(n)}$ w punkcie x_0, a to trzebaby dodatkowo założyć.

(ii) Różnica $f(x) - \mathbb{P}_n(x)$ to tak zwana reszta we wzorze Taylora. Tą resztę można zapisać różnymi wzorami (przy różnych założeniach na f). Tak jak jest zapisana w powyższym twierdzenieu, czyli

$$e_n(x)(x - x_0), \qquad e_n(x) \to 0 \text{ przy } x \to x_0$$

nazywa się resztą w postaci Peano. Poniżej udowodnimy wzór Taylora z resztą w tak zwanej postaci Lagrange'a. W tej postaci wzór jest szczególnie przydatny.

Twierdzenie 8.16 (Wzór Taylora z resztą w postaci Lagrange'a)**.** *Załóżmy, że f jest różniczkowalna $n+1$ razy w pewnym otoczeniu punktu x_0. Jeżeli x należy do tego otoczenia, to istnieje punkt c_x, pomiędzy x_0 i x, taki, że*

$$f(x) = \mathbb{P}_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Punkt c_x często zapisuje się w postaci $c_x = x_0 + \theta(x - x_0)$, dla pewnego $\theta \in (0, 1)$.

Dowód. Ustalmy x z otoczenia x_0 w którym f jest różniczkowalna $n+1$ razy. Załóżmy, że $x > x_0$, w przeciwnym przypadku dowód jest taki sam. Wprowadźmy dwie pomocnicze funkcje Φ i Ψ na przedziale $[x_0, x]$:

$$\Phi(t) = f(t) + f'(t)(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n$$
$$\Psi(t) = (t - x)^{n+1}.$$

Wtedy (przypomnijmy dowód reguły de l'Hospitala (8.6)) istnieje $c_x \in (x_0, x)$ takie, że

$$\frac{\Phi'(c_x)}{\Psi'(c_x)} = \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{\Psi(x) - \Psi(x_0)}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= f(x), \qquad \Phi(x_0) = \mathbb{P}_n(x),\\
\Phi'(t) &= f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left(f^{(k+1)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!} - f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} \right.\\
&= \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!},\\
\Psi(x) &= 0, \qquad \Psi(x_)) = (x_0 - x)^{n+1},\\
\Psi'(t) &= (n+1)(t - x)^n.
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc:

$$\begin{aligned} f(x) - \mathbb{P}_n(x) &= \Phi(x) - \Phi(x_0) \\ &= \big(\Psi(x) - \Psi(x_0)\big) \frac{\Phi'(c_x)}{\Psi'(c_x)} \\ &= -(x_0 - x)^{n+1} \frac{\frac{f^{(n+1)}(c_x)(x-c_x)^n}{n!}}{(n+1)\,(c_x - x)^n} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

□

Szereg Taylora

Zauważmy, że wielomiany Taylora

$$\mathbb{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

stanowią ciąg sum częściowych szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \tag{8.13}$$

Jest to tak zwany szereg Taylora funkcji f w punkcie x_0. Ze wzoru Taylora wynika, że szereg ten jest zbieżny do $f(x)$ dokładnie wtedy, gdy reszta dąży do 0 (dla ustalonego x i $n \to \infty$). Zobaczymy, że często tak jest. Mamy wtedy wzór

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \tag{8.14}$$

Jest to tak zwane rozwinięcie f w szereg Taylora wokół punktu x_0.
Uwagi: (i) Wzór (8.14) zachodzi bardzo często, ale nie zawsze. Nawet jeżeli funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0, to szereg (8.13) może nie być zbieżny poza x_0. Co więcej, nawet jeżeli ten szereg jest zbieżny, to może się zdarzyć, że jest zbieżny do funkcji innej niż f, czyli nie musi zachodzić (8.14). Taki bardzo nietypowy przykład zobaczymy w przyszłości (15.13).
(ii) W szczególnym przypadku $x_0 = 0$ szereg Taylora nosi też nazwę szeregu Maclaurina.

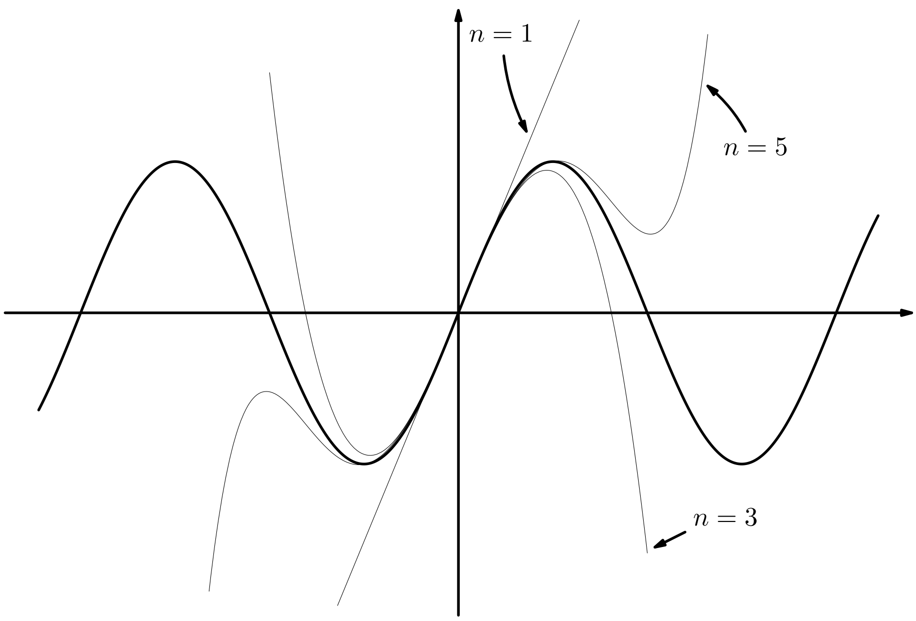
(iii) Jeżeli f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w pewnym otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ punktu x_0, i zachodzi oszacowanie

$$\sup\{f^{(n)}(x),\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ n \in \mathbf{N}\} = M < \infty,$$

to szereg Taylora (8.13) jest zbieżny i zachodzi (8.14). Żeby to zauważyć, skorzystamy z reszty w postaci Lagrange's:

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1} \right| \le M\,\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Zbieżność $\delta^n/n! \to 0$ jest oczywista, nawet szereg o wyrazach $\delta^n/n!$ jest zbieżny, co łatwo sprawdzić z kryterium d'Alemberta.



Rysunek 8.8: Wielomiany Taylora stopnia n funkcji $\sin(x)$.

Przykłady: (a) $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$. Wiemy, że

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n - \text{nieparzyste} \\ 0 & n - \text{parzyste.} \end{cases}$$

Wiemy także, że $|f^{(n)}(x)| \le 1$ dla wszystkich x, n. Równość (8.14) zachodzi więc dla wszystkich x i otrzymujemy rozwinięcie funkcji $\sin(x)$ w szereg Maclaurina

$$\sin(x) = \sum_{\substack{n=0 \\ n\text{-nieparz.}}}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots.$$

(b) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Dla każdego $n \in \mathbf{N}$ mamy $f^{(n)}(x) = e^x$, czyli $f^{(n)}(0) = 1$. Zauważmy, że jeżeli $|x| \leq M$ to $|f^{(n)}(\theta\, x)| \leq e^M$. Dla każdego x takiego, że $|x| \leq M$ zachodzi więc (8.14) i otrzymujemy rozwinięcie e^x w szereg Maclaurina

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

M było dowolne, więc powyższy wzór zachodzi dla wszystkich x

(c) $f(x) = \log(1+x)$, $x_0 = 0$. Obliczmy kolejne pochodne

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = (-1)\,\frac{1}{(1+x)^2},$$
$$f'''(x) = 2\,\frac{1}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = (-1)\,2\cdot 3\,\frac{1}{(1+x)^4}.$$

Mamy więc

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \;\Rightarrow\; f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}\,(n-1)!.$$

Ustalmy $x \in [-1/2, 1]$, zapiszmy resztę w postaci Lagrange'a i oszacujmy

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \leq \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\,\left(\frac{|x|}{1+\theta x}\right)^{n+1}.$$

Zauważmy, że dla $x \geq 0$ cały nawias jest ≤ 1, więc reszta jest $\leq \frac{1}{n+1}$ i dąży do 0. Jeżeli $x < 0$, to

$$\frac{|x|}{1+\theta x} \leq \frac{|x|}{(1-|x|)} \leq 1,$$

więc także w tym przypadku nawias jest ≤ 1 i reszta dąży do 0. Pokazaliśmy więc, dla $x \in [-1/2, 1]$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

Można uzasadnić (szkic poniżej), że powyższy wzór zachodzi na całym przedziale $(-1, 1]$. Zauważmy, że nie może zachodzić dla żadnego innego x, gdyż

poza przedziałem $(-1,1]$ szereg po prawej stronie nie jest zbieżny. Oczywiście lewa strona istnieje dla każdego $x > -1$. Przy okazji, wstawiając $x = 1$ otrzymujemy wzór (5.5).
Szkic: Odpowiednie narzędzie pojawi się w ostatnim rozdziale (twierdzenia 15.6 i 15.9). Prawa strona równości to szereg potęgowy zbieżny na przedziale $(-1,1]$. Określa więc na tym przedziale funkcję, która jest różniczkowalna i której pochodną można policzyć różniczkując szereg wyraz za wyrazem - to wynika z cytowanych twierdzeń. Pochodna prawej strony dana jest więc szeregiem

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n.$$

To jest szereg geometryczny, dla $|x| < 1$ zbieżny do $\frac{1}{1+x}$. Wiemy, że taką samą pochodną ma lewa strona. A więc lewa i prawa strona mają taką samą pochodną, czyli na przedziale $(-1,1)$ obie strony muszą być równe, z dokładnością do stałej. Skoro w 0 mają tą samą wartość, to muszą być równe na całym przedziale.

Przybliżone obliczanie wartości funkcji

Wykorzystamy wzór Taylora do obliczeń przybliżonych

(a) Obliczymy przybliżoną wartość liczby e

$$e = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!} + \frac{e^\theta}{n!} \;\Rightarrow\; e \simeq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!} \quad \text{i błąd } < \frac{3}{n!}.$$

Przy okazji pokażemy, że e nie jest liczbą wymierną. Załóżmy przeciwnie, że e jest liczbą wymierną, i $e = \frac{m}{n}$, dla $m, n \in \mathbf{N}$. Wtedy

$$\begin{aligned} e = \frac{m}{n} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \\ \Rightarrow \left(\frac{m}{n} - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{n!}\right) &\cdot n! = \frac{e^\theta}{n+1}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że lewa strona jest liczbą całkowitą, czyli $\frac{e^\theta}{n+1}$ też musi być całkowita. To jest niemożliwe, bo $1 < e^\theta < 3$, czyli musielibyśmy mieć

$$\frac{1}{n+1} < \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{3}{n+1}.$$

Jedyna możliwość, żeby liczba naturalna $m = e^\theta/(n+1)$ spełniała powyższą nierówność, to $n = 1$ i $m = 1$, czyli $e = 1$. To jest sprzeczność, bo $e > 2$.

(b) Obliczymy przybliżoną wartość $\sqrt[3]{9}$. Niech $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Zauważmy, że $f(9) = f(8+1)$, a $f(8) = 2$. Policzmy kilka pochodnych

$$f'(x) = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}, \quad f''(x) = (-1)\,\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\,x^{-\frac{5}{3}},$$
$$f'''(x) = \frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\,\frac{5}{3}\,x^{-\frac{8}{3}}, \quad f^{(4)}(x) = (-1)\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\,\frac{5}{3}\,\frac{8}{3}\,x^{-\frac{11}{3}}.$$

Łatwo się domyśleć, że

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\,\frac{5}{3}\dots\frac{3n-4}{3}\,x^{-\frac{3n-1}{3}}.$$

W takim razie

$$f^{(n)}(8) = (-1)^{n+1}\frac{2\cdot 5\dots(3n-4)}{3^n}\,8^{-\frac{3n-1}{3}} = (-1)^{n+1}\frac{2\cdot 5\dots(3n-4)}{3^n\,8^n}\,2.$$

Wstawiając to do wzoru Taylora, z $n = 3$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{9} = f(8+1) &= f(8) + f'(8) + \frac{f''(8)}{2} + R_3\\ &= 2 + \frac{1}{12} - \frac{2}{2\cdot 3\cdot 3\cdot 32} + R_3\\ &= 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} + R_3.\end{aligned}$$

Możemy oszacować błąd przybliżenia

$$\begin{aligned}|R_3| &\le \frac{2\cdot 5}{3!3\cdot 3\cdot 3}\,\frac{1}{(8+\theta)^{\frac{8}{3}}} < \frac{10}{162}\,\frac{1}{8^{\frac{8}{3}}} = \frac{10}{162\cdot 256}\\ &= \frac{10}{41472} < \frac{10}{40000} = \frac{1}{4000} = 0,00025.\end{aligned}$$

Rozdział 9

Całki

Funkcja pierwotna

Definicja 9.1. *Funkcję F nazywamy funkcją pierwotną funkcji f, jeżeli F jest różniczkowalna i $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in D_f$.*

Uwagi: (i) Funkcja f może nie mieć funkcji pierwotnej. Jeżeli ma funkcję pierwotną, to ma ich nieskończenie wiele:

$$F'(x) = f(x) \;\Rightarrow\; (F(x) + c)' = F'(x) = f(x).$$

Jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to $F+c$ także jest funkcją pierwotną f, dla dowolnej stałej c.

(ii) Jeżeli F i G są funkcjami pierwotnymi tej samej funkcji f, to $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$, dla każdego $x \in D_f$. Na każdym przedziale zawartym w dziedzinie funkcji f funkcje pierwotne F i G różnią się więc o jakąś stałą. Stała ta może być różna na różnych przedziałach.

Całka nieoznaczona

Definicja 9.2. *Jeżeli funkcja f ma funkcję pierwotną, to mówimy, że jest całkowalna. Dowolną funkcję pierwotną funkcji całkowalnej f nazywamy jej całką nieoznaczoną, i oznaczamy*

$$\int f(x)\,dx.$$

Określenie „całka nieoznaczona” odnosi się więc do całej rodziny funkcji, które na poszczególnych przedziałach D_f różnią się o stałą. Często podkreślamy to, dodając do otrzymanego wzoru na funkcję pierwotną stałą c. W oznaczeniu całki $\int \ldots dx$ stanowi kompletny symbol, który zawsze powinien występować razem. dx podkreśla zmienną, względem której całka jest funkcją pierwotną. W przypadku, jeżeli funkcja „podcałkowa" zawiera ułamek, to człon dx często dopisujemy do licznika, na przykład

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x}.$$

Przykłady:

$$
\begin{aligned}
&(a) \qquad && \int 0\,dx = c,\\
&(b) \qquad && \int a\,dx = ax + c, \quad \text{dla dowolnej stałej } a,\\
&(c) \qquad && \int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}\,x^{a+1} + c \quad a \neq -1,\ x > 0,\\
&(d) \qquad && \int \cos x\,dx = \sin x + c,\\
&(e) \qquad && \int \sin x\,dx = -\cos x + c,\\
&(f) \qquad && \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c,\\
& && \text{(stała } c \text{ może być różna na różnych przedziałach)},\\
&(g) \qquad && \int \frac{dx}{x} = \log|x| + c, \quad \text{(podobna uwaga odnośnie stałej)},\\
&(h) \qquad && \int e^x\,dx = e^x + c.
\end{aligned}
$$

Dowód każdego z powyższych wzorów sprowadza się do obliczenia pochodnej prawej strony, i porównania z funkcją podcałkową. Zwróćmy uwagę na stałe c dopisane po prawej stronie. Nie są one bardzo ważne (wiadomo, że dodanie stałej nie zmienia pochodnej), ale dobrze jest o nich pamiętać. Podkreślmy, że jeżeli dziedzina funkcji podcałkowej składa się z więcej niż jednego przedziału, to zapis $+c$ we wzorze na całkę nieoznaczoną rozumiemy jako stałą, która może być różna na różnych przedziałach.

Ze wzorów na pochodne wynikają następujące wzory na całki nieoznaczone:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad && \int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx,\\
&\text{(b)} \qquad && \int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \quad a \text{ - dowolna stała}
\end{aligned}
$$

(c) $$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx,$$

(tak zwany wzór na całkowanie przez części)

(d) $$\int (g\circ f)(x)f'(x)\,dx = \int g(y)\,dy \quad \text{przy czym} \quad y = f(x),$$

(tak zwany wzór na całkowanie przez podstawienie).

Uwaga: Analizując dokładniej regułę Leibniza i regułę łańcuchową możemy uściślić powyższe wzory. W przypadku (c) jeżeli jedna z całek istnieje, to istnieje też druga i zachodzi równość. W przypadku (d) jeżeli istnieje całka po prawej stronie, i jeżeli f jest różniczkowalna, to istnieje też całka po lewej stronie, i zachodzi (d). Jeżeli z kolei istnieje całka po lewej stronie, f jest odwracalna i $f' \neq 0$ (czyli odwrotna też jest różniczkowalna) to istnieje też całka po prawej stronie, i zachodzi równość. Ta ostatnia uwaga jest ważna, może się zdarzyć, że całka po lewej stronie istnieje, a po prawej nie. Warto więc być świadomym założeń.

Przykłady: (a) Całka z wielomianu jest wielomianem, stopnia o jeden większego:

$$\int (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)\,dx =$$
$$= \frac{a_n}{n+1}\,x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}\,x^n + \dots + \frac{a_1}{2}\,x^2 + a_0\,x + c.$$

(b) Skorzystamy ze wzoru na całkowanie przez części:

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= \int (x)'\log x\,dx\\ &= x\log x - \int x\,(\log x)'\,dx\\ &= x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= x\log x - \int 1\cdot dx\\ &= x\log x - x + c.\end{aligned}$$

Sprawdzamy: $(x\,\log x - x + c)' = \log x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \log x$.

(c) Skorzystamy ze wzoru na całkowanie przez podstawienie:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\,dx \quad \text{niech } f(x) = 1 + x^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{f(x)}\, f'(x)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\, dy \qquad f(x) = y \\
&= \frac{1}{2}\log|y| + c \\
&= \frac{1}{2}\log|1+x^2| + c \\
&= \log\sqrt{1+x^2} + c.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$. Dla $x > 0$ wzór ten już znamy, a dla $x < 0$ mamy $|x| = -x$, więc

$$
(\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-x)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.
$$

W tym przykładzie $1 + x^2 > 0$, więc wartość bezwzględna nic nie zmienia. Sprawdźmy naszą całkę: $(\log\sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2\,x = \frac{x}{1+x^2}$, a więc zgadza się.

(d) Jeszcze raz wzór na całkowanie przez podstawienie

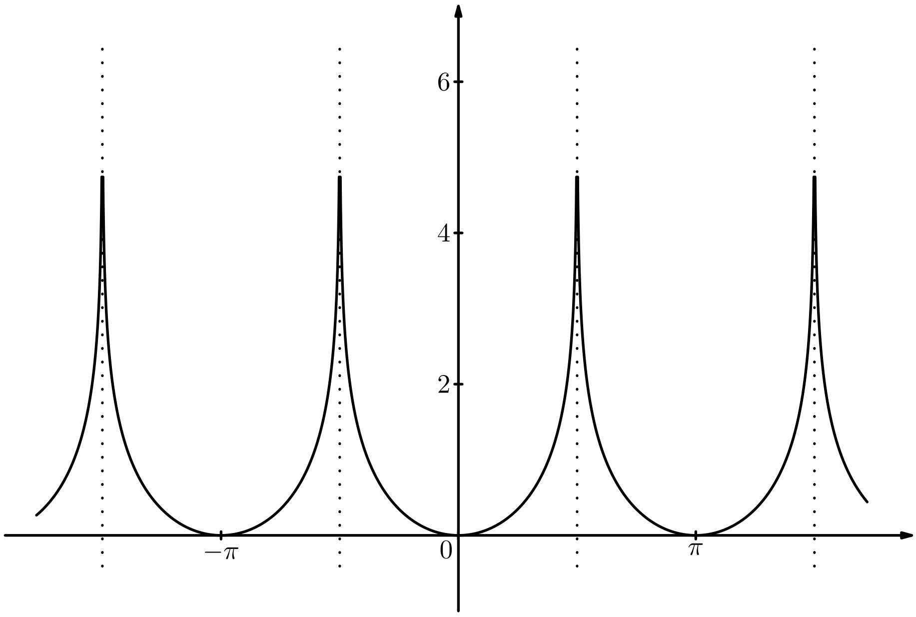
$$
\begin{aligned}
\int \tan x\, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \\
&= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx \\
&= -\int \frac{1}{f(x)}\, f'(x)\, dx \qquad f(x) = \cos x \\
&= -\int \frac{1}{y}\, dy \qquad y = \cos x \\
&= -\log|y| + c \\
&= -\log|\cos x| + c.
\end{aligned}
$$

(e) Następującą całkę otrzymujemy natychmiast, jeżeli pamiętamy wzory na różniczkowanie funkcji cyklometrycznych:

$$
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x) + c, \qquad |x| < 1.
$$

Jeżeli nie pamiętamy odpowiednich wzorów to możemy zastosować wzór na całkowanie przez podstawienie:

$$
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-f(t)^2}}\, f'(t)\, dt, \quad x = f(t)
$$



Rysunek 9.1: Wykres funkcji $f(x) = -\log|\cos x|$.

