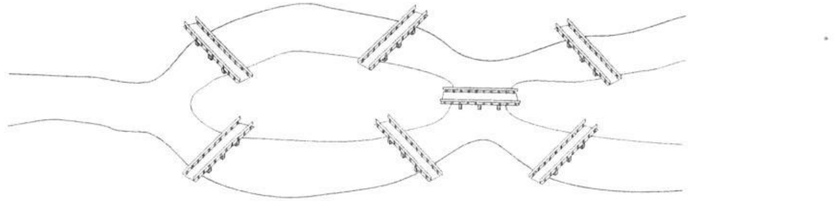
4. Geometria płaska – pojęcia wstępne

Punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt, figura wypukła, figura ograniczona

4.1. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty. Ile różnych prostych można poprowadzić przez te punkty, jeżeli:
a) wszystkie punkty są współliniowe
b) tylko trzy punkty są współliniowe
c) dowolne trzy punkty nie są współliniowe?

4.2. Na płaszczyźnie mamy dane dwie proste równoległe k, l. Na prostej k leżą trzy punkty: A_1, A_2, A_3, a na prostej l – cztery punkty: B_1, B_2, B_3, B_4. Ile jest odcinków CD takich, że $C \in \{A_1, A_2, A_3\}$, $D \in \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$?

4.3. Wielki matematyk szwajcarski Leonard Euler (XVIII w.) mieszkał w Królewcu. Części tego miasta, przez które przepływała rzeka, były połączone siedmioma mostami:



Euler zauważył, że nie można tak zaplanować spaceru, aby przejść przez wszystkie mosty tylko jeden raz (sprawdź to!). Czy można dobudować jeden most tak, aby taki spacer był możliwy? Jeśli tak, to dorysuj go i zaznacz przykładową trasę takiego spaceru.

4.4. Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Ile jest półprostych wyznaczonych przez te punkty?

4.5. Punkty C, D dzielą odcinek AB o długości 27 cm na trzy odcinki, których stosunek długości jest równy 5 : 3 : 1. Jaka jest długość każdego z tych odcinków?

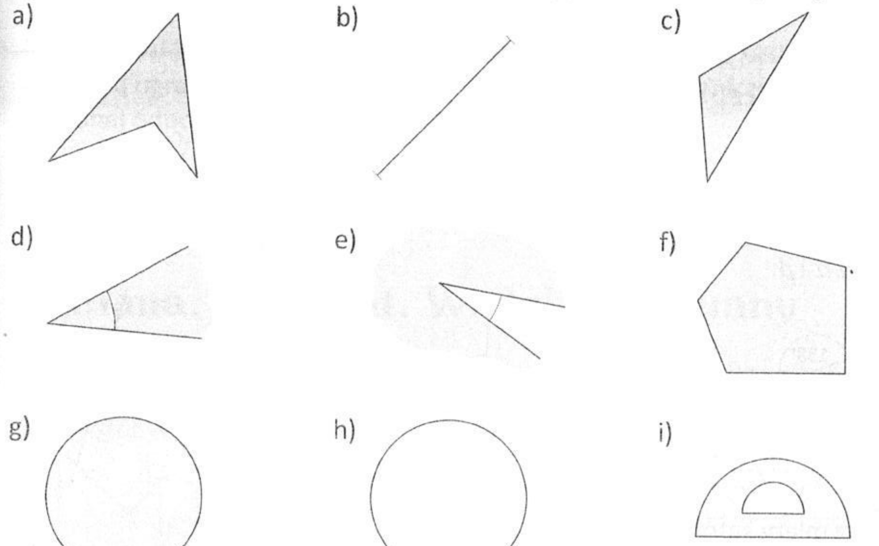
4.6. Punkty C i D dzielą odcinek AB na takie trzy odcinki AC, CD i DB, dla których $|AC| : |CD| : |DB| = 5 : 8 : 3$. Wiedząc, że $|CD| = 32$ cm, oblicz długość odcinka AB i DB.

4.8. **4.7.** Punkt C należy do odcinka AB. Środkiem odcinka AC jest punkt D, a środkiem odcinka BC jest punkt E. Oblicz długość odcinka AB, wiedząc, że $|DE| = 11$ cm.

4.9. **4.8.** Punkty A, B, C, D należą do jednej prostej i są położone jak na rysunku poniżej. Wiedząc, że $|AD| = 12$ cm, $|AC| = 6$ cm i $|BD| = 8$ cm, oblicz długości odcinków AB, BC, CD.

4.10. **4.9.** Na prostej AB leży punkt C. Ustal wzajemne położenie punktów A, B, C, jeśli:
a) $|AC| = |AB| + |BC|$
b) $|AB| > |BC|$
c) $|AB| - |BC| = |AC|$
d) $|AC| < |AB|$

4.11. **4.10.** Które figury na poniższym rysunku są wypukłe, a które są wklęsłe?



4.12. **4.11.** Przedstaw: a) odcinek, b) prostą, c) trójkąt, d) prostokąt – raz jako sumę figur wypukłych, a raz jako sumę figur wklęsłych.

4.14. **4.12.** Punkty niewspółliniowe A, B, C należą do figury wypukłej F. Jakie inne punkty należą na pewno do tej figury?

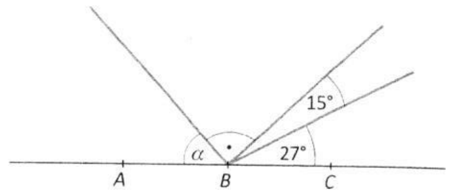
4.16. **4.13.** Wyznacz miary kątów AOB i BOC, wiedząc, że $|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle BOC| = 225°$ i przedłużenie półprostej OA dzieli kąt BOC w stosunku 1 : 3. Rozpatrz dwa przypadki.

4.17. **4.14.** Z punktu A prowadzimy cztery różne półproste: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$. Z czterech kątów: BAC, CAD, DAE, EAB każdy następny jest dwa razy większy od poprzedniego. Wyznacz te kąty.

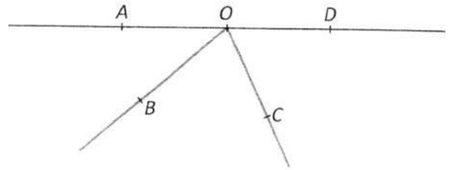
4.18. **4.15.** Przez wierzchołek kąta: a) rozwartego, b) ostrego AOB poprowadzono dwie proste prostopadłe do ramion. Oblicz $|\sphericalangle AOB|$, wiedząc, że te proste tworzą kąt ostry $25°$.

4.20. **4.16.** Miara $\sphericalangle AOB$ wynosi: a) α, b) $60° - \alpha$, c) $45° + \alpha$, d) $70° - 2\alpha$. Oblicz miarę kąta przyległego do $\sphericalangle AOB$.

4.21. **4.17.** Oblicz α, wiedząc, że punkty A, B, C są współliniowe.

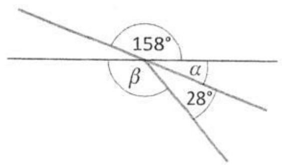


4.22. **4.18.** Wiedząc, że $|\sphericalangle AOC| = 115°$, $|\sphericalangle DOB| = 140°$, oblicz $|\sphericalangle AOB|$, $|\sphericalangle BOC|$ i $|\sphericalangle COD|$.

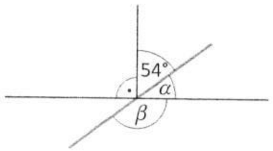


4.23. **4.19.** Oblicz α i β:

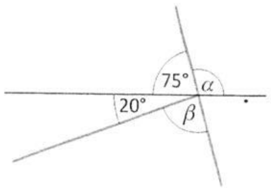
a)



b)

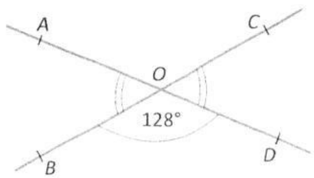


c)

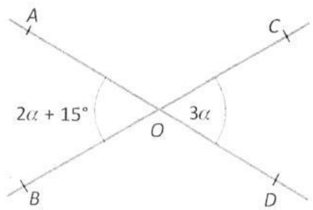


4.26. **4.20.** Oblicz miary kątów wierzchołkowych: $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle COD$.