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\,\cos(t)\,dt, \quad f(t)=\sin(t), \quad t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\
&= \int \frac{1}{\cos(t)}\,\cos(t)\,dt\\
&= \int 1\,dt\\
&= t+c
\end{aligned}
$$

Skorzystaliśmy z tego, że dla $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mamy $\cos(t) > 0$ a więc $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$. Skoro $x = \sin(t)$, to $t = \arcsin(x)$, i otrzymujemy ten sam wzór.

(f) Całkę z funkcji $\sin^2(x)$ policzyny na dwa sposoby. Możemy skorzystać z tożsamości trygonometrycznej

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \;\Rightarrow\; \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Mamy wtedy

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int (1-\cos(2x))\,dx\\
&= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right) + c
\end{aligned}
$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c.$$

Możemy też skorzystać ze wzoru na całkowanie przez części. Całkując przez części nie otrzymamy całki łatwiejszej do policzenia, ale otrzymamy równanie, które następnie rozwiążemy.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\,dx &= \int \sin(x)\cdot\sin(x)\,dx \\
&= \int \sin(x)\cdot(-\cos(x))'\,dx \\
&= -\sin(x)\cos(x) + \int (\sin(x))'\cos(x)\,dx \\
&= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos(x)\cdot\cos(x)\,dx \\
&= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\,dx \\
&= -\sin(x)\cos(x) + \int (1-\sin^2(x))\,dx \\
&= -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx.
\end{aligned}$$

To, co otrzymaliśmy jest równaniem na naszą szukaną całkę. Przenosząc całkę z prawej strony na lewą i dzieląc przez 2 otrzymujemy

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{-\sin(x)\cos(x)+x}{2}.$$

Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcje wymierne to funkcje postaci $f = \frac{P}{Q}$, gdzie P i Q są wielomianami. Ułamki proste to szczególny rodzaj funkcji wymiernych, postaci

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{9.1}$$

gdzie A, B, C, a, p, q to dowolne stałe, a wyrażenie kwadratowe x^2+px+q nie ma pierwiastka, czyli $p^2 - 4q < 0$. Okazuje się, że każdą funkcję wymierną można przedstawić jako sumę ułamków prostych plus, ewentualnie, wielomian. Z drugiej strony istnieją wzory na całki nieoznaczone ułamków prostych. W ten sposób otrzymujemy procedurę na obliczanie całek nieoznaczonych funkcji wymiernych.

Twierdzenie 9.3. *Każdą funkcję wymierną można przedstawić jako sumę wielomianu i ułamków prostych.*

Procedura rozkładu: Zamiast dowodu naszkicujemy procedurę rozkładu funkcji. Szkic ten można uściślić i zrobić z niego dowód, ale my pozostaniemy przy szkicu. Mając konkretną funkcję $f = \frac{P}{Q}$ najpierw dzielimy wielomian P przez Q „z resztą", to znaczy znajdujemy wielomiany W (iloraz) oraz R (reszta) takie, że

$$P(x) = W(x) \cdot Q(x) + R(x), \;\Rightarrow\; \frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

przy czym stopień reszty R jest mniejszy od stopnia Q. Robimy to używając zwykłej procedury „długiego dzielenia", czy „pisemnego dzielenia", dokładnie tak samo, jak dzieląc liczby naturalne.

Przykłady: (a) $\frac{x^3-2x^2-1}{x^2-1} = (x-2) + \frac{x-3}{x^2-1}$

(b) $\frac{x^4-2x^3-35}{x^3-2x^2+3x-6} = x + \frac{-3x^2+6x-35}{x^3-2x^2+3x-6}$.

Po wydzieleniu części wielomianowej pozostaje nam ułamek $\frac{R}{Q}$, w którym licznik ma stopień niższy od mianownika. W następnym kroku przeprowadzamy faktoryzację mianownika, czyli rozkład mianownika na czynniki nierozkładalne. Czynnikami nierozkładalnymi są wielomiany liniowe $(x-a)$ oraz kwadratowe (x^2+px+q), nie posiadające rzeczywistych pierwiastków, czyli takie, dla których $p^2-4q<0$. Przypomnijmy, że w przypadku wielomianów o współczynnikach zespolonych czynnikami nierozkładalnymi są jedynie wielomiany liniowe. Każdy wielomian stopnia wyższego niż 1 można dalej rozkładać na czynniki. W przypadku wielomianów o współczynnikach rzeczywistych mogą istnieć czynniki nierozkładalne (czyli, zgodnie z twierdzeniem Bezout, nie posiadające pierwiastków) stopnia wyższego niż 1, ale okazuje się, że takie czynniki nierozkładalne nie mogą mieć stopnia wyższego niż 2. Przeprowadzamy więc rozkład mianownika Q na czynniki nierozkładalne, i w efekcie przedstawiamy Q jako iloczyn wyrażeń postaci

$$(x-a)^n \quad \text{oraz} \quad (x^2+px+q)^n. \tag{9.2}$$

Rozkład mianownika na czynniki nierozkładalne to, w praktyce, główny problem w całkowaniu funkcji wymiernych. W zadaniach które będziemy robić albo faktoryzacja będzie bardziej lub mniej oczywista, albo będzie jawnie podana. W przykładach rozpatrywanych jako ilustracja procedury faktoryzacja jest prosta: $x^2-1=(x-1)(x+1)$ oraz $x^3-2x^2+3x-6=(x-2)(x^2+3)$. Jeżeli wielomian ma współczynniki całkowite, i współczynnik przy wyrazie o najwyższej potędze równy 1, to w pierwszej kolejności szukamy pierwiastków spośród dzielników wyrazu wolnego. Mając pierwiastek wydzielamy odpowiedni czynnik liniowy, i otrzymujemy wielomian niższego stopnia, który „obrabiamy” do skutku. Jeżeli wielomian nie ma pierwiastków musimy sobie radzić inaczej. Na przykład rozważmy wielomian $Q(x) = x^4 + 1$. Wiemy, że rozkłada się na iloczyn dwóch wielomianów kwadratowych, przy czym możemy tak dobrać stałe, aby ich wyrazy wiodące miały współczynniki 1. Piszemy więc najogólniejszą postać takiego rozkładu, a następnie mnożymy czynniki:

$$x^4+1 = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d) = x^4+(a+c)x^3+(b+d+ac)x^2+(ad+bc)x+bd.$$

Porównując współczynniki po obu stronach otrzymujemy układ równań, który będzie można rozwiązać. W naszym przypadku łatwo znajdujemy rozwiązanie:

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Mając rozkład mianownika na czynniki nierozkładalne postaci (9.2) możemy napisać prototyp rozkładu funkcji na ułamki proste. W pierwszym kroku wypisujemy wszystkie ułamki proste postaci (9.1) które znajdą się w rozkładzie, a w następnym kroku ustalimy stałe w licznikach. Dla każdego czynnika postaci $(x - a)^n$ w rozkładzie mianownika wypisujemy n ułamków prostych

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n},$$

natomiast dla każdego czynnika $(x^2 + px + q)^n$ w rozkładzie mianownika wypisujemy n ułamków

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

Zauważmy, że wypisując powyższy rozkład wypisaliśmy łącznie dokładnie tyle nieoznaczonych (na razie) stałych A_i, B_i, C_i jaki jest stopień mianownika. Wypiszmy nasz rozkład dla rozważanych przykładów:

(a):

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$$

(b):

$$\frac{-3x^2+6x-35}{x^3-2x^2+3x-6} = \frac{-3x^2+6x-35}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+3}.$$

Na ostatnim etapie rozkładu wyznaczamy stałe w licznikach ułamków prostych. W tym celu sumę wszystkich wymaganych ułamków prostych sprowadzamy do wspólnego mianownika, którym jest wielomian Q. W liczniku otrzymamy wielomian stopnia niższego niż mianownik Q (gdyż wszystkie ułamki proste mają liczniki stopnia niższego niż mianowniki). Wielomian ten musi być identyczny z wielomianem R, który jest licznikiem rozkładanej funkcji wymiernej. Oba wielomiany muszą więc mieć te same współczynniki. Daje to dokładnie n równań, gdyż wielomiany stopnia $n-1$ mają n współczynników. Mamy więc n równań liniowych, i n niewiadomych, i okazuje się, że układ ten zawsze można rozwiązać. Nie będziemy tego dowodzić, ale zobaczmy jak to działa na przykładach.

(a):

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{(x-1)(x+1)},$$

czyli $A+B=1$ oraz $A-B=-3$. Otrzymujemy $A=-1$ i $B=2$, a więc w końcu

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x+1}.$$

(b):

$$\begin{aligned}\frac{-3x^2+6x-35}{x^3-2x^2+3x-6} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+3}\\ &= \frac{A(x^2+3) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+3)}\\ &= \frac{(A+B)x^2 + (-2B+C)x + (3A-2C)}{(x-2)(x^2+3)},\end{aligned}$$

czyli $A+B=-3$, $-2B+C=6$ oraz $3A-2C=-35$. Rozwiązując ten układ otrzymujemy $A=-5$, $B=2$ i $C=10$, i w końcu

$$\frac{-3x^2+6x-35}{x^3-2x^2+3x-6} = \frac{-5}{x-2} + \frac{2x+10}{x^2+3}.$$

Wyznaczając stałe w rozkładzie na ułamki proste zakończyliśmy procedurę rozkładu. Jedyny punkt który wymaga uściślenia, żeby otrzymać dowód Twierdzenia 9.3 to fakt, że stałe zawsze da się wyznaczyć, innymi słowy, że powstały układ n równań liniowych z n niewiadomymi jest taki, że zawsze ma rozwiązanie. Zostawimy ten punkt jako zadanie dla zainteresowanego czytelnika.

Całkowanie ułamków prostych

Pierwszy rodzaj ułamków prostych daje się łatwo całkować. Mamy następujące wzory:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + c,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c, \quad n > 1.$$

Ułamek prosty drugiego rodzaju rozłożymy na dwa inne:

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} = \frac{B}{2} \cdot \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \frac{D}{(x^2+px+q)^n}, \quad D = C - \frac{1}{2} B\, p. \tag{9.3}$$

Pierwszy z ułamków po prawej stronie całkujemy przez podstawienie $t = x^2+px+q$,

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\, dx = \int \frac{dt}{t^n} = \left\{ \begin{array}{cl} \log(x^2+px+q)+c & : n = 1, \\ \dfrac{-1}{(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + c & : n > 1. \end{array} \right.$$

Zauważmy jeszcze, że ponieważ wyrażenie x^2+px+q nie ma pierwiastków rzeczywistych, to jest zawsze dodatnie, więc wartość bezwzględna pod logarytmem nie jest potrzebna. Pozostał jeszcze jeden rodzaj ułamków do scałkowania, to znaczy drugi ułamek po prawej stronie (9.3). Wykonamy proste przekształcenie i podstawienie:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left((x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})\right)^n} = \frac{\sqrt{a}}{a^n} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n},$$

gdzie

$$t = \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{a}}, \quad a = q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

Gdy $n = 1$ mamy

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + c,$$

natomiast dla $n > 1$ wyprowadzimy wzór rekurencyjny. Niech $k > 0$, wtedy, całkując przez części mamy

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} &= \int \frac{1}{(t^2+1)^k} \cdot t'\, dt \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^k} - \int (-k)\, \frac{2t}{(t^2+1)^{k+1}} \cdot t\, dt \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2\,k \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{k+1}}\, dt \\
&= \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2\,k \int \left(\frac{t^2+1}{(t^2+1)^{k+1}} - \frac{1}{(t^2+1)^{k+1}} \right) dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2\,k \int \frac{dt}{(t^2+1)^k} - 2\,k \int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}}.$$

Mamy więc

$$2\,k \int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + (2\,k-1) \int \frac{dt}{(t^2+1)^k},$$

czyli, dla $n > 1$

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \frac{t}{2\,(n-1)\,(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}}.$$

Możemy teraz obliczyć całki w obu rozważanych przez nas przykładach.

Przykłady: (a):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3-2x^2-1}{x^2-1}\,dx &= \int \left((x-2) + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + 2\log|x+1| - \log|x-1| + c. \end{aligned}$$

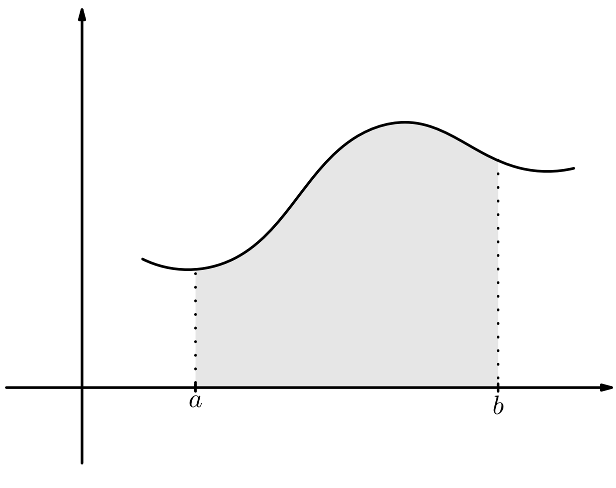
(b):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4-2x^3-35}{x^3-2x^2+3x-6}\,dx &= \int \left(x - \frac{5}{x-2} + \frac{2x+10}{x^2+3}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 5\log|x-2| + \int \frac{2x}{x^2+3}\,dx + \frac{10}{3} \int \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2+1} \\ &= \frac{x^2}{2} - 5\log|x-2| + \log(x^2+3) + \frac{10}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\,dx}{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2+1} \\ &= \frac{x^2}{2} - 5\log|x-2| + \log(x^2+3) + \frac{10}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c. \end{aligned}$$

Rozdział 10

Całka oznaczona

Całka oznaczona, intuicyjnie, mierzy „wielkość funkcji”, w podobny sposób jak pole mierzy wielkość obszaru na płaszczyźnie. Niech będzie dana funkcja f, nieujemna na odcinku $[a, b]$ i rozważmy obszar pod wykresem f. Będziemy chcieli jakoś policzyć pole tego obszaru. Będziemy korzystali z własności pola które są intuicyjnie jasne, na przykład, że większy obszar ma większe pole. Niech $f(x) = x$ i rozważamy obszar nad odcinkiem $[0, a]$. Obszar ten jest trójkątem o wysokości i podstawie równych a. Pole wynosi więc $P = \frac{1}{2}a^2$. Rozważmy teraz obszar pod wykresem $f(x) = x^2$, nad tym samym odcinkiem $[0, a]$. Zbudujemy wielokąt wpisany w ten obszar, oraz wielokąt opisany na tym obszarze.



Rysunek 10.1: Obszar pod wykresem funkcji.

Pole obszaru musi być liczbą pomiędzy polami wielokąta mniejszego i większego. Niech $n \in \mathbf{N}$ i podzielmy odcinek $[0, a]$ na n odcinków równej długości:

$$[0,a] = \Big[0, \frac{a}{n}\Big] \cup \Big[\frac{a}{n}, 2\,\frac{a}{n}\Big] \cup \cdots \cup \Big[(n-2)\,\frac{a}{n}, (n-1)\,\frac{a}{n}\Big] \cup \Big[(n-1)\frac{a}{n}, a\Big].$$

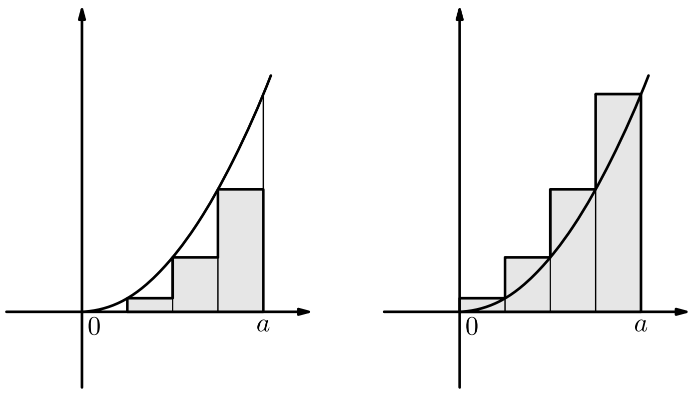
Nad każdym z odcinków podziału $[k\,\frac{a}{n}, (k+1)\,\frac{a}{n}]$ zbudujemy dwa prostokąty, mniejszy o wysokości $f(\frac{k\,a}{n})$ oraz większy prostokąt o wysokości $f(\frac{(k+1)\,a}{n})$. Funkcja f jest rosnąca, więc istotnie drugi prostokąt jest większy niż pierwszy. Niech L_n będzie łącznym polem wszystkich mniejszych prostokątów, a U_n łącznym polem wszystkich większych.

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\,a}{n}\right)\frac{a}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k\,a}{n}\right)^2\frac{a}{n} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k\,a}{n}\right)^2\frac{a}{n} = \left(\frac{a}{n}\right)^3\sum_{k=1}^{n-1}k^2,$$

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{(k+1)\,a}{n}\right)\frac{a}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(k+1)\,a}{n}\right)^2\frac{a}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k\,a}{n}\right)^2\frac{a}{n} = \left(\frac{a}{n}\right)^3\sum_{k=1}^{n}k^2.$$

Każdy z mniejszych prostokątów zawiera się w obszarze pod wykresem, a więc także wielokąt będący ich sumą, którego pole jest równe L_n. Z kolei suma wszystkich większych prostokątów tworzy wielokąt o polu U_n, zawierający obszar pod wykresem. Jeżeli więc oznaczymy przez P pole obszaru pod wykresem, to dla każdego $n \in \mathbf{N}$ musimy mieć

$$L_n \leq P \leq U_n.$$



Rysunek 10.2: Mniejszy wielokąt i większy wielokąt.

Zauważmy, że L_n i U_n mają taką samą granicę gdy $n \to \infty$. Skorzystamy ze wzoru

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

który można udowodnić indukcyjnie. Mamy więc

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2\\
&= \frac{a^3}{n^3}\,\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}\\
&= a^3\,\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} \xrightarrow{n\to\infty} a^3\,\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Podobnie,

$$U_n = L_n + \frac{a^3}{n^3}\cdot n^2 = L_n + \frac{a^3}{n} \xrightarrow{n\to\infty} a^3\,\frac{1}{3}.$$

Widzimy więc, że pole obszaru pod wykresem musi być równe $P = \frac{a^3}{3}$.

Sumy dolne i sumy górne

Niech f będzie funkcją ograniczoną na przedziale $[a,b]$, i oznaczmy przez m i M infimum i supremum wartości f, czyli $m \le f(x) \le M$ dla $x \in [a,b]$. Niech P będzie dowolnym podziałem przedziału $[a,b]$ na pododcinki, czyli $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ (podział odcinka na pododcinki utożsamiamy ze zbiorem punktów tego podziału),

$$[a,b] = [a,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-2},x_{n-1}] \cup [x_{n-1},b].$$

Na każdym małym odcinku $[x_i,x_{i+1}]$, dla $i = 0,1,\ldots,n-1$, wprowadźmy oznaczenia

$$\begin{aligned}
m_i &= \inf\{f(x);\ x \in [x_i,x_{i+1}]\},\\
M_i &= \sup\{f(x);\ x \in [x_i,x_{i+1}]\}.
\end{aligned}$$

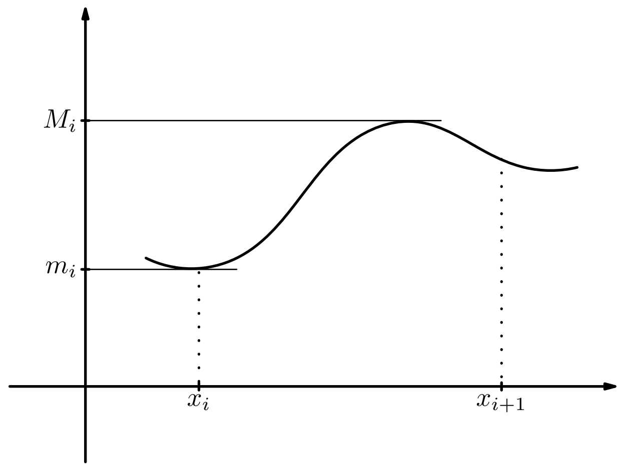
Mamy więc $m \le m_i \le M_i \le M$.

Mając dany podział P napiszmy następujące sumy

$$L(P,f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\,(x_{i+1}-x_i), \quad U(P,f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,(x_{i+1}-x_i).$$

$L(P,f)$ nazywamy sumą dolną, a $U(P,f)$ sumą górną podziału P. Zauważmy, że sumy te zależą od funkcji f, przedziału $[a,b]$, oraz podziału P tego przedziału. Zauważmy też że, niezależnie od podziału P, mamy

$$m\cdot(b-a) \le L(P,f) \le U(P,f) \le M\cdot(b-a). \tag{10.1}$$



Rysunek 10.3: m_i oraz M_i.