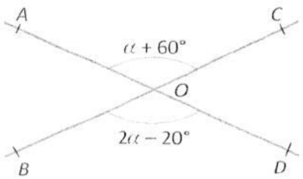
a)



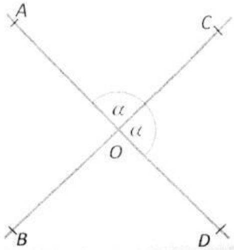
b)



c)



d)



4.28. **4.21.** Na płaszczyźnie danych jest: a) 3, b) 4, c) 7, d) n punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Przez każde dwa punkty prowadzimy prostą. Ile prostych otrzymamy?

4.30. **4.22.** Dwie przecinające się proste wyznaczają cztery kąty wypukłe, z których jeden jest osiem razy większy od kąta do niego przyległego. Wyznacz miary tych kątów.

4.31. **4.23.** Dwie przecinające się proste wyznaczają cztery kąty wypukłe, przy czym różnica kątów przyległych wynosi $44°$. Wyznacz miary tych kątów.

4.32. **4.24.** Które z podanych figur są figurami ograniczonymi?

a) półpłaszczyzna
b) wielokąt
c) koło
d) suma dwóch prostych równoległych

4.33. **4.25.** Podaj przykład dwóch figur nieograniczonych, których różnica jest:

a) figurą ograniczoną
b) figurą nieograniczoną.

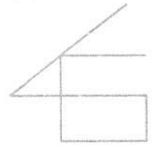
Wykonaj odpowiedni rysunek.

Łamana. Wielokąt. Wielokąt foremny

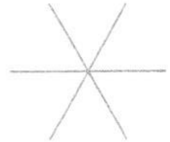
4.26. Które z poniższych figur są łamanymi, które są łamanymi zwyczajnymi, a które łamanymi zwyczajnymi zamkniętymi? Odpowiedź uzasadnij.

a)

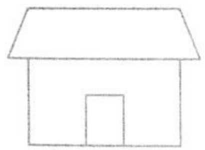
b)



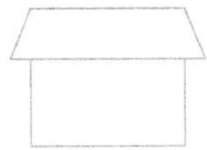
c)



d)

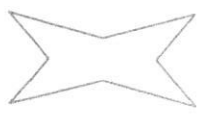


e)

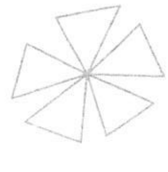


f)

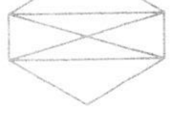
g)



h)



i)



4.27. Wyznacz liczbę przekątnych:

a) sześciokąta
b) ośmiokąta
c) dwunastokąta
d) piętnastokąta.

4.28. W jakim wielokącie liczba przekątnych jest:

a) trzy razy większa od liczby boków
b) pięć i pół raza większa od liczby boków
c) osiem razy większa od liczby boków
d) jedenaście razy większa od liczby boków?

4.29. Różnica liczby boków dwóch wielokątów jest równa 1, a różnica liczby przekątnych tych wielokątów jest równa 16. Jakie to wielokąty?

4.30. Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów, $n \geq 3$, z których dowolne trzy nie są współliniowe. Wyznacz n, wiedząc, że liczba wszystkich odcinków łączących te punkty jest równa:

a) 21 b) 45 c) 55 d) 78.

4.31. Na przyjęciu spotkało się 20 osób. Ile nastąpiło powitań, jeśli każda osoba przywitała się z każdą inną osobą.

4. 32. Na brzegu jeziora mieszkało 16 rybaków. Mroźną zimą, gdy gruba tafla lodu pokryła jezioro, rybacy, odwiedzając się nawzajem, wydeptali ścieżki tak, że domy dowolnych dwóch rybaków były połączone ścieżką. Ile było ścieżek?

Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta

4.33. Na ile części rozcinają płaszczyznę trzy różne proste? Rozpatrz wszystkie przypadki.

4.34. Ile par kątów wierzchołkowych (o miarach mniejszych niż 180°) i ile par kątów przyległych wyznaczają dwie przecinające się proste?

4.35. Narysuj trzy proste k, l, m, których punkty przecięcia są wierzchołkami trójkąta. Zaznacz na zewnątrz tego trójkąta punkt A. Wyznacz odcinki, których długości są odległościami punktu A od prostych k, l, m.

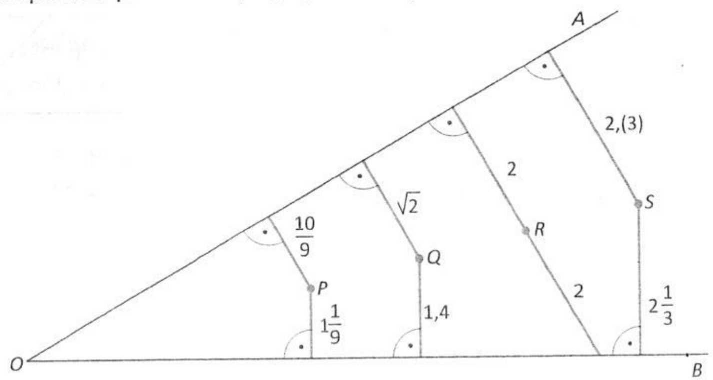
4.36. Odległość między dwiema prostymi równoległymi k i l jest równa 7 cm. Punkt A leży w odległości 4 cm od prostej k. Jaka jest odległość punktu A od prostej l? Rozważ dwa przypadki.

4.38. **4.37.** Dany jest odcinek AB oraz punkty: C_1, C_2, C_3, C_4 i C_5 spełniające następujące warunki:

a) $|C_1A| = \frac{20}{9}$ i $|C_1B| = 2\frac{2}{9}$
b) $|C_2A| = \frac{3}{2}$ i $|C_2B| = 1,(5)$
c) $|C_3A| = \sqrt{6}$ i $|C_3B| = 2\sqrt{3}$
d) $|C_4A| = 2\sqrt{2}$ i $|C_4B| = \sqrt{8}$
e) $|C_5A| = \sqrt{3} - 1$ i $|C_5B| = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

Które z punktów C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 należą do symetralnej odcinka AB?

4.39. **4.38.** Które spośród punktów P, Q, R, S należą do dwusiecznej kąta AOB?



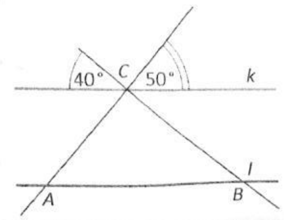
4.40. **4.39.** Jaką miarę ma kąt, którego dwusieczna:

a) jest prostopadła do ramion tego kąta
b) dopełnia każde z ramion kąta do prostej
c) pokrywa się z ramionami tego kąta?

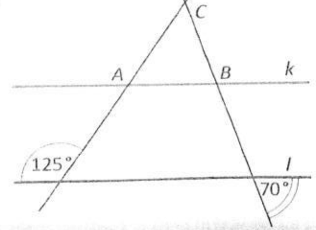
Dwie proste przecięte trzecią prostą. Suma kątów w wielokącie

4.41. **4.40.** Wyznacz miary kątów trójkąta ABC, korzystając z danych na rysunkach oraz wiedząc, że $k \parallel l$:

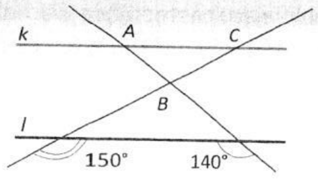
a)



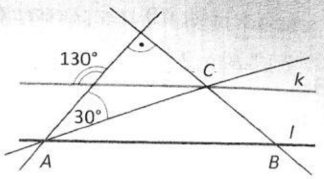
b)



c)

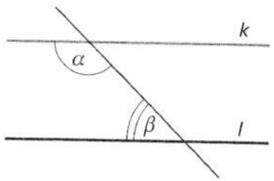


d)

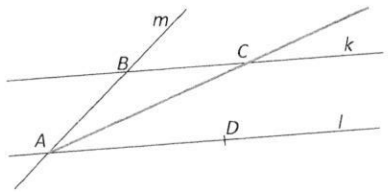


4.41. Z punktu leżącego na zewnątrz kąta ABC o mierze $41°$ poprowadzono dwie proste: jedną równoległą do BC, a drugą prostopadłą do AB. Wyznacz miarę kąta między tymi prostymi.

4.42. Udowodnij, że jeżeli $k \parallel l$, to dwusieczne kątów jednostronnych wewnętrznych α i β są do siebie prostopadłe.



4.43. Prosta m przecina dwie równoległe proste k, l odpowiednio w punktach B i A. Na prostej k zaznaczono punkt C w taki sposób, że $|BC| = |AB|$ (zobacz rysunek obok). Wykaż, że półprosta $\overrightarrow{AC}$ jest dwusieczną kąta DAB.