Dla ustalonej funkcji f i przedziału $[a, b]$ zbiory wszystkich możliwych sum górnych i sum dolnych są więc ograniczone. Porównując to z poprzednim przykładem w którym obliczaliśmy pole pod wykresem widzimy, że jeżeli f jest nieujemna, to pole pod wykresem jest liczbą większą lub równą od każdej sumy dolnej i mniejszą lub równą od każdej sumy górnej. Całkę dolną z funkcji f na przedziale $[a, b]$ definiujemy jako

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{L(P, f);\ P \text{ - podział } [a, b]\},$$

a całkę górną jako

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf\{U(P, f);\ P \text{ - podział } [a, b]\}.$$

Całki górna i dolna nie zależą więc od podziału, a jedynie od funkcji f i przedziału $[a, b]$.

Definicja 10.1. *Jeżeli całka dolna i całka górna funkcji f są równe, to mówimy, że funkcja jest całkowalna na $[a, b]$ w sensie Riemanna, a wspólną wartość całki górnej i dolnej nazywamy całką Riemanna f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Uwagi: (i) Zauważmy, (10.1), że dla dowolnego podziału P mamy

$$L(P, f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\,(x_{i+1} - x_i) \geq m \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = m(b - a),$$

$$U(P,f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,(x_{i+1} - x_i) \leq M \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = M(b-a).$$

Całka, jeżeli istnieje, spełnia więc

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a). \tag{10.2}$$

(ii) Przypomnijmy, że definicja, którą podaliśmy wymaga, aby funkcja f była ograniczona, oraz aby $a < b$. Później wprowadzimy odpowiednie oznaczenia, aby granice całkowania a i b mogły być dowolnymi liczbami, oraz opiszemy w jaki sposób można, czasami, całkować funkcje nieograniczone. Takie całki z funkcji nieograniczonych będziemy nazywać całkami niewłaściwymi.

(iii) Funkcja może nie być całkowalna. Niech f będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & : x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Wtedy, dla każdego podziału P i dla każdego i mamy $m_i = 0$ i $M_i = 1$, a więc zawsze $L(P,f) = 0,\ U(P,f) = (b-a)$, czyli

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0, \quad \text{i} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = b - a.$$

(iv) Całka Riemanna jest ściśle związana z pojęciem pola. Jeżeli f jest nieujemna, to całka jest równa polu pod wykresem, a jeżeli f jest niedodatnia, to całka jest równa polu nad wykresem, pod osią OX, ze znakiem minus.

(v) Całkę Riemanna będziemy też nazywać całką oznaczoną. W literaturze możemy spotkać też inne konstrukcje całki oznaczonej, ale my zajmujemy się tylko powyższą konstrukcją. Naszym celem obecnie będzie udowodnienie, że funkcje ciągłe są całkowalne w sensie Riemanna. W tym celu udowodnimy kilka prostych twierdzeń.

Twierdzenie 10.2. *Całka dolna jest mniejsza lub równa całce górnej:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Dowód. Mamy pokazać, że każda suma dolna jest mniejsza lub równa od każdej sumy górnej. Łatwo zauważyć, że suma dolna jest mniejsza lub równa od sumy górnej opartej na tym samym podziale (10.1). Niech więc $L(P_1, f)$ będzie sumą dolną związaną z podziałem P_1, a $U(P_2, f)$ będzie sumą górną związaną z podziałem P_2. Niech P^* będzie wspólnym rozdrobnieniem podziałów P_1 i P_2, czyli

$$P^* = P_1 \cup P_2.$$

Oznaczmy punkty poszczególnych podziałów następująco:$P_1 = \{x_1, \dots, x_n\}$, $P_2 = \{y_1, \dots, y_k\}$ oraz $P^* = \{z_1, \dots, z_m\}$. Z definicji$P^*$ wynika, że każdy punkt x_i i każdy punkt y_j są także elementami P^*. Zauważmy, że w związku z tym każdy przedział $[x_i, x_{i+1}]$ podziału P_1 i każdy przedział $[y_j, y_{j+1}]$ podziału P_2 są sumą pewnych przedziałów podziału P^*. Wynika stąd, że

$$L(P_1, f) \leq L(P^*, f) \leq U(P^*, f) \leq U(P_2, f). \tag{10.3}$$

Dwie skrajne nierówności wynikają z tego, że P^* jest rozdrobnieniem P_1 i P_2, natomiast nierówność środkowa to obserwacja którą zrobiliśmy wcześniej, że suma dolna jest mniejsza lub równa sumie górnej, zbudowanej na tym samym podziale (10.1). □

Mamy następujący wniosek:

Wniosek 10.3. *Jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje podział P taki, że*

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon, \tag{10.4}$$

to funkcja f jest całkowalna, oraz dla takiego podziału P zachodzą oszacowania

$$U(P, f) - \epsilon < \int_a^b f(x)\,dx < L(P, f) + \epsilon. \tag{10.5}$$

Dowód. Z definicji całek dolnej i górnej mamy, dla dowolnego podziału P

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq U(P, f) - L(P, f).$$

Jeżeli więc spełniony jest warunek (10.4), to

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \epsilon.$$

Skoro jest to spełnione dla każdego $\epsilon > 0$, i skoro różnica całki górnej i dolnej jest nieujemna, to musi być równa zeru. Funkcja f jest więc całkowalna. Z drugiej strony

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq L(P, f) > U(P, f) - \epsilon,$$

i podobnie dla drugiej nierówności (10.5). □

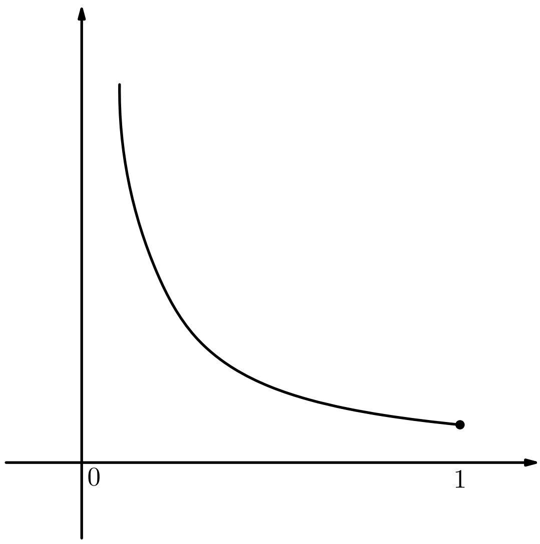
Mamy następujące zasadnicze twierdzenie:

Twierdzenie 10.4. *Jeżeli funkcja f jest ciągła na $[a, b]$, to jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$.*

Dowód. Pokażemy najpierw, że f spełnia następujący warunek:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x, y \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{10.6}$$

Zauważmy, że powyższy warunek jest silniejszy niż ciągłość funkcji w każdym punkcie. W przypadku ciągłości w każdym punkcie stałą δ dobieramy do zadanego ϵ i dla ustalonego x. Natomiast w powyższym warunku (10.6) stała δ zależy tylko od zadanego ϵ, i jest dobrana wspólnie dla wszystkich punktów x dziedziny. Funkcję spełniającą warunek (10.6) nazywamy więc czasem „jednostajnie ciągłą". Teraz pokażemy więc, że funkcja ciągła na przedziale $[a, b]$ (zawierającym końce) spełnia (10.6), a więc jest jednostajnie ciągła.



Rysunek 10.4: Funkcja ciągła, ale nie jednostajnie ciągła.

Żeby podkreślić różnicę pomiędzy ciągłością a jednostajną ciągłością rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$ na przedziale $(0, 1]$. Wiemy, że funkcja ta jest ciągła na przedziale $(0, 1]$, ale nie jest jednostajnie ciągła, czyli nie spełnia warunku (10.6). Łatwo to zauważyć. Weźmy dowolne $\delta > 0$, dowolne $n \in \mathbf{N}$, $n > 4$ i niech $x = \frac{\delta}{n}$ oraz $y = x + \frac{\delta}{2}$. Wtedy $|x - y| = \delta/2 < \delta$, ale

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{n}{\delta} - \frac{1}{\frac{\delta}{n} + \frac{\delta}{2}} = \frac{n}{\delta}\left(1 - \frac{2}{n+2}\right) > \frac{n}{2\delta},$$

gdyż dla $n > 4$ mamy $\frac{2}{n+2} < \frac{1}{2}$. Widzimy więc, że niezależnie od δ różnica $|f(x) - f(y)|$ może być dowolnie duża, pomimo, że $|x - y| < \delta$. Widzimy więc, że funkcja ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny może nie być jednostajnie ciągła. Wróćmy do naszej sytuacji, czyli niech funkcja f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Dowód przeprowadzimy nie wprost, czyli załóżmy, że f nie jest jednostajnie ciągła, to znaczy warunek (10.6) nie jest spełniony, czyli

$$\exists\ \epsilon_0 > 0 \quad \forall\ \delta > 0 \quad \exists\ x, y \in [a, b],\ |x - y| < \delta\ \wedge\ |f(x) - f(y)| \geq \epsilon_0.$$

Będziemy stosowali powyższy warunek dla $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Dla każdego n otrzymujemy więc parę liczb $x_n, y_n \in [a, b]$ spełniających $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, oraz $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$.Wiemy, że skoro ciąg $\{x_n\} \subset [a, b]$ to można wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}$ zbieżny do pewnego $x_\infty \in [a, b]$. Zauważmy, że wtedy podciąg $\{y_{n_k}\}$ też musi być zbieżny do x_∞:

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}.$$

W takim razie, z ciągłości f mamy $f(x_{n_k}) \to f(x_\infty)$ oraz $f(y_{n_k}) \to f(x_\infty)$. W takim razie $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0$, a więc mamy sprzeczność z warunkiem $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon_0 > 0$. Tym samym udowodniliśmy, że f spełnia (10.6).

Całkowalność będziemy chcieli pokazać korzystając z Wniosku 10.3. Niech więc $\epsilon > 0$ będzie dowolne, i niech $\delta > 0$ będzie liczbą daną przez (10.6), ale dla $\epsilon' = \frac{\epsilon}{b-a}$. Niech $n \in \mathbf{N}$ będzie wystarczająco duże, tak, aby $n > \frac{b-a}{\delta}$. Podzielmy przedział $[a, b]$ na n równych odcinków punktami podziału

$$P = \left\{ x_i = a + (b - a)\,\frac{i}{n};\ i = 0, 1, \ldots, n \right\}.$$

Zauważmy, że długość każdego odcinka podziału jest mniejsza niż δ, $\frac{(b-a)}{n} < \delta$, gdyż $n > \frac{(b-a)}{\delta}$. Jeżeli więc $x, y \in [x_i, x_{i+1}]$, to $|x - y| < \delta$, gdyż i x i y należą do tego samego przedzialika podziału. Skoro tak, to $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$, a więc jej kresy M_i oraz m_i są przyjęte w jakichś punktach x i y, a więc kresy też muszą spełniać $M_i - m_i < \epsilon' = \frac{\epsilon}{(b-a)}$. Wynika z tego, że

$$\begin{aligned} U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \qquad (10.7) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{b-a}{n} \cdot \frac{\epsilon}{b-a} \cdot n \\
&= \epsilon.
\end{aligned}
$$

Ponieważ ϵ było dowolne, to z Wniosku 10.3 otrzymujemy, że f jest całkowalna. □

Uwaga: Powyższy dowód można trochę wzmocnić, i pokazać, że jeżeli f ma skończenie wiele punktów nieciągłości w $[a, b]$ to też jest całkowalna.

Sumy Riemanna

Załóżmy, że mamy funkcję f na przedziale $[a, b]$, podział tego przedziału $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$, oraz niech w każdym przedziale podziału wybrany będzie punkt t_i:

$$t_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Utwórzmy sumę

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i). \tag{10.8}$$

Sumę taką nazywamy sumą Riemanna. Zależy ona od konkretnego podziału, i od wyboru punktów t_i. Zauważmy, że zawsze zachodzi

$$L(P, f) \leq R \leq U(P, f),$$

jeżeli suma Riemanna też zbudowana jest na podziale P, a funkcja f jest ograniczona. Wynika to z faktu, że $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, oraz

$$m_i = \inf\{f(x) : \ x \in [x_i, x_{i+1}]\} \leq f(t_i) \leq \sup\{f(x) : \ x \in [x_i, x_{i+1}]\} = M_i.$$

Dla podziału $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ określamy jego średnicę $d(P)$:

$$d(P) = \max\{(x_{i+1} - x_i); \ i = 0, \ldots, n-1\}.$$

Mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 10.5. *Niech funkcja f będzie ciągła na $[a, b]$, i niech dany będzie ciąg podziałów $\{P_n\}$ odcinka $[a, b]$ taki, że średnice tych podziałów dążą do zera: $d(P_n) \to 0$, gdy $n \to \infty$. Niech R_n będzie ciągiem sum Riemanna związanych z podziałami P_n. Innymi słowy, dla każdego podziału P_n mamy niezależnie wybrane punkty $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, i utworzoną sumę* (10.8). *Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Uwaga: To twierdzenie daje swobodę w interpretacji całki jako granicy sum. Bardzo często jako t_i wybieramy lewy albo prawy koniec przedziału $[x_i, x_{i+1}]$, albo jego środek, nie martwiąc się, gdzie funkcja przyjmuje swoją wartość najmniejszą i największą. Ale pamiętajmy: f musi być ciągła.

Dowód twierdzenia. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 10.4 zauważmy, że funkcja f ciągła na $[a, b]$ spełnia warunek (10.6) (czyli jest jednostajnie ciągła). Weźmy dowolne $\epsilon > 0$ i niech $\delta > 0$ będzie dane przez (10.6) dla $\epsilon' = \frac{\epsilon}{(b-a)}$ (podobnie jak w dowodzie twierdzenia 10.4). Niech $n_0 \in \mathbf{N}$ będzie wystarczająco duże, tak aby

$$\forall\ n \geq n_0 \quad d(P_n) < \delta.$$

Wtedy dla $n \geq n_0$, wykonując taki sam rachunek jak w (10.7) mamy

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) < \epsilon.$$

Z (10.5) mamy

$$\int_a^b f(x)\, dx - \epsilon < L(P_n, f) \leq \int_a^b f(x)\, dx,$$

oraz

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq U(P_n, f) < \int_a^b f(x)\, dx + \epsilon,$$

czyli

$$\left| L(P_n, f) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \epsilon, \qquad \left| U(P_n, f) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \epsilon.$$

Skoro ϵ było dowolne, a powyższe nierówności zachodzą dla wszystkich $n \geq n_0$, to

$$\lim_{n\to\infty} U(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Z drugiej strony, jak wiemy

$$L(P_n, f) \leq R_n \leq U(P_n, f),$$

a więc także

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \int_a^b f(x)\, dx.$$

□

Przykład: Następującą granicę sprowadzimy do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\frac{1}{\sqrt{n+6}}+\frac{1}{\sqrt{n+9}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{7\,n}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Spróbujemy przekształcić wyrażenie, żeby sprowadzić je do postaci sumy Riemanna jakiejś funkcji, dla jakiegoś przedziału, jakiegoś podziału tego przedziału, i jakiegoś wyboru punktów t_i.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}}+\frac{1}{\sqrt{n+6}}+\frac{1}{\sqrt{n+9}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{7\,n}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}} &=\\ &=\sum_{i=1}^{2\,n}\frac{1}{\sqrt{n+3\,i}}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\\ &=\sum_{i=1}^{2\,n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\,i}}\,\frac{1}{n}\\ &=\sum_{i=1}^{2\,n}\frac{1}{\sqrt{1+3\,\frac{i}{n}}}\,\frac{1}{n}\\ &=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2\,n}\frac{1}{\sqrt{1+3\,\frac{i}{n}}}\end{aligned}$$

Można się już wszystkiego domyśleć: jest to suma Riemanna dla funkcji $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+3\,x}}$, dla przedziału $[0,2]$, podziału równomiernego na $2n$ podprzedziałów równej długości $\frac{1}{n}$, i dla punktów t_i będących prawymi końcami podprzedziałów. Skoro zidentyfikowaliśmy wyrazy naszego ciągu jako sumy Riemanna, a średnice podziałów odpowiadających kolejnym wyrazom ciągu dążą do zera, to ciąg ten zbiega do całki oznaczonej

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{1+3\,x}}.$$

Na razie nie jesteśmy w stanie obliczyć tej całki. Już wkrótce, dzięki zasadniczemu twierdzeniu rachunku różniczkowego i całkowego policzymy ją z łatwością, okaże się równa $\frac{2}{3}(\sqrt{7}-1)$. Mamy następujące twierdzenie (całkowalność wszędzie oczywiście w sensie Riemanna).

Twierdzenie 10.6. *(i) Jeżeli f i g są całkowalne na przedziale $[a,b]$ a c jest stałą, to funkcje $f\pm g$ oraz cf też są całkowalne, dla dowolnej stałej c, oraz*

$$\int_a^b(f(x)\pm g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

(ii) Jeżeli f i g są całkowalne na $[a,b]$ i dla wszystkich x w tym przedziale zachodzi $f(x) \leq g(x)$ to

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx. \tag{10.9}$$

(iii) Jeżeli f jest całkowalna na $[a,b]$ oraz $a < c < b$, to f jest też całkowalna na każdym z podprzedziałów $[a,c]$ i $[c,b]$, oraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{10.10}$$

Również na odwrót: jeżeli f jest całkowalna na przedziałach $[a,c]$ i $[c,b]$ ($a < c < b$), to jest też całkowalna na $[a,b]$, i zachodzi (10.10).

(iv) Jeżeli f jest całkowalna na $[a,b]$, to $|f|$ też jest całkowalna na $[a,b]$, i

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Uwaga: Część (ii) można trochę wzmocnić, i udowodnić, że jeżeli dodatkowo $f(x) < g(x)$ poza skończoną ilością punktów przedziału $[a,b]$ ($a < b$), to nierówność (10.9) też jest ostra. Dowód w zasadzie jest ten sam.

Dowód twierdzenia. We wszystkich przypadkach trzeba pokazać całkowalność odpowiedniej funkcji, a potem odpowiednią równość dla całek.
(i) Niech dany będzie podział P odcinka $[a,b]$. Wtedy

$$L(P,f) + L(P,g) \leq L(P,f+g) \leq U(P,f+g) \leq U(P,f) + U(P,g).$$

A więc

$$U(P,f+g) - L(P,f+g) \leq U(P,f) - L(P,f) + U(P,g) - L(P,g). \tag{10.11}$$

Skoro f i g są całkowalne, to dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieją podziały P_1 i P_2 takie, że

$$U(P_1,f) - L(P_1,f) < \epsilon/2, \qquad U(P_2,g) - L(P_2,g) < \epsilon/2.$$

Jeżeli P^* jest wspólnym rozdrobnieniem podziałów P_1 i P_2 to, jak wiemy z (10.3), nierówności zachowują się dla P^*, a więc z (10.11)

$$U(P^*,f+g) - L(P^*,f+g) < \epsilon.$$

Ponieważ $\epsilon > 0$ było dowolne, to $f + g$ jest całkowalna (Wniosek 10.3), i dodatkowo

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx &\leq U(P^*, f + g) \\ &\leq U(P^*, f) + U(P^*, g) \\ &\leq \int_a^b f(x)\, dx + \epsilon/2 + \int_a^b g(x)\, dx + \epsilon/2 \\ &= \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx + \epsilon.\end{aligned}$$

Skoro $\epsilon > 0$ było dowolne, to

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

Przeciwną nierówność pokazujemy podobnie, wykorzystując $L(P^*, f + g)$. Z różnicą funkcji postępujemy tak samo.

Niech $c > 0$. Wtedy, oczywiście $L(P, cf) = c\,L(P, f)$ i $U(P, cf) = c\,U(P, f)$. W takim razie

$$U(P, cf) - L(P, cf) = c\,(U(P, f) - L(P, f)).$$

Podobnie, jeżeli $c < 0$ to $L(P, cf) = c\,U(P, f)$ i $U(P, cf) = c\,L(P, f)$, i

$$U(P, cf) - L(P, cf) = c\,(L(P, f) - U(P, f)) = |c|\,(U(P, f) - L(P, f)).$$

W obu przypadkach dla $\epsilon > 0$ znajdujemy podział P taki, że

$$U(P, f) - L(P, f) < \frac{\epsilon}{|c|} \ \Rightarrow\ U(P, cf) - L(P, cf) < \epsilon.$$

Oczywiście, jeżeli $c = 0$ to $cf(x) \equiv 0$, więc jest całkowalna, i całka jest równa 0. Niezależnie od wartości c funkcja cf jest więc całkowalna. Równość dla całek pokazujemy podobnie jak powyżej dla sumy funkcji.

(ii) Mamy

$$\int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx. \tag{10.12}$$

Funkcja podcałkowa po prawej stronie jest całkowalna (punkt (i)) oraz nieujemna. Łatwo zauważyć, że całka z nieujemnej funkcji też jest nieujemna -

po prostu każda suma dolna jest nieujemna. W takim razie wyrażenie (10.12) jest ≥ 0, i otrzymujemy

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

(iii) Niech $\epsilon > 0$, i niech P będzie podziałem przedziału $[a, b]$, takim, że

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon \tag{10.13}$$

Dodajmy punkt c do punktów podziału P, i otrzymane tak rozdrobnienie oznaczmy przez P^*. Ponieważ P^* jest rozdrobnieniem P, to (10.13) zachodzi też dla P^*. Niech P_1 i P_2 będą częściami podziału P^* wpadającymi do $[a, c]$ i $[c, b]$ odpowiednio. P_1 i P_2 są więc podziałami przedziałów $[a, c]$ i $[c, b]$. Zauważmy, że

$$L(P^*, f) = L(P_1, f) + L(P_2, f), \quad \text{oraz} \quad U(P^*, f) = U(P_1, f) + U(P_2, f).$$

Podstawiając to do (10.13) otrzymujemy

$$(U(P_1, f) - L(P_1, f)) + (U(P_2, f) - L(P_2, f)) = U(P^*, f) - L(P^*, f) < \epsilon.$$

Każda z wielkości w nawiasach po lewej stronie jest nieujemna, więc każda z osobna jest $< \epsilon$. Ponieważ $\epsilon > 0$ było dowolne, więc funkcja f jest całkowalna na przedziałach $[a, c]$ i $[c, b]$. Korzystając z oszacowania z Wniosku 10.3 otrzymujemy dodatkowo

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &< U(P^*, f) = U(P_1, f) + U(P_2, f) \\
&< \int_a^c f(x)\,dx + \epsilon + \int_c^b f(x)\,dx + \epsilon \\
&= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Powyższa nierówność jest prawdziwa dla dowolnego $\epsilon > 0$, więc musi zachodzić

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Nierówność w drugą stronę pokazujemy tak samo, wykorzystując sumy dolne. Musi więc zachodzić równość całek.

(iv) Zakładamy, że f jest całkowalna, i chcemy pokazać, że $|f|$ też jest całkowalna. Dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje podział $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ taki, że

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \epsilon,$$

gdzie

$$M_i = \sup\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \qquad m_i = \inf\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\tilde{M}_i = \sup\{|f(x)| : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \qquad \tilde{m}_i = \inf\{|f(x)| : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Dla ustalonego przedzialika $[x_{i-1}, x_i]$ podziału P rozpatrzmy 2 przypadki:
(a) f nie zmienia znaku na $[x_{i-1}, x_i]$. W tym przypadku

$$\begin{aligned} \tilde{M}_i &= M_i, \quad \tilde{m}_i = m_i, \qquad \text{jeżeli } f \geq 0, \\ \tilde{M}_i &= -m_i, \quad \tilde{m}_i = -M_i, \qquad \text{jeżeli } f \leq 0. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że w obu przypadkach mamy

$$\tilde{M}_i - \tilde{m}_i = M_i - m_i.$$

(b) f zmienia znak na $[x_{i-1}, x_i]$. W tym przypadku, jak łatwo zauważyć

$$\tilde{M}_i = \max\{M_i, -m_i\}, \qquad \tilde{m}_i \geq 0.$$

Mamy więc

$$\tilde{M}_i - \tilde{m}_i \leq \tilde{M}_i \leq M_i - m_i.$$

Otrzymujemy następujący wniosek:

$$U(P, |f|) - L(P, |f|) \leq U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

Skoro ϵ było dowolne, to funkcja $|f|$ jest całkowalna (Wniosek 10.3). Niech $c = \pm 1$, w zależności od znaku całki z f, a więc

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = c \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b c\, f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

gdyż $c\, f(x) \leq |c\, f(x)| = |f(x)|$. $\square$

Następne dwa twierdzenia pokazują związek całki oznaczonej z całką nieoznaczoną i z pochodnymi.

Twierdzenie 10.7. *Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a,b]$. Dla $x \in [a,b]$ określamy*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Wtedy F jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna w każdym punkcie x w którym funkcja podcałkowa f jest ciągła, oraz w takim punkcie x mamy

$$F'(x) = f(x).$$

Dowód. Skoro f jest całkowalna to jest domyślnie ograniczona: $|f(x)| \leq M$, a więc dla dowolnych $x, y \in [a,b]$, $x < y$ zachodzi oszacowanie

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq M(y-x).$$

Wynika z tego, że F jest ciągła, a nawet jednostajnie ciągła na $[a,b]$. Niech $x \in (a,b)$. Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolne, i $\delta > 0$ będzie takie, że dla $|t-x| < \delta$ mamy

$$|f(t) - f(x)| < \epsilon.$$

Zauważmy, że skoro $f(x)$ jest stałą niezależną od t, więc możemy napisać

$$f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt,$$

dla dowolnego h takiego, że $[x, x+h] \subset [a,b]$. Dla $0 < h < \delta$ możemy więc napisać

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt \\
&\leq \frac{1}{h}\cdot h\cdot\epsilon \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Podobnie, dla $-\delta < h < 0$

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| = \left|\frac{-1}{h}\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt - f(x)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \frac{-1}{h} \int_{x+h}^{x} f(t)\,dt - \frac{-1}{h} \int_{x+h}^{x} f(x)\,dt \right| \\
&= \frac{1}{|h|} \left| \int_{x+h}^{x} \big(f(t) - f(x)\big)\,dt \right| \\
&\le \epsilon.
\end{aligned}
$$

Widzimy więc, że granica

$$
\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}
$$

istnieje, i jest równa $f(x)$. □

Z powyższego twierdzenia wynika natychmiast następujący wniosek, na który czekamy już od poprzedniego rozdziału:

Wniosek 10.8. *Funkcja ciągła na przedziale ma na nim funkcję pierwotną.*

Następujące twierdzenie jest głównym narzędziem do liczenia całek oznaczonych. Samo twierdzenie jest proste i dosyć oczywiste, i jest znane jako zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego.

Twierdzenie 10.9 (Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego)**.** *Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ (w sensie Riemanna), oraz istnieje funkcja pierwotna F, czyli*

$$
F'(x) = f(x) \qquad x \in (a, b),
$$

(czyli f jest całkowalna w sensie całki nieoznaczonej), to

$$
\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b .
$$

Zwróćmy uwagę na symbol $F(x)|_a^b$, oznacza on przyrost funkcji F pomiędzy a i b, i będziemy go używać w przyszłości.

Dowód. Niech $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$. Dla każdego przedziału $[x_i, x_{i+1}]$ podziału stosujemy twierdzenie o wartości średniej, a więc istnieje $t_i \in (x_i, x_{i+1})$ takie, że

$$
f(t_i) = \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \qquad i = 0, \ldots, n-1.
$$

A więc

$$
\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(F(x_{i+1}) - F(x_i)\big) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).
$$

Dla każdego podziału P prawdziwe są więc nierówności

$$L(P, f) \leq F(b) - F(a) \leq U(P, f).$$

$F(b) - F(a)$ leży więc pomiędzy całką dolną i całką górną funkcji f na $[a, b]$. Skoro funkcja f jest całkowalna, to $F(b) - F(a)$ musi więc być równe całce. $\square$

Uwaga: W powyższym twierdzeniu zakładamy, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna, i w sensie istnienia funkcji pierwotnej. Te dwa założenia są niezależne, i istnieją funkcje, które spełniają jedno z tych założeń, a nie spełniają drugiego. Wiemy, że funkcje ciągłe spełniają oba. Są całkowalne w sensie Riemanna (Twierdzenie 10.4 na stronie 130) oraz mają funkcję pierwotną (Wniosek 10.8 na stronie 140). Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego odnosi się więc w szczególności do funkcji ciągłych.

Granice całkowania

Całkę oznaczoną zdefiniowaliśmy na przedziale $[a, b]$, dla $a < b$. Dolna granica całkowania była więc mniejsza od górnej. Wygodnie jest rozszerzyć tą definicję. Wprowadźmy więc następujące oznaczenia. Jeżeli $a < b$ to

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx,$$

oraz dla dowolnego c

$$\int_c^c f(x)\, dx = 0.$$

Przy tak dobranych oznaczeniach wzór (10.10) zachodzi niezależnie od wzajemnych relacji pomiędzy liczbami a, b, c

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \qquad \forall\ a, b, c,$$

jeżeli tylko wszystkie całki istnieją. Dowód można przeprowadzić rozpatrując przypadki.

Twierdzenie 10.9 daje nam następujące wzory na całkowanie przez części i całkowanie przez podstawienie, będące odpowiednikami wzorów dla całek nieoznaczonych. Trzeba pamiętać, że korzystając z Twierdzenia 10.9 musimy założyć istnienie wszystkich występujących całek, i oznaczonych i nieoznaczonych. Najprościej założyć, że wszystkie całkowane funkcje są ciągle.

Całkowanie przez części:

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,dx.$$

Przykład:

$$\int_1^e \log(x)\,dx = \int_1^e x'\log(x)\,dx = x\log(x)|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx = e - x|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

Całkowanie przez podstawienie:

$$\int_a^b g(f(x))\,f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy, \tag{10.14}$$

Przykład: W następującej całce podstawiamy $g(x) = \sin(x)$ oraz $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin(x^2)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(x^2)\cdot 2\,x\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_{0^2}^{\pi^2} \sin(y)\,dy = -\frac{1}{2}\,\cos(y)|_0^{\pi^2} = \frac{1-\cos(\pi^2)}{2}.\end{aligned}$$

Bardzo często całkujemy przez podstawienie w następujący sposób, stosując wzór (10.14) „od prawej strony”:

$$\begin{aligned}\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx &= \left\{\begin{matrix} x = (t+1)^2 \\ dx = 2(t+1)\,dt \end{matrix}\right\} \\ &= \int_{\sqrt{4}-1}^{\sqrt{9}-1} \frac{t+1}{t}\cdot 2\cdot(t+1)\,dt \\ &= 2\int_1^2 \frac{t^2+2t+1}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Ostatnią całkę łatwo już policzyć, znajdując funkcję pierwotną. Zauważmy, że powyższy rachunek jest całkowicie uzasadniony, i wynika ze wzoru (10.14). Wystarczy zauważyć, że funkcja $x = (t+1)^2$ jest odwracalna na przedziale $[1,2]$, i odwrotna do niej to funkcja $t = \sqrt{x} - 1$ na przedziale $[4,9]$.

Czasem, stosując ten sposób podstawiania możemy wpaść w pułapkę (przypomnijmy uwagę po wzorze na całkowanie przez podstawienie dla całek nieoznaczonych na stronie 115). Na przykład

$$\int_{-1}^2 x^2\,dx = \left\{\begin{matrix} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{matrix}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{t}\,dt\\
&= \frac{1}{2}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^4\\
&= \frac{1}{3}\,(8-1)\\
&= \frac{7}{3}.
\end{aligned}
$$

Z drugiej strony całkę możemy policzyć wprost:

$$
\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\,(8-(-1)) = \frac{9}{3} = 3.
$$

To jest ilustracja sytuacji, w której nie są spełnione założenia wzoru na całkowanie przez podstawienie dla całek nieoznaczonych. Ten wzór, zastosowany pomimo że nie są spełnione założenia, daje nam następującą **fałszywą** równość:

$$
\int x^2\,dx = \frac{1}{3}(x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\,|x|^3 \qquad \text{(nieprawda!)}
$$

Ta równość jest oczywiście fałszywa, nie zgadza się dla $x < 0$. Problemem jest to, że funkcja $t = x^2$ której użyliśmy do „podstawienia” nie jest odwracalna w otoczeniu 0.

Rozdział 11

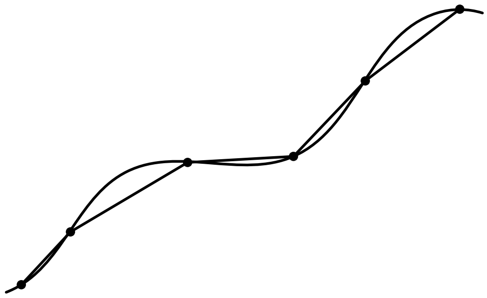
Zastosowania całek

Wiele wartości fizycznych, „namacalnych”, intuicyjnie zrozumiałych można opisać jako granice sum. Taką granicę sum można często zinterpretować jako granicę ciągu sum Riemanna dla pewnej funkcji, i w takim razie daną wielkość fizyczną zinterpretować jako całkę oznaczoną z jakiejś funkcji. Całkę taką możemy następnie obliczyć korzystając ze znanych sposobów całkowania. Omówimy kilka przykładów.

Długość łuku

Niech funkcja f, określona na przedziale $[a,b]$ będzie ciągła, różniczkowalna, oraz niech jej pochodna będzie ciągła na (a,b). Obliczymy długość krzywej na płaszczyźnie, będącej wykresem funkcji f, czyli krzywej $\{(x,f(x));\ x \in [a,b]\}$. Długość krzywej określamy jako granicę długości łamanych, przybliżających krzywą. Innymi słowy, wybieramy na krzywej ciąg węzłów, a następnie łączymy sąsiednie węzły ze sobą odcinkiem. Powstaje łamana, której długość obliczamy. Następnie zagęszczamy węzły na krzywej i znowu liczymy długość powstałej łamanej. Powstały w ten sposób ciąg łamanych, jeżeli odległości sąsiednich węzłów zbiegają do zera, powinien mieć długości zbieżne. Granicę tych długości przyjmujemy za długość krzywej. Krzywa może nie mieć długości. W przypadku który rozpatrujemy, to znaczy krzywej będącej wykresem odpowiednio regularnej funkcji długość istnieje, i wyraża się przez całkę.

W przypadku naszej krzywej każda łamana z węzłami na wykresie f nad przedziałem $[a,b]$ wiąże się z podziałem $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. Punkty podziału są rzutami na oś OX węzłów łamanej. Długość takiej łamanej, związanej z podziałem P dana jest wzorem



Rysunek 11.1: Przybliżenie krzywej łamaną.

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1} - f(x_i))^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right)^2}.$$

Funkcja f jest różniczkowalna w każdym przedziale $[x_i, x_{i+1}]$, a więc z twierdzenia o wartości średniej w każdym takim przedziale istnieje punkt t_i taki, że

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(t_i).$$

Mamy więc

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sqrt{1 + f'(t_i)^2}.$$

Długość łamanej jest więc sumą Riemanna funkcji ciągłej $\sqrt{1 + f'(x)^2}$. Zagęszczanie węzłów łamanej daje zagęszczanie otrzymanych podziałów, a jeżeli maksymalna odległość sąsiednich węzłów dąży do zera, to również maksymalna odległość ich rzutów (czyli średnica związanych z nimi podziałów) dąży do zera. W takim razie, korzystając z Twierdzenia 10.5 sumy Riemanna zbiegają do całki

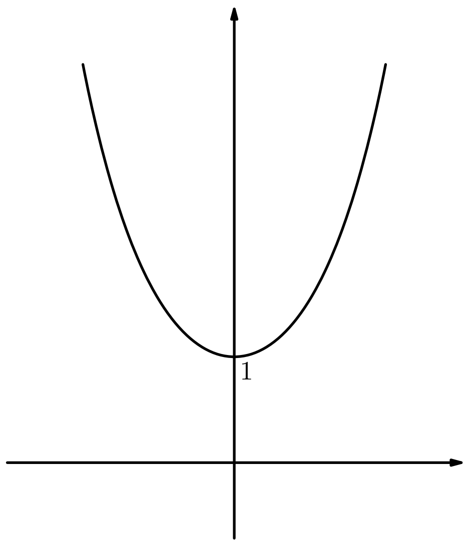
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx. \tag{11.1}$$

Całka L reprezentuje długość wykresu f. Jak wspomnieliśmy już wcześniej krzywa może nie mieć długości. Właśnie uzasadniliśmy natomiast, że wykres funkcji mającej ciągłą pochodną ma długość, i długość ta dana jest całką (11.1).

Przykład: Rozważmy przykład tak zwanego cosinusa hiperbolicznego

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Wykresem tej funkcji jest tak zwana „linia łańcuchowa". Giętka, ale nierozciągliwa lina (na przykład łańcuch) zaczepiona na końcach, i zwisająca swobodnie, przyjmie kształt wykresu funkcji $\cosh(x)$, oczywiście odpowiednio rozciągniętego w poziomie i pionie. Taki kształt uważany jest za bardzo solidny. Na przykład słynny łuk w St. Louis nad rzeką Missisipi ma kształt linii łańcuchowej (do góry nogami).



Rysunek 11.2: Linia łańcuchowa i łuk w St. Louis.

Dla tej funkcji mamy

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x).$$

Wiemy też, że $\sinh'(x) = \cosh(x)$ oraz że funkcje hiperboliczne spełniają tak zwaną „jedynkę hiperboliczną"

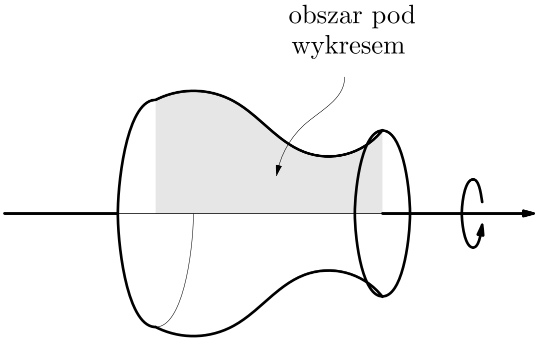
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Możemy więc obliczyć długość wykresu

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2(x)}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\cosh^2(x)}\, dx =$$
$$= \int_{-1}^{1} \cosh(x)\, dx = \sinh(x)\big|_{-1}^{1} = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1} - e^1}{2} = e - \frac{1}{e}.$$

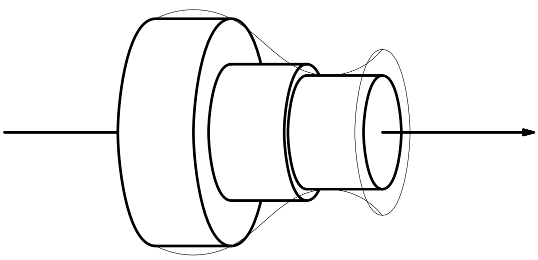
Objętość bryły obrotowej wokół osi OX

Niech będzie dana funkcja f na odcinku $[a, b]$, ciągła i nieujemna. Obracając obszar pod wykresem f wokół osi OX otrzymujemy tak zwaną bryłę obrotową



Rysunek 11.3: Bryła obrotowa.

Objętość tej bryły możemy przybliżyć przy pomocy walców, powstałych przez obrót prostokątów wokół osi OX.



Rysunek 11.4: Przybliżanie objętości walcami.

Wybierzmy podział $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. Niech, dla $i = 0, \ldots, n-1$

$$m_i = \inf\{f(x);\ x_i \leq x \leq x_{i+1}\}, \qquad M_i = \sup\{f(x);\ x_i \leq x \leq x_{i+1}\}.$$

Rozważmy „plasterek" bryły obrotowej wokół przedziału $[x_i, x_{i+1}]$. Walec o promieniu m_i jest całkowicie zawarty w tym plasterku, natomiast walec o promieniu M_i zawiera plasterek w całości w swoim wnętrzu. Wynika z tego, że objętość takiego plasterka (oznaczmy ją przez V_i) musi być liczbą zawartą pomiędzy objętościami tych dwóch walców, czyli

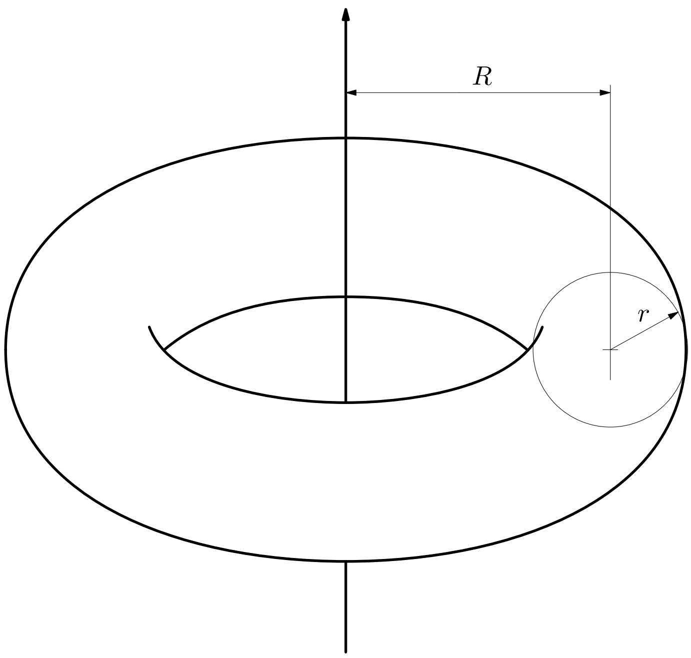
$$(x_{i+1} - x_i)\,\pi\, m_i^2 \leq V_i \leq (x_{i+1} - x_i)\,\pi\, M_i^2.$$

Widzimy więc, że objętość V całej bryły obrotowej, składającej się ze wszystkich „plasterków" spełnia

$$\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,\pi\, m_i^2 \leq V \leq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,\pi\, M_i^2.$$

Sumy po lewej i prawej stronie powyższej podwójnej nierówności są sumami dolną i górną funkcji $\pi\, f^2$, dla podziału P. Ponieważ nierówności te zachodzą dla wszystkich podziałów, a funkcja $\pi\, f^2$ jest całkowalna (bo jest ciągła), więc V musi być równe całce

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$



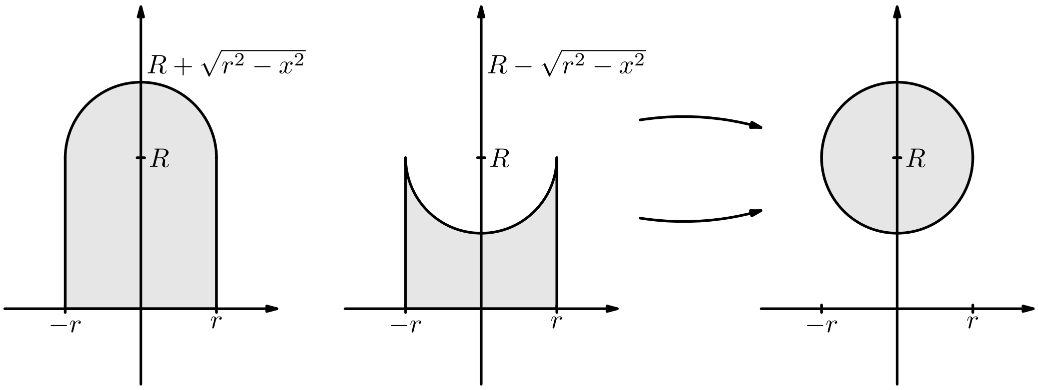
Rysunek 11.5: Torus.