4.44. W trójkącie ABC dwusieczna kąta B przecina bok AC w punkcie B_1. Przez punkt B_1 prowadzimy równoległą do BC, przecinającą bok AB w punkcie C_1. Wykaż, że $|B_1C_1| = |BC_1|$.

4.45. W kątach przyległych ABC, DBC poprowadzono dwusieczne i prostą, równoległą do AD, która przecina te dwusieczne odpowiednio w punktach E i F, zaś ramię BC przecina w punkcie K. Wykaż, że $|EK| = |KF|$.

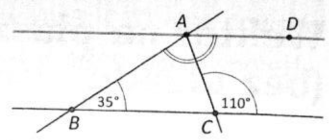
4.46. Przez punkt W, w którym przecinają się dwusieczne kątów A i B trójkąta ABC, prowadzimy równoległą do boku AB. Ta równoległa przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach M i N. Wykaż, że $|MN| = |AM| + |BN|$.

4.47. Korzystając z własności dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą, uzasadnij, że:

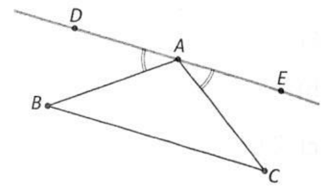
a) suma miar dwóch kątów równoległoboku leżących przy jednym boku jest równa $180°$
b) suma miar dwóch kątów trapezu leżących przy jednym ramieniu jest równa $180°$.

4.48. W trapezie suma miar kątów ostrych leżących przy dłuższej podstawie jest równa $102°$. Dwusieczne tych kątów zawierają przekątne trapezu. Oblicz miary kątów trapezu.

4.49. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty A, B, C, D (zobacz rysunek obok). Prosta AB tworzy z prostą BC kąt $40°$, zaś kąt przyległy do kąta ACB ma $110°$. Wykaż, że jeśli półprosta AC jest dwusieczną kąta BAD, to prosta AD jest równoległa do prostej BC.



4.50. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = |AC|$. Przez punkt A poprowadzono prostą DE (zobacz rysunek obok). Wykaż, że jeśli $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle CAE|$, to $BC \parallel DE$.



4.51. Dany jest kąt wypukły AOB i punkt P leżący na dwusiecznej tego kąta. Wykaż, że jeśli $|PB| = |BO|$, to prosta PB jest równoległa do prostej AO.

4.52. Oblicz sumę miar kątów wewnętrznych:

a) dziewięciokąta b) dwunastokąta c) dwudziestokąta.

4.53. W jakim wielokącie wypukłym suma miar kątów wewnętrznych jest równa:

a) $1440°$ b) $2160°$ c) $2700°$?

4.54. Oblicz miarę kąta wewnętrznego:

a) ośmiokąta foremnego b) osiemnastokąta foremnego.

4.55. Kąt wewnętrzny wielokąta foremnego jest równy $150°$. Jaki to wielokąt?

4.56. Kąt zewnętrzny wielokąta foremnego jest równy $18°$. Ile przekątnych ma ten wielokąt?

4.57. W pięciokącie kąty wewnętrzne kolejno mają się do siebie jak $1 : 3 : 3 : 4 : 4$. Oblicz miary tych kątów. Czy ten pięciokąt jest wypukły?

4.58. W jakim wielokącie wypukłym stosunek sumy miar kątów wewnętrznych do sumy miar wszystkich kątów zewnętrznych jest równy:

a) 4 b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{15}{4}$?

4.59. Czy istnieje dziewięciokąt wypukły, który ma cztery kąty proste? Odpowiedź uzasadnij.

4.60. Ile, co najwyżej, kątów ostrych może mieć dowolny wielokąt wypukły?

Wektor na płaszczyźnie (bez układu współrzędnych)

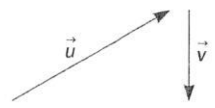
4.61. Dane są wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ (patrz rysunek obok). Narysuj wektory:

a) $\vec{u}+\vec{v}$ oraz $\vec{v}+\vec{u}$

b) $\vec{u}-\vec{v}$ oraz $\vec{v}-\vec{u}$

c) $2\vec{u}-3\vec{v}$ oraz $-\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$

d) $\frac{3}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ oraz $\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v}$.



4.62. Wektor $\vec{u}-5\vec{v}$ przedstaw jako:

a) sumę trzech wektorów, z których jeden jest równy $7\vec{v}$

b) różnicę dwóch sum wektorów

c) sumę czterech iloczynów wektora przez liczbę.

4.63. W prostokącie $ABCD$ punkt E jest środkiem boku DC, zaś punkt F jest środkiem boku BC. Wiedząc, że $\overrightarrow{AB}=6\vec{a}$ i $\overrightarrow{AD}=2\vec{b}$, wyznacz wektory $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ oraz $\overrightarrow{FE}$ w zależności od wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

4.64. W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ dane są wektory: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$. Wyraź w zależności od $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wektory: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF}$.

4.65. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Wykaż, że $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

4.66. Dany jest równoległobok $ABCD$. Wykaż, że wektor $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ jest równoległy do wektora $\overrightarrow{AD}$ i dwa razy od niego dłuższy.

4.67. O dwóch niezerowych wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$ wiadomo, że $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$ oraz $|\vec{v}|=2|\vec{u}|$. Czy może zachodzić równość $\vec{u}=-\frac{1}{2}\vec{v}$? Odpowiedź uzasadnij.

4.68. Punkt K dzieli bok AC trójkąta ABC na odcinki AK i KC, dla których $|AK|:|KC|=2:3$. Punkt L dzieli bok BC na odcinki BL i LC tak, że $|BL|:|LC|=2:3$. Wykaż – korzystając z działań na wektorach – że $KL \parallel AB$ i wyznacz długość odcinka KL w zależności od długości odcinka AB.

4.69. Wykaż, że jeśli w czworokącie $ABCD$ punkt przecięcia przekątnych dzieli je na połowy, to czworokąt ten jest równoległobokiem.

4.70. Na płaszczyźnie dane są niewspółliniowe punkty A, B, C, D oraz dowolny punkt M. Wykaż, że jeśli $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}$, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

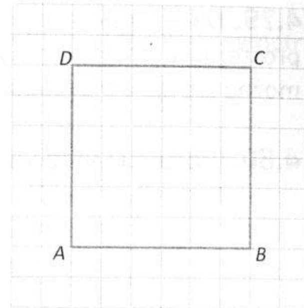
Wybrane przekształcenia płaszczyzny, cz. 1

4.71. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC. Wyznacz obraz tego trójkąta w przesunięciu równoległym o wektor:

a) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ b) $-2\overrightarrow{BC}$

4.72. Narysuj kwadrat $ABCD$ o boku długości 6 (jak na rysunku obok). Wyznacz obraz tego kwadratu w przesunięciu równoległym o wektor:

a) $\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$



4.73. Wykaż, że jeśli wykonamy kolejno dwa przesunięcia równoległe: najpierw o wektor $\vec{u}$, a następnie o wektor $\vec{v}$, to te dwa przekształcenia możemy zastąpić jednym przesunięciem równoległym o wektor $\vec{u}+\vec{v}$.

4.74. Na płaszczyźnie wyróżnione są dwa punkty R i Q. Rozpatrujemy przekształcenie geometryczne, które dowolnemu punktowi A tej płaszczyzny przyporządkowuje punkt A_1, w taki sposób, że $2\cdot\overrightarrow{PA_1}=2\cdot\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{QR}$, gdzie P jest ustalonym punktem płaszczyzny. Wykaż, że rozpatrywane przekształcenie jest przesunięciem równoległym o wektor $\frac{1}{2}\overrightarrow{RQ}$.

4.75. Wyznacz obraz równoległoboku $ABCD$ w symetrii względem prostej BE, jeśli E jest środkiem odcinka DC.

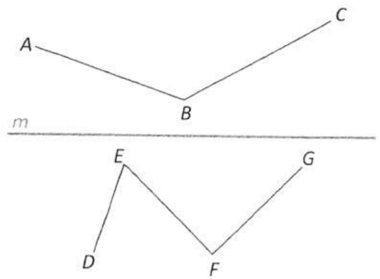
4.76. Ile osi symetrii ma figura będąca sumą okręgu i prostej? Rozpatrz wszystkie przypadki.