Przykład: Rozważmy torus o dużym promieniu R i małym r $(0 < r < R)$. Torus taki możemy przedstawić jako bryłę obrotową powstałą z obrotu koła

$$x^2 + (y-R)^2 \leq r^2 \tag{11.2}$$

wokół osi OX. Obszar (11.2) nie jest obszarem pod wykresem funkcji, ale możemy go przedstawić jako różnicę dwóch takich obszarów, i w ten sposób przedstawić torus jako różnicę dwóch brył obrotowych, których objętości potrafimy obliczyć przy pomocy całek. Większą bryłę otrzymujemy jako obrót obszaru pod górnym półokręgiem a mniejszą jako obrót obszaru pod dolnym półokręgiem. Górny i dolny półokrąg są wykresami funkcji

$$f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \le x \le r.$$



Rysunek 11.6: Obszar (11.2) jako różnica dwóch obszarów.

Mamy więc wzór na objętość torusa:

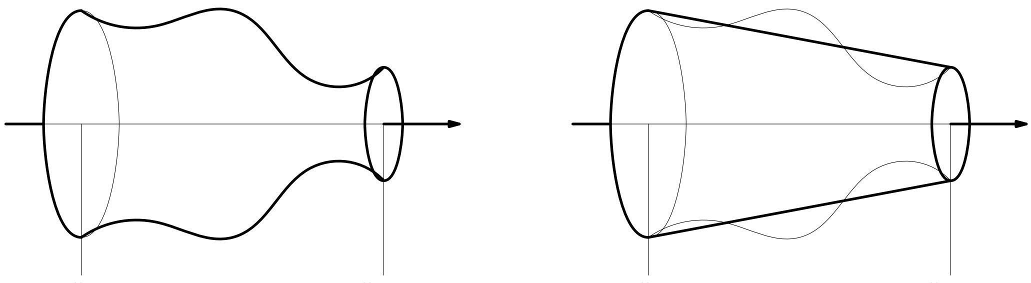
$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-r}^{r} f_1^2(x)\, dx - \pi \int_{-r}^{r} f_2^2(x)\, dx \\
&= \pi \int_{-r}^{r} (f_1^2(x) - f_2^2(x))\, dx \\
&= \pi \int_{-r}^{r} (f_1(x) - f_2(x))(f_1(x) + f_2(x))\, dx \\
&= \pi \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot 2 \cdot R\, dx \\
&= 4R\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.
\end{aligned}$$

Ostatnią całkę możemy obliczyć stosując podstawienie $x = \sin(t)$, ale można też jej wartość szybko odgadnąć. Zauważmy, że wykresem funkcji podcałkowej jest górna połówka okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu r. Całka, jako pole obszaru pod wykresem, to w takim razie połowa pola koła o promieniu r, czyli $\frac{\pi r^2}{2}$. Otrzymaliśmy więc następujący wzór na objętość torusa:

$$V = 2\,\pi^2\, R\, r^2.$$

Pole powierzchni bryły obrotowej wokół osi OX

Rozważmy obecnie pole powierzchni bocznej bryły obrotowej opisanej w poprzednim punkcie. Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna, jej pochodna jest ciągła na (a,b) i ma skończone granice na końcach a,b (do obliczenia objętości bryły obrotowej wystarczyło, żeby f była ciągła). Ponownie rozważmy podział $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ odcinka $[a,b]$, i „plasterek" bryły obrotowej wokół przedziału $[x_i, x_{i+1}]$. Powierzchnię boczną plasterka przybliżymy powierzchnią boczną stożka ściętego (nie walca), powstałego przez obrót obszaru pod sieczną wykresu wokół osi OX.



Rysunek 11.7: Stożek przybliżający bryłę obrotową.

Powstały stożek ścięty ma promienie podstaw $f(x_i)$ i $f(x_{i+1})$, oraz wysokość $x_{i+1} - x_i$. Jak wiadomo z geometrii pole powierzchni bocznej takiego stożka ściętego jest równe długości „tworzącej" stożka razy średni obwód.

Jeżeli ktoś nie pamięta tego wzoru, to może sobie taki wzór wyprowadzić, rozcinając stożek, i rozpłaszczając rozciętą ściankę boczną. W naszym przypadku stożka ściętego nad przedziałem $[x_i, x_{i+1}]$ średni obwód czyli obwód w połowie wysokości to

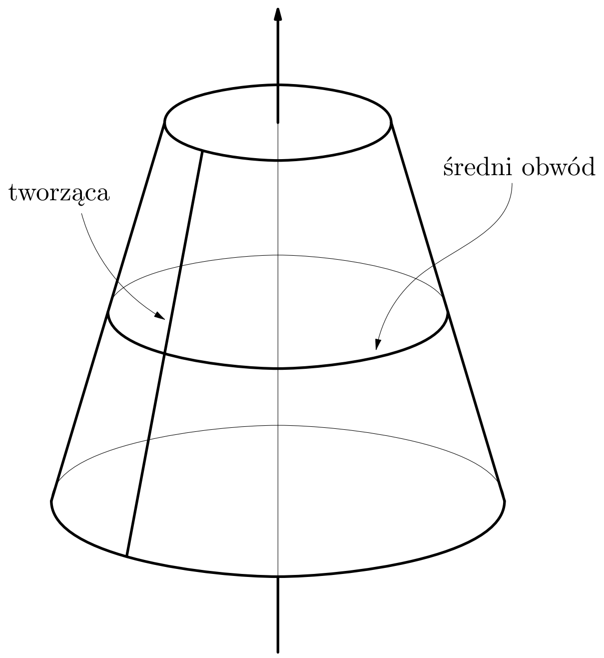
$$2\pi \, \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2},$$

a długość „tworzącej" to

$$\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}.$$

Łączna powierzchnia boczna wszystkich stożków przybliżających bryłę jest więc dana wzorem

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \right) \times \\ \times (x_{i+1} - x_i) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right)^2}. \quad (11.3)$$



Rysunek 11.8: Tworząca i średni obwód stożka ściętego.

Korzystając z twierdzenia o wartości średniej powyższą sumę możemy zapisać jako

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \cdot \sqrt{1 + f'(t_i)^2}, \tag{11.4}$$

dla odpowiednich punktów $t_i \in (x_i, x_{i+1})$. Zauważmy, że nie jest to suma Riemanna żadnej funkcji. Musimy więc wykonać jeszcze jeden krok. Ponieważ f jest jednostajnie ciągła to dla każdego $\epsilon > 0$

$$\left|\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} - f(t_i)\right| < \epsilon$$

jeżeli tylko średnica podziału P jest odpowiednio mała. Z naszych założeń wynika też, że f' jest ograniczona, a więc sumę (11.3), która jest równa (11.4) można zastąpić sumą

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi\, f(t_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \cdot \sqrt{1 + f'(t_i)^2}, \tag{11.5}$$

z błędem dowolnie małym, jeżeli średnica podziału P jest odpowiednio mala. Suma (11.5) jest sumą Riemanna funkcji ciągłej $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}$, a więc sumy Riemanna dążą do całki z tej funkcji, gdy średnice podziałów dążą do zera. Pole S powierzchni bocznej powstałej bryły obrotowej jest więc równe

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\,\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

Przykład: Obliczymy pole powierzchni torusa, którego objętość obliczyliśmy w poprzednim punkcie. Wiemy, że torus można zapisać jako bryłę powstałą z obrotu koła

$$x^2 + (y - R)^2 \le r^2$$

wokół osi OX, a w takim razie pole powierzchni bocznej torusa jest równa sumie sumie pól powierzchni bocznych brył powstałych przez obrót górnego i dolnego półokręgu:

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} f_1(x)\sqrt{1 + f_1'(x)^2}\,dx + 2\pi \int_{-r}^{r} f_2(x)\sqrt{1 + f_2'(x)^2}\,dx,$$

gdzie, jak poprzednio

$$f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Mamy więc

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2\,x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

i podobnie

$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Obie pochodne różnią się więc tylko znakiem, i mamy

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + f_1'(x)^2} &= \sqrt{1 + f_2'(x)^2} = \\
&= \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}.
\end{aligned}$$

Ostatecznie więc

$$\begin{aligned}
S &= 2\,\pi \int_{-r}^{r} \left((R + \sqrt{r^2 - x^2})\,\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} + (R - \sqrt{r^2 - x^2})\,\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) dx \\
&= 4\,\pi\,R\,r \int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\
&= 4\,\pi\,R \int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\,\pi\,R\,r\,\int_{-r}^{r} \frac{\frac{1}{r}\,dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}} \qquad y = \frac{x}{r} \\
&= 4\,\pi\,R\,r\,\int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\
&= 4\,\pi\,R\,r\ \arcsin y\big|_{-1}^{1} \\
&= 4\,\pi^2\,R\,r.
\end{aligned}
$$

Rozdział 12

Całki niewłaściwe

Całkę oznaczoną zdefiniowaliśmy dla funkcji ograniczonych na skończonym przedziale $[a, b]$. Teraz definicję tę rozszerzymy na funkcje niekoniecznie ograniczone i na przedziały nieskończone. Całki takie nazywamy całkami niewłaściwymi. Najpierw rozważmy przypadek funkcji, która nie jest ograniczona na przedziale $[a, b]$, ale jest ograniczona, i całkowalna, na każdym podprzedziale postaci $[c, b]$, $a < c < b$. Rozpatrujemy więc przypadek funkcji która jest zupełnie „porządna"(ciągła) na przedziale $[a, b]$ z wyjątkiem lewego końca przedziału, w którym żadnej regularności nie zakładamy. Punkt a nawet nie musi należeć do dziedziny. Można jednak obliczyć całkę na przedziałach postaci $[c, b]$ dla dowolnego $c \in (a, b]$ na których funkcja jest ciągła, i zapytać się czy takie całki są zbieżne do czegoś gdy $c \to a^+$. Jeżeli istnieje granica

$$g = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx, \tag{12.1}$$

to mówimy, że funkcja f jest całkowalna w sensie niewłaściwym na przedziale $[a, b]$, albo że całka niewłaściwa po $[a, b]$ jest zbieżna. Granicę g oznaczamy, oczywiście, przez

$$\int_a^b f(x)\, dx = g = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx,$$

i nazywamy całką niewłaściwą f po $[a, b]$. Podobnie zdefiniowana jest całka niewłaściwa gdy funkcja f ma „osobliwość" w prawym końcu przedziału całkowania (czyli nie jest ograniczona w otoczeniu tego końca, i najczęściej nie jest też w tym punkcie określona). W tym przypadku całka niewłaściwa istnieje (jest zbieżna) jeżeli f jest całkowalna na każdym przedziale $[a, c]$, gdzie $a \le c < b$, oraz istnieje granica

$$g = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx. \tag{12.2}$$

Uwaga: Jeżeli funkcja f jest całkowalna na $[a, b]$ to oczywiście granice (12.1) i (12.2) istnieją, i są równe całce w zwykłym sensie. Całka niewłaściwa jest więc rozszerzeniem definicji całki zwykłej.

Całkę niewłaściwą możemy też zdefiniować w sytuacjach, gdy funkcja f ma „osobliwości" na obu końcach przedziału całkowania $[a, b]$, lub w jednym lub kilku punktach wewnętrznych przedziału. W tym celu najpierw dzielimy przedział całkowania na podprzedziały tak, aby w każdym podprzedziale funkcja f miała tylko jedną „osobliwość", na tylko jednym z dwóch końców. Na przykład, jeżeli badamy całkowalność funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ na przedziale $[-1, 1]$, to rozpatrujemy osobno zbieżność całek

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} \quad \text{oraz} \quad \int_{0}^{1} \frac{dx}{x}, \tag{12.3}$$

i jeżeli **obie** powyższe całki są zbieżne, to mówimy, że całka niewłaściwa po przedziale $[-1, 1]$ istnieje. Zauważmy, że w tym konkretnym przypadku żadna z powyższych całek nie jest zbieżna (przykład (b)).

Przykłady: (a) Rozpatrzmy $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na przedziale $[0, 1]$. Funkcja ta jest ciągła na $(0, 1]$, ale ma „osobliwość" w 0. Sprawdzamy więc

$$\int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_{\epsilon}^{1} x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \left. \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_{\epsilon}^{1} = 2\,(1 - \sqrt{\epsilon}) \xrightarrow{\epsilon \to 0^+} 2,$$

czyli całka niewłaściwa jest zbieżna, i

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = 2.$$

(b) Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$ na przedziale $[-1, 1]$. Funkcja ta ma jedną osobliwość w punkcie 0 wewnątrz przedziału całkowania. Musimy sprawdzić zbieżność każdej z całek niewłaściwych (12.3) osobno. Sprawdźmy najpierw całkę po $[0, 1]$

$$\int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x} = \log(x)\big|_{\epsilon}^{1} = 0 - \log(\epsilon) = \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \xrightarrow{\epsilon \to 0^+} \infty.$$

Nie ma potrzeby sprawdzania zbieżności drugiej całki z (12.3) (też jest zresztą rozbieżna). Skoro jedna z całek (12.3) nie jest zbieżna, to całka po całym przedziale $[-1, 1]$ nie istnieje.

Drugi rodzaj całek niewłaściwych dotyczy nieskończonego przedziału całkowania. Niech funkcja $f(x)$ będzie całkowalna w każdym przedziale $[a, M]$, dla pewnego a i każdego $M > a$. Jeżeli istnieje granica

$$g = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx,$$

to mówimy, że f jest całkowalna w sensie niewłaściwym na $[a, \infty)$ i piszemy

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = g = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,dx.$$

Podobnie definiujemy całkę niewłaściwą po przedziale $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty} \int_M^b f(x)\,dx,$$

o ile każda z całek po prawej stronie równości istnieje (w sensie właściwym), oraz istnieje granica. W końcu całkę na całej prostej $(-\infty, \infty)$ definiujemy jako sumę

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx,$$

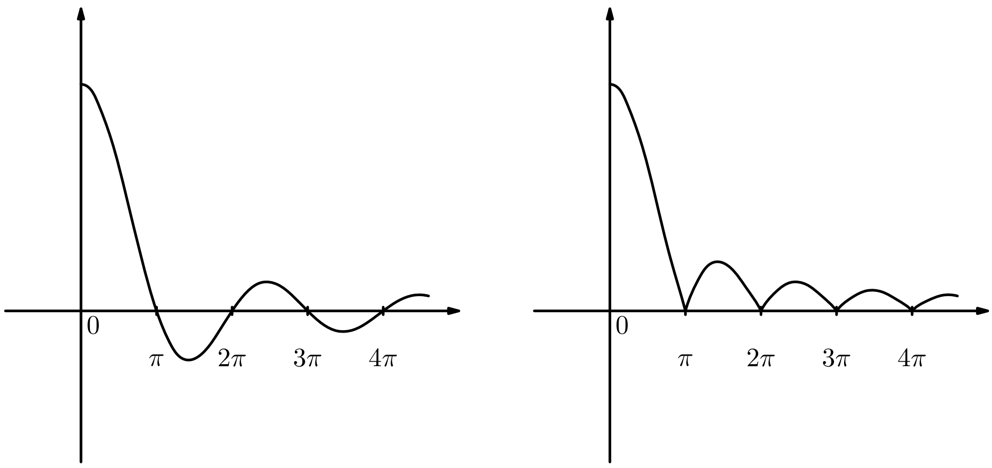
o ile obie całki po prawej stronie, niezależnie od siebie, istnieją. Zauważmy, że definicja ta nie zależy od punktu b w którym rozdzielamy półproste.

W końcu możemy połączyć oba rodzaje całek niewłaściwych, i całkować po przedziale nieskończonym funkcję która ma „osobliwości" w pewnych punktach. Przedział całkowania dzielimy na podprzedziały tak, aby funkcja w każdym podprzedziale skończonym miała tylko jedną „osobliwość" na którymś końcu, oraz żeby na nieskończonych nie miała żadnych osobliwości, i następnie sprawdzamy zbieżność każdej z całek niewłaściwych osobno. Na przykład, istnienie całki niewłaściwej z funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na całej prostej $(-\infty, \infty)$ oznacza istnienie każdej z całek niewłaściwych

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}, \qquad \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^2}, \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

W tym konkretnym przypadku całki pierwsza i ostatnia są zbieżne, ale druga i trzecia są rozbieżne, więc całka niewłaściwa

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2} \qquad \text{nie istnieje.}$$



Rysunek 12.1: Funkcje $\frac{\sin x}{x}$ i $\frac{|\sin x|}{x}$.

Przykłady: (a) Funkcje $\frac{\sin(x)}{x}$ i $\frac{|\sin(x)|}{x}$ są ciągłe na półprostej $[0, \infty)$ (wartości w 0 ustalamy na 1). Pierwsza jest całkowalna w sensie niewłaściwym na tej półprostej, a druga nie jest.

Weźmy dowolne $M > 0$, i rozważmy

$$\int_0^{2\pi M} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{2\pi[M]} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_{2\pi[M]}^{2\pi M} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Gdy $M \to \infty$ druga całka po prawej stronie ma granicę 0, gdyż długość przedziału całkowania nie przekracza 2π, a wartość funkcji podcałkowej jest ograniczona przez $\frac{1}{2\pi[M]}$ co dąży do 0 gdy $M \to \infty$. W takim razie mamy

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^{2\pi M} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^{2\pi[M]} \frac{\sin x}{x}\, dx, \tag{12.4}$$

istnienie jednej granicy pociąga za sobą istnienie drugiej. Zajmiemy się w takim razie granicą po prawej stronie, i pokażemy, że istnieje. Rozłóżmy całkę:

$$\int_0^{2\pi[M]} \frac{\sin x}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{[M]-1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{\sin x}{x}\, dx. \tag{12.5}$$

Przyjrzyjmy się wyrazom szeregu:

$$\begin{aligned}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{\sin x}{x}\, dx &= \int_{2\pi k}^{2\pi k+\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_{2\pi k+\pi}^{2\pi(k+1)} \frac{\sin x}{x}\, dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+2k\pi}\, dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+(2k+1)\pi}\, dx,\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$ oraz $\sin(x+(2k+1)\pi) = -\sin(x)$. Kontynuując, mamy

$$\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\pi \sin x \left(\frac{1}{x+2k\pi} - \frac{1}{x+(2k+1)\pi} \right) dx$$

Zauważmy, że całka jest dodatnia, gdyż funkcja podcałkowa jest dodatnia wewnątrz przedziału całkowania. Szereg (12.5) ma więc dodatnie wyrazy, i jest zbieżny (czyli jest zbieżna całka po lewej stronie (12.5)) dokładnie wtedy, gdy jest ograniczony. Oszacujmy jeszcze ostatnią całkę. Dla $k > 0$ mamy

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x \left(\frac{1}{x+2k\pi} - \frac{1}{x+(2k+1)\pi} \right) dx = \\ = \int_0^\pi \sin x \, \frac{\pi}{(x+2k\pi)\cdot(x+(2k+1)\pi)}\, dx \le \\ \le \frac{\pi}{4\pi^2 k^2} \int_0^\pi \sin x\, dx = \frac{1}{2\pi k^2},\end{aligned}$$

natomiast dla $k = 0$ oszacujmy brutalnie

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \le \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \le 2\pi.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi[M]} \frac{\sin x}{x}\, dx &\le 2\pi + \sum_{k=1}^{[M]-1} \frac{1}{2\pi k^2} \\ &= 2\pi + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{[M]-1} \frac{1}{k^2} \\ &< 2\pi + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

Jak już wspomnieliśmy lewa strona jest niemalejącą funkcją M, i jest ograniczona, czyli ma granicę, gdy $M \to \infty$. Granice (12.4) istnieją więc, a więc całka niewłaściwa

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

jest zbieżna. Można pokazać (ale to wymaga zupełnie innych narzędzi), że całka ta jest równa $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Całka ta jest ważna, i pojawia się w zastosowaniach. Istnienie jej zawdzięczamy temu, że „pagórki” sinusa występują na przemian powyżej i poniżej osi OX, i ich pola się skracają. Natomiast suma pól wszystkich „pagórków” wykresu jest nieskończona. Innymi słowy, po nałożeniu wartości bezwzględnej na funkcję podcałkową całka niewłaściwa nie istnieje. Żeby się o tym przekonać, weźmy dowolne $M > 0$, i obliczmy

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi M} \frac{|\sin x|}{x}\, dx &\geq \int_0^{\pi[M]} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{[M]-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{[M]-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x + k\pi}\, dx \\
&> \sum_{k=0}^{[M]-1} \frac{1}{k\pi + \pi} \int_0^{\pi} \sin x\, dx \\
&= \sum_{k=1}^{[M]} \frac{2}{k\pi}.
\end{aligned}$$

Gdy $M \to \infty$ to $[M] \to \infty$ i w takim razie

$$\int_0^{\pi M} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \to \infty,$$

czyli całka niewłaściwa nie jest zbieżna.

(b) Pokażemy, że całka z funkcji $f(x) = e^{-x^2}$ na całej prostej $(-\infty, \infty)$ jest zbieżna. Pokażemy najpierw, że całka po półprostej dodatniej istnieje. Niech $M > 0$. Ponieważ funkcja podcałkowa jest dodatnia, to całka

$$\int_0^M e^{-x^2}\, dx \tag{12.6}$$

rośnie wraz z M, więc granica gdy $M \to \infty$ istnieje, jeżeli całki te są wspólnie ograniczone od góry dla wszystkich M.

$$\begin{aligned}
\int_0^M e^{-x^2}\, dx &= \int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^M e^{-x^2}\, dx \\
&\leq \int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^M e^{-}\, dx \\
&= \int_0^1 e^{-x^2}\, dx - e^{-x}\Big|_1^M
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + e^{-1} - e^{-M} \\
&< \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + e^{-1}.
\end{aligned}
$$

Całki (12.6) stanowią więc ograniczoną i rosnącą funkcję M, mają więc granicę gdy $M \to \infty$. Rozważmy teraz drugą całkę niewłaściwą. Skorzystamy z parzystości funkcji podcałkowej. Niech $M > 0$.

$$
\int_{-M}^0 e^{-x^2}\,dx = -\int_M^0 e^{-x^2}\,dx = \int_0^M e^{-x^2}\,dx,
$$

czyli, jak przed chwilą udowodniliśmy, całki te mają granicę gdy $M \to \infty$. Całki niewłaściwe funkcji e^{-x^2} po przedziałach $(-\infty, 0]$ i $[0, \infty)$ istnieją, a więc istnieje całka niewłaściwa po całej prostej. Można pokazać, że

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},
$$

ale wymaga to dodatkowych narzędzi. Funkcja e^{-x^2} to tak zwana funkcja Gaussa, i jest jedną z ważniejszych funkcji w matematyce i zastosowaniach.

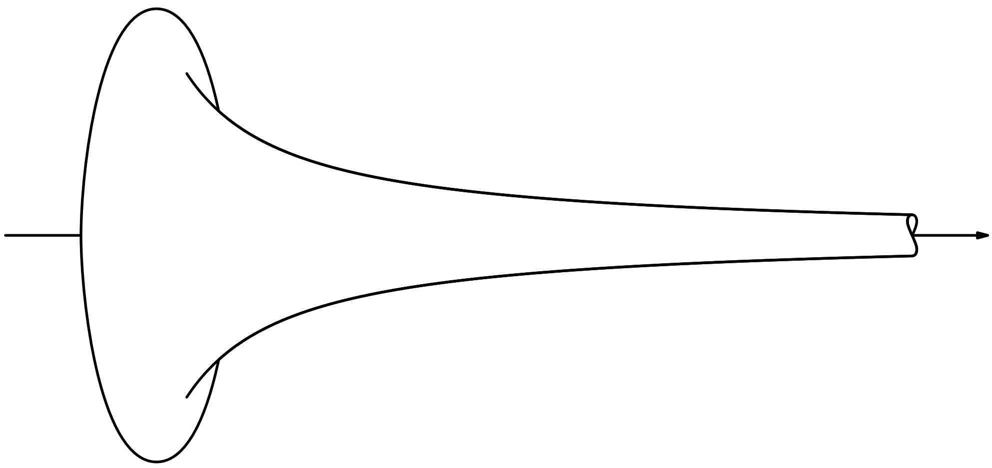
(c) Niech $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$. Jeżeli obrócimy wykres tej funkcji wokół osi OX, to otrzymamy nieskończony „lejek”. Obliczymy objętość tego „lejka”, i pole jego powierzchni bocznej. Stożek jest nieskończony, i zauważmy, że pasuje dokładnie do naszych całek niewłaściwych. Jego objętość jest równa granicy objętości lejków uciętych, i jego pole powierzchni bocznej jest granicą pól powierzchni bocznych lejków z uciętą „końcówką”. Widzimy więc, że wielkości te wyrażają się całkami niewłaściwymi, i istnienie tych wielkości wiąże się z istnieniem całek niewłaściwych

$$
V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx, \qquad S = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}'\right)^2}\,dx.
$$

Policzmy te całki.

$$
V = \lim_{M\to\infty} \pi \int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = \pi \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{x}\bigg|_1^M = \pi \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M} + 1\right) = \pi.
$$

Widzimy więc, że całka niewłaściwa jest zbieżna, a więc objętość nieskończonego „lejka” jest skończona i wynosi π. Obliczmy teraz pole powierzchni bocznej



Rysunek 12.2: Nieskończony „lejek”.

$$2\pi \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}'\right)^2}\, dx = 2\pi \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx \geq$$
$$\geq 2\pi \int_1^M \frac{1}{x}\, dx = 2\pi \log x|_1^M = 2\pi \log M \xrightarrow{M\to\infty} \infty.$$

Widzimy więc, że całka niewłaściwa nie istnieje. Pole powierzchni bocznej„lejka” jest więc nieskończone. Wbrew pozorom, moglibyśmy jednak pomalować taki lejek farbą, pomimo nieskończonej powierzchni. Wystarczy π litrów farby nalać do środka lejka. Wnętrze — to chyba jasne — w całości się pomaluje.

Rozdział 13

Wzory Wallisa i Stirlinga

Wykorzystamy tę okazję, żeby udowodnić wzór Stirlinga. Wzór ten stosuje się do przybliżonego obliczania silni, która jest czasem potrzebna w zastosowaniach, na przykład w statystyce. Silnia tylko pozornie jest łatwa do obliczenia. W praktyce liczenie dużej liczby z definicji jest niemożliwe, za dużo działań.

Wzór Wallisa

Najpierw udowodnimy następujący wzór, znany jako wzór Wallisa.

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} \right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 .$$

Wzór Wallisa zastosujemy w dowodzie wzoru Stirlinga. Mamy, dla $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \sin^{n-1} x \, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \, \sin^{n-1} x \, dx \\
&= -\cos x \, \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, (n-1) \, \sin^{n-2} x \, \cos x \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, \sin^{n-2} x \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \, \sin^{n-2} x \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.
\end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx.$$

Iterując to, otrzymujemy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2k)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \tag{13.1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2k)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\dots\cdot(2k+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}. \tag{13.2}$$

Odpowiednio dzieląc i mnożąc w powyższych wzorach, mamy

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx}{\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}} = \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\,\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx}{\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx} =$$

$$= \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{(2k+1)}\,\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx}. \tag{13.3}$$

Powyższa równość jest spełniona niezależnie od k. Na przedziale $[0,\frac{\pi}{2}]$ funkcja sin jest ≤ 1, więc

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} x\,dx,$$

czyli, znowu odpowiednio dzieląc i mnożąc

$$1 \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx} \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx}. \tag{13.4}$$

Wykorzystując (13.2) w liczniku i mianowniku po prawej stronie otrzymujemy

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} x\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x\,dx} = \frac{(2(k-1))!!}{(2k-1)!!}\cdot\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} = \frac{2k+1}{2k} \xrightarrow{k\to\infty} 1.$$

Możemy więc zastosować twierdzenie o 3 ciągach do (13.4) i widzimy, że iloraz całek w (13.3) też dąży do 1. To oznacza, że

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2k+1)}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2.$$

Otrzymaliśmy więc zapowiadany wzór Wallisa. Wzór ten wykorzystamy teraz do dowodu wzoru Stirlinga.

Wzór Stirlinga

Wzór Stirlinga to następujący wzór:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, e^n}{\sqrt{2\,\pi\,n}\, n^n} = 1.$$

Niech

$$a_n = \frac{n!\, e^n}{\sqrt{n}\, n^n}.$$

Oczywiście $a_n > 0$, pokażemy też, że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący. Najpierw zauważmy, że

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!\, e^n}{\sqrt{n}\, n^n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}\,(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\, e^{n+1}} = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \tag{13.5}$$

Chcemy pokazać, że powyższa wielkość jest większa niż 1. Wstawmy $\frac{1}{x}$ za n, i rozważmy funkcję będącą logarytmem z wyrażenia (13.5), pomnożonego przez e.

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \log(1+x), \quad x > 0. \tag{13.6}$$

Pokażemy, że funkcja f jest zawsze większa od 1, czyli funkcja $e^{f(x)}$ jest zawsze większa od e, w szczególności jest większa od e w punktach postaci $x = \frac{1}{n}$, czyli wyrażenie (13.5) jest większe od 1 dla każdego $n = 1, 2, 3, \dots$, czyli ciąg $\{a_n\}$ jest malejący. Wróćmy więc do funkcji (13.6), i pokażmy, że $f(x) > 1$ dla $x > 0$. Jest to typowe ćwiczenie na analizę przebiegu funkcji. Po pierwsze mamy

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \log(1+x) + \frac{1}{2} \lim_{x\to 0^+} \log(1+x) = 1$$

(pierwszą granicę liczyliśmy w przeszłości, można pokazać z reguły de l'Hôpitala, że wynosi 1, a druga granica wynosi 0, i wynika z ciągłości logarytmu). Obliczymy teraz pochodną i pokażemy, że f jest rosnąca dla $x > 0$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \log(1+x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{1+x}.$$

Chcemy pokazać, że dla $x > 0$ powyższe wyrażenie jest > 0, czyli

$$-\frac{1}{x^2} \log(1+x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{1+x} > 0,$$

$$-(1+x)\,\log(1+x) + x + \frac{x^2}{2} > 0.$$

Rozpatrzmy pomocniczą funkcję

$$g(x) = -(1+x)\log(1+x) + x + \frac{x^2}{2}.$$

Wtedy $g(0) = 0$, oraz $g'(x) = -\log(1+x) - 1 + 1 + x = x - \log(1+x) > 0$, (ostatnia nierówność to po prostu $e^x > 1 + x$ dla $x > 0$). Funkcja g jest więc rosnąca, a ponieważ „startuje" z 0, więc jest większa od 0 dla $x > 0$. Mamy więc $f'(x) > 0$ czyli f jest rosnąca, a więc

$$f(x) > \lim_{t\to 0^+} f(t) = 1.$$

Pokazaliśmy więc że f jest większa od 1, a więc wyrażenie (13.5) jest większe od 1 dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$, a więc ciąg $\{a_n\}$ jest malejący. Ciąg malejący, o wyrazach dodatnich musi być zbieżny, i niech jego granica wynosi g.

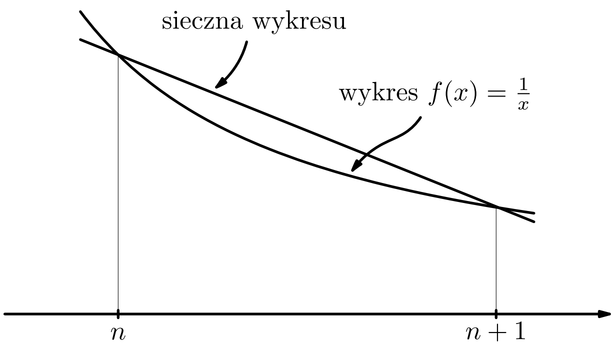
$$g = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Skoro wyrazy ciągu są dodatnie, to automatycznie $g \geq 0$. Pokażemy, że $g > 0$. W tym celu pokażemy, że wszystkie wyrazy a_n są większe niż pewna dodatnia liczba. Mamy

$$\log \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1. \tag{13.7}$$

Będziemy potrzebowali następującej nierówności:

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right). \tag{13.8}$$



Rysunek 13.1: Oszacowanie (13.8).

Na rysunku 13.1 pole obszaru pod wykresem, od n do $n+1$ to całka z funkcji $\frac{1}{x}$, po przedziale $[n, n+1]$, czyli $\log(n+1) - \log n = \log(1 + \frac{1}{n})$.

Natomiast pole trapezu, czyli pole obszaru pod sieczną to $= \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})$. Funkcja $\frac{1}{x}$ jest wypukła: $(\frac{1}{x})'' = \frac{2}{x^3} > 0$. Wykres leży więc pod każdą sieczną, pomiędzy punktami przecięcia, czyli obszar pod wykresem zawiera się wewnątrz trapezu, czyli pole obszaru pod wykresem jest nie większe niż pole trapezu, czyli otrzymujemy oszacowanie (13.8). Wstawiając (13.8) do (13.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\log \frac{a_n}{a_{n+1}} &\leq \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n}{n+1} + \frac{1}{2\,n} + \frac{1}{2\,n+2}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{4\,n} - \frac{1}{4\,n+4}.
\end{aligned}$$

Dodając do siebie powyższe oszacowania dla $n = 1, \dots, k-1$ mamy

$$\begin{aligned}
\log \frac{a_1}{a_k} &= \log \frac{a_1}{a_2} + \log \frac{a_2}{a_3} + \dots + \log \frac{a_{k-1}}{a_k} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \\
&< \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Otrzymujemy więc

$$\frac{a_1}{a_k} < e^{\frac{1}{4}} \;\Rightarrow\; a_k > a_1\, e^{-\frac{1}{4}} = e^{\frac{3}{4}},$$

gdyż $a_1 = e$. Wszystkie wyrazy ciągu są więc większe niż $e^{\frac{3}{4}}$, a więc także $g \geq e^{\frac{3}{4}} > 0$. Pozostało nam jeszcze troche manipulacji.

$$a_n^2 = \frac{(n!)^2\, e^{2\,n}}{n\, n^{2\,n}}, \qquad a_{2n} = \frac{(2\,n)!\, e^{2\,n}}{\sqrt{2\,n}\,(2\,n)^{2\,n}},$$

czyli

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}} = \frac{(n!)^2}{n\, n^{2\,n}\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2\,n}\,(2\,n)^{2\,n}}{(2\,n)!} = \frac{(n!)^2\, 2^{2\,n}}{(2\,n)!\sqrt{n}}.$$

Zauważmy związek ze wzorem Wallisa, który możemy zapisać tak

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{(2\,n)!!}{(2\,n-1)!!} \;\to\; \sqrt{\pi}.$$

Zauważmy też następujące związki

$$(2\,n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2\,n = 2^n\,n!,$$
$$(2\,n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\,n-1) = \frac{(2\,n)!}{(2\,n)!!} = \frac{(2\,n)!}{2^n\,n!}.$$

Składając to razem otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{(2\,n)!!}{(2\,n-1)!!} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{2^n\,n!\,2^n\,n!}{(2\,n)!} = \frac{(n!)^2\,2^{2\,n}}{(2\,n)!\sqrt{n}} = \frac{a_n^2}{a_{2n}\,\sqrt{2}}.$$

W końcu więc

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}} = \frac{g^2}{g\,\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; g^2 - \sqrt{2\,\pi}\,g = 0 \;\Rightarrow\; g = \sqrt{2\,\pi},$$

gdyż $g > 0$. Zauważmy, że udowodniliśmy w ten sposób wzór Stirlinga

Rozdział 14

Całkowanie numeryczne

Omówimy najbardziej podstawowe, uniwersalne metody przybliżonego, numerycznego obliczania całek oznaczonych. Metoda trapezów i metoda Simpsona to podstawowe metody całkowanie w przypadku funkcji, o których niewiele wiadomo.

Wielomiany interpolacyjne

Podstawową metodą przybliżonego obliczania całki oznaczonej danej funkcji f jest przybliżenie f wielomianem, i obliczenie całki tego wielomianu:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx.$$

W powyższym p jest wielomianem, który „zgadza się" z funkcją f w wybranych punktach węzłowych:

$$p(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Wielomian taki nazywamy wielomianem interpolacyjnym, i mamy następujące twierdzenie

Twierdzenie 14.1. *Jeżeli punkty $x_0, x_1 \ldots, x_n \in [a, b]$ są wszystkie różne, to dla dowolnych wartości $y_1, y_2, \ldots, y_n$ istnieje dokładnie jeden wielomian p stopnia $\leq n$ taki, że*

$$p(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Dowód. Fakt, że taki wielomian może być tylko jeden jest oczywisty. Jeżeli mielibyśmy dwa takie wielomiany, to ich różnica byłaby wielomianem stopnia $\leq n$, który miałby $n + 1$ pierwiastków $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Różnica musiałaby więc być wielomianem zerowym. Sam fakt istnienia takiego wielomianu też jest oczywisty, można go zdefiniować wzorem. Niech φ_i będzie wielomianem stopnia n zdefiniowanym wzorem

$$\varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{14.1}$$

W powyższym wzorze symbol $\prod$ jest symbolem mnożenia, analogicznym do $\sum$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n.$$

Wprost ze wzoru wynika, że φ_i ma następujące wartości w punktach węzłowych $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$\varphi_i(x_k) = \begin{cases} 1 : & k = i, \\ 0 : & k \neq i. \end{cases} \tag{14.2}$$

Otrzymujemy więc następujący wzór na wielomian interpolacyjny p:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_i(x). \tag{14.3}$$

Każdy z wielomianów φ_i jest stopnia $\leq n$, więc p teżjest stopnia $\leq n$. Z własności (14.2) otrzymujemy

$$p(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_i(x_k) = y_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

□

Wzór (14.3) daje nam wielomian interpolacyjny w tak zwanej postaci Lagrange'a. Istnieją inne wzory dające ten sam wielomian p, ale być może wygodniejsze w różnych zastosowaniach.

Metody Newtona-Cotesa

Mając wzór na wielomian interpolacyjny otrzymujemy następujący wzór na całkę przybliżoną:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \varphi_i(x)\,dx. \tag{14.4}$$

φ_i jest wielomianem, więc całki po prawej stronie można policzyć dokładnie, i nie zależą one od f. Jeżeli punkty węzłowe $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są rozłożone równomiernie na $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n},$$

to wzór (14.4) nazywa się metodą Newtona-Cotesa. W praktyce metody Newtona-Cotesa stosowane są dla $n = 1$ (metoda trapezów) i $n = 2$ (metoda Simpsona).

Metoda trapezów $n = 1$: Mamy dwa punkty węzłowe $x_0 = a$ i $x_1 = b$. Wielomian interpolacyjny jest liniowy

$$\begin{aligned}
p(x) &= f(a)\Big(\frac{x-b}{a-b}\Big) + f(b)\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big), \\
\int_a^b p(x)\,dx &= \frac{f(a)}{a-b}\,\frac{(x-b)^2}{2}\Big|_a^b + \frac{f(b)}{b-a}\,\frac{(x-a)^2}{2}\Big|_a^b \\
&= -\frac{f(a)}{a-b}\,\frac{(a-b)^2}{2} + \frac{f(b)}{b-a}\,\frac{(b-a)^2}{2} \\
&= \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big).
\end{aligned}$$

Oszacowaniem błędu zajmiemy się za moment.

Metoda Simpsona $n = 2$: Mamy 3 punkty węzłowe $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$. Wielomiany φ_i wyglądają więc następująco:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)} = \frac{2}{(b-a)^2}\Big(x - \frac{a+b}{2}\Big)(x-b), \\
\varphi_1(x) &= \frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)} = \frac{-4}{(b-a)^2}(x-a)(x-b), \\
\varphi_2(x) &= \frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(b-a)(b-\frac{a+b}{2})} = \frac{2}{(b-a)^2}(x-a)\Big(x - \frac{a+b}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Obliczamy całki:

$$\int_a^b \varphi_0(x)\,dx = \frac{b-a}{6}, \quad \int_a^b \varphi_1(x)\,dx = \frac{2(b-a)}{3}, \quad \int_a^b \varphi_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6},$$

i ostatecznie

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = \frac{(b-a)}{6}\Big(f(a) + 4f\big(\tfrac{a+b}{2}\big) + f(b)\Big).$$

Oszacowanie błędu

Dla wielomianu interpolacyjnego mamy następujące twierdzenie

Twierdzenie 14.2. *Niech f ma $n+1$ pochodnych na przedziale $[a, b]$, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ będą różnymi punktami węzłowymi, a p będzie wielomianem interpolacyjnym stopnia $\leq n$: $f(x_i) = p(x_i)$. Wtedy, dla dowolnego $x \in [a, b]$ istnieje punkt $\xi_x \in (a, b)$ taki, że*

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{14.5}$$

Dowód. Jeżeli x jest którymkolwiek z punktów węzłowych x_i, to równość (14.5) jest prawdziwa, bo po obu stronach mamy 0, i ξ_x może być dowolny. Weźmy więc x różne od wszystkich x_i. Niech q będzie wielomianem interpolacyjnym stopnia $\leq n+1$, który interpoluje f w punktach $x_0, \ldots, x_n$ i dodatkowo x. Zauważmy, że musi zachodzić:

$$q(t) = p(t) + \lambda \prod_{i=0}^{n} (t - x_i), \qquad \lambda = \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}.$$

Wynika to z faktu, że wielomian $q - p$ ma zera we wszystkich punktach $x_0, x_1, \ldots x_n$ (stąd iloczyn $\prod(t - x_i)$, a w x ma wartość $q(x) - p(x) = f(x) - p(x)$. Rozważmy funkcję pomocniczą

$$\psi(t) = f(t) - q(t).$$

Wiemy, że zeruje się w $n+2$ różnych punktach, więc z twierdzenia Rolle'a (Twierdzenie 8.8) jej pochodna zeruje się w $n+1$ różnych punktach. Iterując ten argument, otrzymujemy, że $\psi^{(n+1)}$ zeruje się w przynajmniej jednym punkcie ξ_x:

$$0 = \psi^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - q^{(n+1)}(\xi_x).$$

Zauważmy, że $q^{(n+1)}(t) = \lambda(n+1)!$ w każdym punkcie t (jest stała), więc także w ξ_x. To jest dokładnie (14.5). $\square$

Metoda trapezów: Błąd dla $n = 1$. Załóżmy, że f jest 2-krotnie różniczkowalna na przedziale $[a, b]$, oraz f'' jest ciągła. Mamy

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2!} \int_a^b f''(\xi_x)(x-a)(x-b)\,dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\, f''(\eta) \int_a^b (x-a)(x-b)\, dx \\
&= -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\eta). \qquad (14.6)
\end{aligned}
$$

W powyższym skorzystaliśmy z Twierdzenia 14.2 oraz z następującego całkowego twierdzenia o wartości średniej:

Twierdzenie 14.3. *Jeżeli f jest ciągła a g całkowalna na $[a,b]$, oraz dodatkowo g ma na $[a,b]$ stały znak, to istnieje punkt $\eta \in [a,b]$ taki, że*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(\eta) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx}$$

jest wartością pośrednią pomiędzy wartościami najmniejszą i największą f, niezależnie od znaku f. Twierdzenie wynika więc z własności Darboux funkcji ciągłych (Twierdzenie 7.6). □

Uwaga: Jest jeszcze jeden szczegół, który wykorzystaliśmy w powyższym dowodzie. W dowodzie Twierdzenia 14.2 można dodatkowo pokazać, że punkt ξ_x można wybrać w sposób ciągły w zależności od x. Ten drobny szczegół zostawiamy już bez dowodu.

Metoda Simpsona: W tym przypadku nie można bezpośrednio skorzystać z całkowego twierdzenia o wartości średniej (Twierdzenie 14.3), gdyż wielomian

$$(x-a)(x-\tfrac{a+b}{2})(x-b)$$

występujący pod całką nie zachowuje stałego znaku na przedziale $[a,b]$. W przypadku metody Simpsona oszacowanie błędu jest jednak nawet lepsze niż wynikałoby to bezpośrednio z Twierdzenia 14.2. Żeby to zauważyć, zróbmy dwie obserwacje. W Twierdzeniu 14.2 założyliśmy, że wszystkie punkty węzłowe $x_0, x_1, \dots, x_n$ są różne. Dowód w ogóle się nie zmienia, jeżeli dopuścimy, że któryś punkt „się powtarza", czyli w tym punkcie nie tylo wartość wielomianu interpolacyjnego zgadza się z wartością f, ale także pierwsze pochodne się zgadzają. Sformułujmy to :

Twierdzenie 14.4. *Jeżeli f ma $n+2$ pochodne na przedziale $[a,b]$, $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ są różne, a p jest wielomianem interpolacyjnym f stopnia $\le n+1$, z punktem x_{i_0} „podwójnym", to znaczy*

$$f(x_i) = p(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \qquad f'(x_{i_0}) = p'(x_{i_0}),$$

to dla dowolnego $x \in [a,b]$ istnieje $\xi_x \in [a,b]$ takie, że

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+2)}(\xi_x)}{(n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \cdot (x - x_{i_0})$$

(czynnik $(x - x_{i_0})$ występuje 2 razy).

Dowód. Zauważmy, że dowód jest taki sam, jak w przypadku Twierdzenia 14.2. □

Druga obserwacja jest następująca. Jeżeli p jest wielomianem interpolacyjnym funkcji f na $[a,b]$ z węzłami $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ oraz

$$\int_a^b (x - x_0)(x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)\, dx = 0$$

to dodanie dodatkowego punktu węzłowego x_{n+1} (niekoniecznie różnego od $x_0, \ldots, x_n$) nie zmienia całki. To znaczy, niech q będzie wielomianem interpolacyjnym f z węzłami $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$. Jeżeli x_{n+1} jest różny od wszystkich $x_0, \ldots, x_n$ to oznacza

$$f(x_i) = q(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Jeżeli x_{n+1} pokrywa się z którymś z węzłów x_{x_0} to oznacza to

$$f(x_i) = q(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad f'(x_{i_0}) = q'(x_{i_0}).$$

Wtedy

$$\int_a^b p(x)\, dx = \int_a^b q(x)\, dx.$$

Obserwację najłatwiej uzasadnić posługując się tak zwaną postacią Newtona wielomianu interpolacyjnego, w której dodanie punktu węzłowego nie zmienia istniejącego wielomianu, tylko dodaje nowy składnik wielomianowy. My skorzystamy z tej obserwacji w bardzo konkretnym przypadku, gdy $n = 2$, a dodatkowym punktem węzłowym jest ponownie $\frac{a+b}{2}$. W tym przypadku można po prostu policzyć całki wielomianu interpolacyjnego. Oznaczmy $c = \frac{a+b}{2}$, i dla funkcji f mamy następujące wzory na wielomiany interpolacyjne:

$$p(x) = f(a)\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$$
$$q(x) = f(a)\frac{(x-c)^2(x-b)}{(a-c)^2(a-b)} - f'(c)\frac{4(x-a)(x-c)(x-b)}{(b-a)^2} -$$

$$- f(c)\frac{4(x-a)(x-b)}{(b-a)^2} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)^2}{(b-a)(b-c)^2}.$$

Wystarczy sprawdzić równość całek po $[a, b]$. Sprawdzamy równość całek wielomianów stojących przy poszczególnych współczynnikach $f(a), f(c), f(b)$. Dodatkowo, wielomian stojący przy $f'(c)$ powinien mieć całkę 0. Jako przykład sprawdźmy tą ostatnią całkę ($c = \frac{a+b}{2}$):

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x-a)(x-c)(x-b)\,dx &= \begin{Bmatrix} y = x - c \\ dy = dx \end{Bmatrix} \\
&= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \left(y + \tfrac{b-a}{2}\right) y \left(y - \tfrac{b-a}{2}\right) dx \\
&= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} y \left(y^2 - \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^2\right) dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

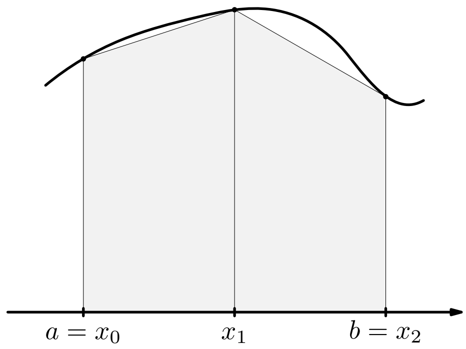
ze względu na nieparzystość funkcji podcałkowej i symetryczny wokół 0 przedział całkowania. Jak już pisaliśmy, równość oszczególnych całek nie jest przypadkowa, i łatwo ją uzasadnić w zupełnie ogólnym przypadku.

Korzystając z dwóch powyższych obserwacji, w metodzie Simpsona zastępujemy wielomian interpolacyjny stopnia 2 z węzłami $a, \frac{a+b}{2}, b$ wielomianem stopnia 3 z tymi samymi węzłami, ale węzłem $\frac{a+b}{2}$ branym „podwójnie" i mamy oszacowanie błędu:

$$\begin{aligned}
E_2 &= \int_a^b (f(x) - p(x))\,dx \\
&= \int_a^b (f(x) - q(x))\,dx \\
&= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}\,(x-a)(x-\tfrac{a+b}{2})^2(x-b)\,dx \\
&= \frac{f^{(4)}(\eta)}{24} \int_a^b (x-a)(x-\tfrac{a+b}{2})^2(x-b)\,dx \\
&= -\frac{f^{(4)}(\eta)}{2880}\,(b-a)^5.
\end{aligned}$$

Rozdrobnienie przedziału całkowania

Dla zmniejszenia błędu zamiast zwiększania stopnia wielomianu interpolacyjnego z reguły dzieli się przedział $[a, b]$ na podprzedziały. Prowadzi to



Rysunek 14.1: Metoda trapezów, $n = 2$.

do przybliżenia całkowanej funkcji f przez funkcje kawałkami wielomianowe. Dla metody trapezów przy podziale przedziału $[a, b]$ na n podprzedziałów równej długości $h = (b - a)/n$ mamy wzór

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) + f(x_{i-1})) = \frac{h}{2}(f + 0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n),$$

gdzie

$$f_i = f(x_i) = f(a + i\,h).$$

Jeżeli $|f''(x)| \leq M$ na $[a, b]$ to błąd przybliżenia w każdym podprzedziale jest $\leq \frac{1}{12} h^3 M$, więc łączny błąd nie przekracza

$$|E_1| \leq \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}.$$

Dla metody Simpsona mamy wzór

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{h}{6} \sum_{i=1}^{n} \Big(f(x_{i-1}) + 4f\big(\tfrac{x_{i-1}+x_i}{2}\big) + f(x_i) \Big) \\ &= \frac{h}{6}(f_0 + 4f_{1/2} + 2f_1 + 4f_{3/2} + \cdots + 2f_{n-1} + 4f_{n-1/2} + f_n) \end{aligned}$$

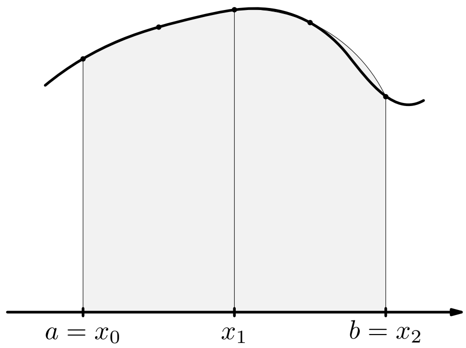
gdzie

$$f_\eta = f(a + \eta \cdot h).$$

Jeżeli $|f^{(4)}(x)| \leq M$ na $[a, b]$, to błąd spełnia

$$|E_2| \leq \frac{(b-a)^5 M}{2880 \cdot n^4}.$$

Zauważmy: dla metody trapezów i podziału $[a, b]$ na $2n$ podprzedziałów



Rysunek 14.2: Metoda Simpsona, $n = 2$.

mamy $(2n + 1)$ ewaluacji funkcji f i błąd nie większy niż

$$\frac{(b-a)^3 \sup\{|f''(x)| : x \in [a,b]\}}{48\, n^2}.$$

Dla metody Simpsona i podziału $[a, b]$ na n podprzedziałów mamy $(2n - 1)$ ewaluacji funkcji f (czyli podobnie) i błąd nie większy niż

$$\frac{(b-a)^5 \sup\{|f^{(4)}(x)| : x \in [a,b]\}}{2880\, n^4}.$$

W zależności od zachowania się 2 i 4 pochodnych i oczekiwanej dokładności jedna lub druga metoda będzie korzystniejsza.

Kwadratury Gaussa

Do tej pory rozważaliśmy metody całkowania postaci

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i), \qquad x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b] \tag{14.7}$$

gdzie punkty węzłowe $x_0, \ldots, x_n$ były równomiernie rozłożone na przedziale $[a, b]$, a współczynniki α_i były tak zoptymalizowane, że wzór był dokładny dla wielomianów stopnia $\leq n$. Jak mówiliśmy, są to tak zwane metody Newtona-Cotesa. Jeżeli rozmieszczenie punktów węzłowych x_i też poddamy optymalizacji, to można uzyskać wzór który jest dokładny dla wielomianów wyższego stopnia. Mamy następujące twierdzenie

Twierdzenie 14.5 (Kwadratura Gaussa). *Dla danego przedziału $[a, b]$ i $n \geq 0$ istnieją punkty $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (zależne tylko od $[a, b]$ i n) takie, że wzór*

(14.7) *gdzie*

$$\alpha_i = \int_a^b \varphi_i(x)\,dx, \quad \varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

jest dokładny dla wielomianów stopnia $\leq 2n + 1$.

Z jakiegoś powodu metody przybliżonego numerycznego całkowania nazywają się kwadraturami.

Metoda Monte Carlo

Mając funkcję nieujemną (i, oczywiście, ograniczoną) f na $[a, b]$ możemy postępować następująco. Wyznaczmy ograniczenie f od góry, powiedzmy $f(x) \leq M$. Następnie generujemy losowo n punktów (x_i, y_i) w prostokącie $[a, b] \times [0, M]$ („rzucamy" losowo n punktów na prostokąt). Rozkład prawdopodobieństwa powinien być jednostajny (czyli prawdopodobieństwo, że punkt wpadnie w jakiś obszar powinno być proporcjonalne do pola powierzchni tego obszaru), a wszystkie liczby losowe x_i, y_i, $i = 1, \ldots, n$ powinny być generowane niezależnie (niezależne zmienne losowe). Następnie zliczamy wszystkie przypadki, w których $y_i < f(x_i)$. To są te losowo rzucone punkty, które wpadły w obszar pod wykresem funkcji f, i niech ich będzie m. Wtedy proporcja $\frac{m}{n}$ powinna być taka sama, jak proporcja pola pod wykresem do pola całego prostokąta

$$\frac{m}{n} \simeq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)\cdot M}.$$

Taka metoda liczenia całki nazywa się metodą Monte Carlo. W niektórych zastosowaniach (na przykład przy pomiarach wielkości elektrycznych) tego typu metody są stosowane.

Rozdział 15

Ciągi i szeregi funkcyjne

Niech f_n, $n = 1, 2, \ldots$ będą funkcjami określonymi na pewnym zbiorze E. Mówimy, że tworzą one ciąg funkcyjny na E. Zauważmy, że dla dowolnego ustalonego punktu $x \in E$ mamy ciąg liczbowy $\{f_n(x)\}$. Ciąg taki może być zbieżny lub nie. Jeżeli dla każdego $x \in E$ istnieje granica $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, to mówimy, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo. Podobnie, jeżeli dla każdego $x \in E$ szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny, to mówimy, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny punktowo na E.

Naszym celem jest zbadanie możliwości zamiany kolejności wykonywania działań analitycznych na funkcjach. Na przykład różniczkowanie szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem („wejście” z pochodną pod znak sumy).

Przykłady: (a) Rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, q^n.$$

Ten szereg jest zbieżny dla $|q| < 1$ (można zastosować na przykład kryterium d'Alemberta), ale jaka jest jego suma? Napiszmy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{dla } x \in (-1, 1).$$

Pochodną funkcji f łatwo policzyć: $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Gdybyśmy mogli różniczkować szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ wyraz za wyrazem, to

$$\frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n.$$

Otrzymalibyśmy więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, q^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad \text{dla } |q| < 1.$$

(b) Przypuśćmy, że szukamy funkcji f dla której

$$f'(x) = \alpha\, f(x). \tag{15.1}$$

Spróbujmy znaleźć f w postaci szeregu potęgowego $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Gdybyśmy mogli szereg różniczkować wyraz za wyrazem to, podstawiając wynik do równania (15.1)

$$f'(x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\, a_n\, x^n.$$

Widać, że wystarczy znaleźć takie współczynniki a_n, aby spełnione było równanie

$$(n+1)\, a_{n+1} = \alpha\, a_n, \quad \text{dla } n = 0, 1, \ldots.$$

Jest to równanie rekurencyjne, które łatwo można rozwiązać:

$$a_{n+1} = \alpha\, \frac{a_n}{n+1} \;\Rightarrow\; a_n = \alpha^n\, \frac{a_0}{n!}.$$

Otrzymalibyśmy więc rozwiązanie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0\, \frac{\alpha^n}{n!}\, x^n = a_0\, e^{\alpha x}. \tag{15.2}$$

Zauważmy, że chociaż nie wiemy na razie, czy powyższe rozumowanie jest prawidłowe, to znaczy czy w powyższej sytuacji istotnie szereg potęgowy można różniczkować wyraz za wyrazem, to funkcja dana w (15.2) rzeczywiście spełnia równanie (15.1)

(c) Niech ciąg funkcyjny będzie dany wzorem

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}.$$

Zauważmy, że dla każdego ustalonego $x \in \mathbf{R}$ ciąg zbiega $f_n(x) \to 0$, gdy $n \to \infty$. Wyrazy ciągu są funkcjami różniczkowalnymi, i $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$. Ciąg funkcji pochodnych nie zbiega więc do pochodnej granicy ciągu, bo, na przykład $f_n'(0) = \sqrt{n} \nrightarrow 0$. Widzimy więc, że w tym wypadku granica pochodnych nie jest pochodną granicy.

(d) Rozważmy ciąg funkcyjny

$$f_n(x) = n\, x\, (1 - x^2)^n, \quad \text{dla} \quad 0 \le x \le 1.$$

Ciąg ten ma granicę w każdym punkcie, i tą granicą jest funkcja $f(x)$ stale równa 0:

$$f_n(0) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in (0,1].$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)\,dx &= n \int_0^1 x\,(1-x^2)^n\,dx \\
&= -\frac{n}{2}\int_1^0 t^n\,dt \\
&= \frac{n}{2}\int_0^1 t^n\,dt \\
&= \frac{n}{2}\,\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 \\
&= \frac{n}{2\,n+2} \to \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

chociaż $\int_0^1 0\,dx = 0$. W tym wypadku całka z granicy nie jest równa granicy całek.

Przykłady (a) i (b) pokazują, że zamiana kolejności operacji analitycznych, na przykład różniczkowanie szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem, może być przydatna, natomiast przykłady (c) i (d) pokazują, że sprawa jest delikatna, i czasem taka zamiana nie jest możliwa. Teraz zbadamy to zagadnienie dokładniej, i, na przykład, pokażemy, że szeregi potęgowe można różniczkować wyraz za wyrazem.

Definicja 15.1. *Ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na zbiorze E, jeżeli*

$$\forall\ \epsilon > o \quad \exists\ n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\ n \geq n_0 \quad \forall\ x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

(czyli nie tylko ciąg jest zbieżny w każdym punkcie, ale n_0 można wybrać niezależnie od $x \in E$). Podobnie, szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$jest zbieżny jednostajnie na E, jeżeli ciąg sum częściowych

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

jest zbieżny jednostajnie.

Warto chwile zastanowić się nad tą definicją. Zbieżność ciągu jednostajna na zbiorze E oznacza, że ciąg jest zbieżny w każdym punkcie, oraz, dodatkowo, że prędkość zbieżności jest równomierna we wszystkich punktach. Mając dane $\epsilon > 0$ możemy dobrać $n_0 \in \mathbf{N}$, które będzie dobre we wszystkich punktach $x \in E$.

Twierdzenie 15.2. *Ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze E wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia jednostajnie warunek Cauchy'ego, czyli gdy*

$$\forall\ \epsilon > o \quad \exists\ n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\ m, n \geq n_0 \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Dowód. Jeżeli f_n zbiega jednostajnie do f, to dla $\epsilon > 0$ można znaleźć $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że $\forall\ m, n \geq n_0 \quad \forall\ x \in E$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wtedy

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

a więc widzimy, że ze zbieżności jednostajnej wynika jednostajny warunek Cauchy'ego. Teraz w drugą stronę. Jeżeli spełniony jest jednostajny warunek Cauchy'ego, to jest też spełniony warunek Cauchy'ego w każdym punkcie $x \in E$. W takim razie w każdym punkcie istnieje granica $f(x)$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \forall\ x \in E.$$

Niech teraz $\epsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbf{N}$ będzie takie, że dla $m, n \geq n_0$ i $x \in E$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Gdy $m \to \infty$ to ciąg liczbowy po lewej stronie jest zbieżny do $|f_n(x) - f(x)|$, a więc także

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Ponieważ powyższe jest spełnione dla wszystkich $n \geq n_0$ i $x \in E$, a $\epsilon > 0$ było dowolne, to $f_n \to f$ jednostajnie. $\square$

Twierdzenie 15.3. *Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła.*

Dowód. Niech $f_n \to f$ jednostajnie na zbiorze E, oraz niech wszystkie funkcje f_n będą ciągłe. Niech $x \in E$, i niech $\epsilon > 0$ będzie dane. Wtedy istnieje $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że

$$\forall\ n \geq n_0 \quad \forall\ y \in E \quad |f_n(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Funkcja f_{n_0} jest ciągła, więc istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\forall\ y \in E \quad |y - x| < \delta \ \Rightarrow \ |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_{n_0}(y)| + \\ + |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Funkcja graniczna f jest więc ciągła w punkcie x. □

Przykład: Niech $f_n(x) = x^n$ na $[0, 1]$. Każda z funkcji f_n jest ciągła na przedziale $[0, 1]$. Jak łatwo zauważyć

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 : & x = 1 \\ 0 : & x < 1. \end{cases}$$

Granica ciągu jest więc funkcją nieciągłą (w punkcie 1), a w takim razie f_n nie może być zbieżny jednostajnie.

Twierdzenie 15.4. *Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych na $[a, b]$ w sensie Riemanna i niech $f_n \to f$ jednostajnie na $[a, b]$. Wtedy f też jest całkowalna w sensie Riemanna oraz*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx. \tag{15.3}$$

Dowód. Niech $\epsilon > 0$ będzie dane. Z jednostajnej zbieżności ciągu $\{f_n\}$ wynika, że istnieje $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że

$$\forall\ n \geq n_0 \quad \forall\ x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{2\,(b - a)}.$$

Wynika stad, że

$$\forall\ n \geq n_0 \quad \forall\ x \in [a, b] \quad f_n(x) - \frac{\epsilon}{2\,(b - a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\epsilon}{2\,(b - a)},$$

a więc, w szczególności f jest funkcją ograniczoną. Weźmy podział P odcinka $[a, b]$, wtedy

$$U(P, f) \leq U\left(P, f_n + \frac{\epsilon}{2\,(b - a)}\right),$$

a więc

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \int_a^b \left(f_n(x) + \frac{\epsilon}{2\,(b-a)}\right) dx = \int_a^b f_n(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2}.$$

Podobnie,

$$L(P,f) \ge L\left(P, f_n - \frac{\epsilon}{2\,(b-a)}\right) \;\Rightarrow\; \underline{\int_a^b} f_n(x)\,dx \ge \int_a^b f_n(x)\,dx - \frac{\epsilon}{2}.$$

Mamy więc

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f_n(x)\,dx \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ponieważ ϵ było dowolne, więc całki dolna i górna muszą być równe, a więc funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna. Pozostała jeszcze do pokazania równość (15.3). Niech, znowu, $\epsilon > 0$ będzie dowolne, i niech $n_0 \in \mathbf{N}$ będzie takie, że

$$\forall\; n \ge n_0 \quad \forall\; x \in [a,b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{(b-a)}.$$

Wtedy

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^b \big(f(x) - f_n(x)\big)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \le \epsilon.$$

Ponieważ powyższe oszacowanie zachodzi dla dowolnego $n \ge n_0$ więc otrzymujemy (15.3). $\square$

Uwaga: Powyższe twierdzenie udowodniliśmy dla całek właściwych. Dla całek niewłaściwych niekoniecznie jest prawdziwe. Na przykład, niech

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{x}{n}\right): & |x| \le \frac{n\pi}{2} \\ 0: & |x| > \frac{n\pi}{2} \end{cases}$$

Widać, że $f_n \to 0$ jednostajnie na całej prostej $\mathbf{R}$, ale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{x}{n}\right) dx = \left\{\frac{x}{n} = t\right\} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = \sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Widzimy więc, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx \nrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot dx = 0.$$

W przypadku całek niewłaściwych, żeby przechodzić do granicy pod znakiem całki trzeba więc założyć coś więcej niż tylko zbieżność jednostajną ciągu.

Wniosek 15.5. *Jeżeli funkcje f_n są całkowalne w sensie Riemanna na $[a,b]$ i*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \textit{jednostajnie na} \quad [a,b],$$

to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Następujące twierdzenie podaje warunki pod jakimi można „wejść" z różniczkowaniem pod znak granicy.

Twierdzenie 15.6. *Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji różniczkowalnych na przedziale $[a,b]$, takim, że ciąg pochodnych $\{f_n'\}$ jest zbieżny jednostajnie na $[a,b]$. Jeżeli sam ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny chociaż w jednym punkcie, to jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji f, różniczkowalnej na $[a,b]$, oraz*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Dowód. Niech ciąg $\{f_n\}$ będzie zbieżny w punkcie $x \in [a,b]$. Istnienie takiego punktu jest w założeniach. Niech $\epsilon > 0$ i niech $n_0 \in \mathbf{N}$ będzie takie, że dla wszystkich $m,n \geq n_0$ zachodzi

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2},$$

oraz

$$|f_n'(y) - f_m'(y)| < \frac{\epsilon}{2\,(b-a)}, \quad y \in [a,b].$$

Skorzystaliśmy z obu założeń, zbieżności w jednym punkcie ciągu $\{f_n\}$ oraz zbieżności jednostajnej ciągu pochodnych. Następnie ustalmy pewne $m,n \geq n_0$, i do funkcji $\Phi(y) = f_n(y) - f_m(y)$ zastosujmy twierdzenie o wartości średniej (oczywiście Φ jest różniczkowalna).

$$\begin{aligned}
|\Phi(y)| &= |\Phi(y) - \Phi(x) + \Phi(x)| \\
&\leq |\Phi(y) - \Phi(x)| + |\Phi(x)| \\
&< |\Phi'(\theta)| \cdot |y-x| + |\Phi(x)| \quad \text{(dla pewnego } \theta \text{ pomiędzy } y \text{ i } x) \\
&< \frac{\epsilon}{2\,(b-a)}\,|y-x| + \frac{\epsilon}{2} \qquad (15.4)\\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Ponieważ powyższe oszacowanie jest prawdziwe dla wszystkich $m, n \geq n_0$ i dla wszystkich $y \in [a, b]$, to ciąg $\{f_n\}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego, a więc, zgodnie z Twierdzeniem 15.2, jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji f. Funkcja f, jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest też ciągła. Pokażemy, że jest także różniczkowalna i jej pochodna jest granicą ciągu $\{f_n'\}$. Ustalmy punkt $x \in [a, b]$ i niech funkcje φ oraz φ_n będą dane wzorami

$$\varphi(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} & : y \neq x, \\ A = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) & : y = x, \end{cases} \qquad \varphi_n(y) = \begin{cases} \frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x} & : y \neq x, \\ f_n'(x) & : y = x. \end{cases}$$

Zauważmy, że w każdym punkcie $y \in [a, b]$ mamy $\varphi_n(y) \to \varphi(y)$. Zauważmy też, że z definicji wynika natychmiast, że funkcje φ_n są ciągłe w każdym punkcie, a funkcja φ jest ciągła w każdym punkcie różnym od x. Teraz będziemy chcieli pokazać ciągłość funkcji φ w punkcie x. Ciągłość w x oznaczałaby dokładnie, że f jest różniczkowalna w punkcie x, i jej pochodna w tym punkcie jest granicą pochodnych funkcji f_n. Naszym celem obecnie będzie pokazanie, że zbieżność $\varphi_n \to \varphi$ jest jednostajna na $[a, b]$, z czego wynikać będzie ciągłość φ (przypomnijmy, że funkcje φ_n są ciągłe). Niech $m, n \in \mathbf{N}$ będą dowolne, $y \neq x$ i obliczmy

$$\begin{aligned} \varphi_n(y) - \varphi_m(y) &= \frac{\big(f_n(y) - f_m(y)\big) - \big(f_n(x) - f_m(x)\big)}{(y - x)} \\ &= \frac{\big(f_n'(\theta) - f_m'(\theta)\big)\,(y - x)}{(y - x)}, \end{aligned}$$

gdzie w liczniku zastosowaliśmy twierdzenie o wartości średniej dla funkcji $\Phi = f_n - f_m$, a θ jest punktem pośrednim pomiędzy y i x. Zgodnie z (15.4) mamy więc

$$|\varphi_n(y) - \varphi_m(y)| = |f_n'(\theta) - f_m'(\theta)| < \epsilon,$$

jeżeli tylko $n_0 \in \mathbf{N}$ jest wystarczająco duże, i $m, n \geq n_0$, a $y \neq x$. Widzimy więc, że ciąg $\{\varphi_n\}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego na zbiorze $E = [a, b] \setminus \{x\}$, a więc jest na tym zbiorze jednostajnie zbieżny. Również w punkcie x ciąg jest zbieżny:

$$\varphi_n(x) = f_n'(x) \to A = \varphi(x). \tag{15.5}$$

Oczywiście skoro ciąg $\{\varphi_n\}$ jest zbieżny jednostajnie na $[a, b] \setminus \{x\}$ i dodatkowo zbieżny w punkcie x, to jest jednostajnie zbieżny na całym przedziale $[a, b]$. Wynika to wprost z obserwacji, że jeżeli ciąg jest zbieżny jednostajnie na zbiorze E_1 i jednostajnie na zbiorze E_2, to jest też zbieżny jednostajnie na sumie zbiorów $E_1 \cup E_2$. Odcinek $[a,b]$ jest sumą zbiorów $[a,b] \setminus \{x\}$ oraz zbioru jednopunktowego $\{x\}$. Zbieżność jednostajną na pierwszym zbiorze właśnie pokazaliśmy, a na zbiorze jednopunktowym zbieżność jednostajna oznacza dokładnie zbieżność w tym punkcie, czyli (15.5).

Tak jak wspomnieliśmy już wcześniej, skoro ciąg funkcji ciągłych $\{\varphi_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $\{\varphi\}$, to granica też jest funkcją ciągłą, w szczególności ciągłą w punkcie x. Oznacza to, że

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = A = \varphi(x) = \lim_{y\to x} \varphi(y) = \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x).$$

Punkt $x \in [a,b]$ był dowolny, a więc pokazaliśmy, że w każdym punkcie $x \in [a,b]$ zachodzi

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

□

Wprost z powyższego twierdzenia wynika następujący wniosek

Wniosek 15.7. *Niech ciąg $\{f_n\}$ będzie zbieżny do f jednostajnie na przedziale $[a,b]$, i niech $F_n' = f_n$, czyli niech F_n będą funkcjami pierwotnymi funkcji f_n. Załóżmy dodatkowo, że dla jakiegoś $x \in [a,b]$ ciąg $F_n(x)$ jest zbieżny. Wtedy ciąg funkcji pierwotnych $\{F_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji F, i funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f:*

$$F'(x) = f(x), \qquad x \in (a,b).$$

Można to sformułować w języku całek nieoznaczonych. Niech $f_n \to f$ jednostajnie na $[a,b]$, i niech ciąg

$$\int f_n(x)\,dx \tag{15.6}$$

będzie zbieżny w jakimś punkcie przedziału $[a,b]$. Wtedy ciąg (15.6) *jest zbieżny w każdym punkcie przedziału $[a,b]$ (nawet jednostajnie na $[a,b]$), oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int \lim_{n\to\infty} f(x)\,dx.$$

Zwróćmy jeszcze uwagę, że założenie, że ciąg (15.6) jest zbieżny przynajmniej w jednym punkcie przedziału $[a,b]$ jest istotne, i tak naprawdę sprowadza się do wyboru stałych całkowania dla ciągu całek nieoznaczonych.

Następujące twierdzenie jest bardzo wygodnym w praktyce kryterium zbieżności jednostajnej.

Twierdzenie 15.8 (Kryterium Weierstrassa)**.** *Jeżeli* $|f_n(x)| \leq a_n$ *dla* $n = 1, 2, \ldots$ *i* $x \in E$, *oraz szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to szereg funkcyjny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

jest zbieżny jednostajnie na zbiorze E.

Dowód. Ciąg sum częściowych $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ jest zbieżny, czyli spełnia warunek Cauchy'ego:

$$\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\ m > n \geq n_0 \quad |s_m - s_n| = \sum_{k=n+1}^{m} a_k < \epsilon.$$

Mamy, dla każdego $x \in E$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k < \epsilon.$$

Ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ spełnia więc jednostajny warunek Cauchy'ego, jest więc jednostajnie zbieżny. $\square$

Szeregi potęgowe

Udowodnione powyżej twierdzenia zastosujemy do szeregów potęgowych, które stanowią typowy przykład szeregów funkcyjnych. Wiemy, że szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{15.7}$$

jest zbieżny wewnątrz przedziału zbieżności $(x_0 - R, x_0 + R)$ (nie wiadomo w ogólnym przypadku jak jest na końcach $x_0 \pm R$), jeżeli $R > 0$, gdzie

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

przy czym $R = \infty$ jeżeli $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, a jeżeli $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ to $R = 0$, i szereg (15.7) jest zbieżny tylko dla $x = x_0$. Szereg taki definiuje więc funkcję, której dziedziną jest przedział zbieżności szeregu:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{15.8}$$

Twierdzenie 15.9. *1. Szereg potęgowy* (15.8) *jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale domkniętym (zwierającym swoje końce)* $[x_0-r, x_0+r]$ *zawartym wewnątrz przedziału zbieżności, to znaczy* $r < R$*:*

$$[x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 - R, x_0 + R).$$

2. Szereg pochodnych

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}(x - x_0)^n \tag{15.9}$$

ma ten sam promień zbieżności R *co szereg wyjściowy* (15.8), *a więc jest też zbieżny jednostajnie w każdym przedziale domkniętym* $[x_0-r, x_0+r]$ *dla* $r < R$.

3. Szereg potęgowy można więc różniczkować i całkować wyraz za wyrazem wewnątrz przedziału zbieżności $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Dowód. Niech

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

będzie ciągiem sum częściowych. Wtedy dla $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ mamy

$$|a_k (x - x_0)^k| = |a_k|\, |x - x_0|^k \le |a_k|\, r^k. \tag{15.10}$$

Zauważmy, że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^n$$

jest zbieżny, wynika to z kryterium Cauchy'ego zbieżności:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|\, r^n} = r \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{r}{R} < 1.$$

W takim razie, zgodnie z (15.10) i kryterium Weierstrassa szereg potęgowy (15.8) jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[x_0 - r, x_0 + r]$. Udowodniliśmy więc część 1. twierdzenia.
2. Mamy

$$\sqrt[n]{|a_{n+1}|(n+1)} = \sqrt[n]{|a_{n+1}|}\ \sqrt[n]{n+1}. \tag{15.11}$$

Nietrudno pokazać, że granica górna (skończona lub nieskończona) ciągu (15.11) jest taka sama, jak granica górna ciągu $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, a więc promień zbieżności szeregu pochodnych (15.9) jest taki sam, jak promień zbieżności R szeregu (15.8). Szereg pochodnych jest więc również zbieżny jednostajnie

na każdym przedziale $[x_0 - r, x_0 + r]$, dla $r < R$.
3. Różniczkowanie i całkowanie wyraz za wyrazem szeregu potęgowego w każdym punkcie wewnątrz przedziału zbieżności wynika z Twierdzeń 15.4 i 15.6, z faktu, że dla każdego punktu $x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$ możemy znaleźć $r < R$ takie, że $x_1 \in [x_0 - r, x_0 + r]$, oraz z udowodnionych już części 1. i 2. $\square$

Z powyższego twierdzenia mamy następujący wniosek

Wniosek 15.10. *Szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n$, którego promień zbieżności $R > 0$ określa na przedziale $(x_0 - R, x_0 + R)$ funkcję nieskończenie wiele razy różniczkowalną*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n, \tag{15.12}$$

dla której

$$f^{(n)}(x_0) = n!\,a_n.$$

Dowód. Różniczkowalność jednokrotna wynika z poprzedniego twierdzenia, a różniczkowalność nieskończenie wiele razy przez indukcję, gdyż szereg pochodnych jest każdorazowo również szeregiem potęgowym, o tym samym promieniu zbieżności. Różniczkując n-razy szereg (15.12) wyraz za wyrazem otrzymujemy, dla $x \in (x_0 - R, x_0 + r)$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k\,(k-1) \cdot \cdots \cdot (k - n + 1)\,a_k\,(x - x_0)^{k-n}.$$

Wstawiając $x = x_0$ otrzymujemy

$$f^{(n)}(x_0) = n\,(n-1) \cdot \cdots \cdot 1\,a_n = n!\,a_n.$$

$\square$

Wniosek 15.11. *Szereg Taylora funkcji danej szeregiem* (15.12) *to ten sam szereg.*

Przykład: Rozwiniemy w szereg Taylora funkcję $f(x) = \frac{1}{1-x}$ wokół punktu $x_0 = \frac{1}{2}$. Można to zrobić prosto

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{\frac{1}{2} - (1 - \frac{1}{2})} = 2\,\frac{1}{1 - 2(x - \frac{1}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n.$$

Wiemy, że szereg potęgowy po prawej jest zbieżny dla $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$, jego suma jest równa $\frac{1}{1-x}$. W takim razie, zgodnie z powyższym wnioskiem, szereg po prawej jest szeregiem Taylora funkcji po lewej. Nie musieliśmy liczyć ani jednej pochodnej.

Wniosek 15.12. *Jeżeli dwa szeregi potęgowe o promieniach zbieżności większych od zera*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n \quad i \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(x-x_0)^n$$

są sobie równe w jakimś przedziale $(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$, to muszą być identyczne:

$$a_n \equiv b_n \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Przykłady: (a) Niech $f(x) = \arctan(x)$. Rozwiniemy funkcję f w szereg MacLaurina ($x_0 = 0$).

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= \int \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \int \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n \,dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n}\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2\,n+1} \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots .
\end{aligned}$$

Powyższe wynika z faktu, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$ można całkować wyraz za wyrazem. Wybierając dla całek wyrazów stałe całkowania równe 0 (tak jak w powyższych obliczeniach), scałkowany szereg jest zbieżny, na przykład w punkcie $x_0 = 0$ do funkcji $\arctan(x)$. Jako wniosek mamy następujący wzór na pochodne

$$\arctan^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! & : n \text{ - nieparzyste} \\ 0 & : n \text{ - parzyste.} \end{cases}$$

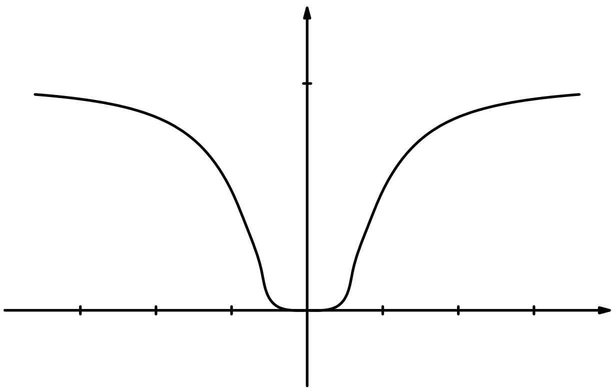
(b) Podobnie znajdziemy rozwinięcie w szereg MacLaurina funkcji $f(x) = \log(1+x)$.

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= \int \frac{dx}{1+x} \\
&= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^n \, dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots
\end{aligned}
$$

(c) Szereg Taylora może być zbieżny, ale do innej funkcji. Niech, na przykład

$$
f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0. \end{cases} \tag{15.13}
$$



Rysunek 15.1: Funkcja z przykładu (c).

Funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie. W każdym punkcie różnym od 0 wynika to wprost ze wzoru na f, natomiast w 0 wymaga to sprawdzenia. Obliczymy granicę ilorazu różnicowego w 0, oddzielnie granice prawo- i lewostronną.

$$
\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{-y^2}}{\frac{1}{y}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{2\, y\, e^{y^2}} = 0.
$$

Podobnie obliczamy granicę lewostronną, gdy $x \to 0^-$. Pochodna $f'(0)$ istnieje więc, i jest równa 0. Poza zerem, ze wzoru mamy

$$
f'(x) = \frac{2}{x^3} \, e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0.
$$

Podobnie jak pierwszą pochodną, korzystając z reguły de l'Hôpitala sprawdzamy, że $f''(0) = 0$. Nietrudno zauważyć, że pochodna dowolnego rzędu $f^{(n)}(x)$, $x \neq 0$ jest sumą składników postaci $\frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}}$, więc indukcyjnie można pokazać, że $f^{(n)}(0)$ istnieje dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$, i jest równa 0. Funkcja f jest więc różniczkowalna nieskończenie wiele razy, a jej szereg Taylora w 0 jest szeregiem zerowym

$$0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots = 0.$$

Z drugiej strony $f(x) \neq 0$ dla $x \neq 0$, czyli funkcja nie jest nigdzie, oprócz 0, równa swojemu szeregowi Taylora.

(d) Znajdziemy wzór na sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$. Przedziałem zbieżności tego szeregu, jak się łatwo przekonać jest przedział $(-1, 1)$. Mamy

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \, x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)\,(n+1)\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3\, n\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2\, x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n+2} \right)'' - 3 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n+2} \right)'' - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n+1} \right)' + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} \right)'' - 3 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \right)' + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
&= \left(\sum_{n=3}^{\infty} x^n \right)'' - 3 \left(\sum_{n=2}^{\infty} x^n \right)' + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
&= \left(x^3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)'' - 3 \left(x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' + x \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= \left(\frac{x^3}{1-x} \right)'' - 3 \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' + \frac{x}{1-x} \\
&= \frac{2\, x^3 - 6\, x^2 + 6\, x}{(1-x)^3} - \frac{6\, x - 3\, x^2}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} \\
&= \frac{2\, x^3 - 5\, x^2 + 5\, x}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

Sprawdzanie jednostajnej zbieżności

Wypiszmy proste fakty, które w większości wypadków pozwalają nam rozstrzygnąć czy zbieżność ciągu funkcji jest jednostajna. Niech $f_n(x) \to f(x)$

w każdym punkcie $x \in E$.

(a) Jeśli $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ dla każdego $x \in E$ i $\alpha_n \to 0$, to $f_n \to f$ jednostajnie na E.

(b) Jeżeli istnieje ciąg $\{x_n\} \subset E$ taki, że $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ nie jest zbieżny do 0, to f_n nie jest zbieżny jednostajnie do f na E.

(c) Jeżeli $E = E_1 \cup E_2$ oraz $f_n \to f$ jednostajnie na E_1 oraz jednostajnie na E_2, to $f_n \to f$ jednostajnie na E. W praktyce oznacza to, że zbieżność jednostajną można sprawdzać przedziałami.