4.77. Na płaszczyźnie dane są dwa odcinki prostopadłe do siebie i równej długości. Ile osi symetrii ma figura będąca sumą tych odcinków, jeśli:

a) część wspólna tych odcinków jest środkiem każdego z tych odcinków

b) odcinki nie mają punktów wspólnych.

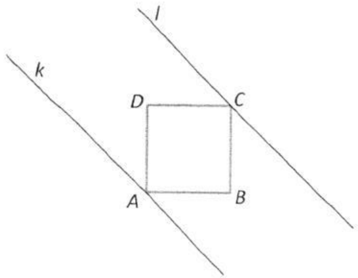
4.78. Dane są dwie łamane ABC i $DEFG$ oraz prosta m (zobacz rysunek poniżej). Wyznacz punkt K należący do łamanej ABC i punkt L należący do łamanej $DEFG$ tak, aby odcinek KL był prostopadły do prostej m i środek odcinka KL należał do prostej m.

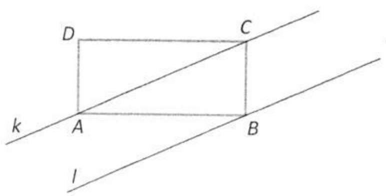


***4.79.** Dane są proste równoległe k, l. Rozpatrujemy kolejno symetrię względem prostej k, a następnie względem prostej l. Wykaż, że takie dwa przekształcenia można zastąpić przesunięciem równoległym.

4.80. Proste k i l są równoległe. Czworokąt $ABCD$ przekształcono w symetrii względem prostej k, a następnie obraz przekształcono w symetrii względem prostej l i otrzymano czworokąt $A_2B_2C_2D_2$. Narysuj czworokąt $A_2B_2C_2D_2$, jeśli:

a) $ABCD$ – kwadrat, $k \parallel BD$, $A \in k$, $C \in l$ b) $ABCD$ – prostokąt, $A, C \in k$, $B \in l$



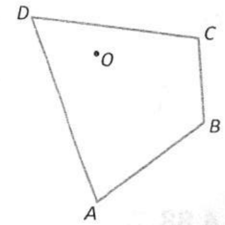


4.81. Wyznacz obraz trójkąta różnobocznego w symetrii środkowej względem punktu O, jeśli:
a) punkt O leży wewnątrz tego trójkąta
b) punkt O leży na zewnątrz tego trójkąta.

4.82. Figura F jest sumą dwóch prostych równoległych.
a) Ile osi symetrii ma figura F?
b) Jaką figurę tworzą wszystkie środki symetrii figury F?

4.83. Prostokąt $ABCD$ przesunięto równolegle o wektor $\overrightarrow{DO}$, gdzie punkt O jest punktem przecięcia przekątnych tego prostokąta i otrzymano prostokąt $A_1B_1C_1D_1$.
a) Narysuj obydwa prostokąty.
b) Wykaż, że część wspólna tych prostokątów też jest prostokątem.
c) Czy suma prostokątów $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ jest figurą środkowosymetryczną. Jeśli tak, wskaż środek symetrii.
d) Czy suma prostokątów $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ jest figurą osiowosymetryczną. Jeśli tak, wskaż oś symetrii.

4.84. Dany jest czworokąt $ABCD$ i punkt O leżący wewnątrz tego czworokąta, jak na rysunku obok. Wyznacz punkty K, L leżące na bokach czworokąta $ABCD$, tak aby środkiem odcinka KL był punkt O.

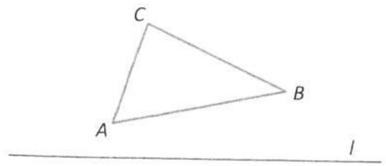


4.85. Dany jest wektor $\overrightarrow{AB}$ oraz punkt O. Wykaż, że obrazem wektora $\overrightarrow{AB}$ w symetrii środkowej względem punktu O jest wektor $-\overrightarrow{AB}$.

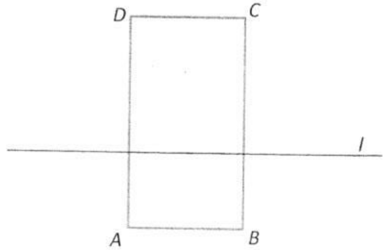
Wybrane przekształcenia płaszczyzny, cz. 2

4.86. Wyznacz rzut równoległy wielokąta na prostą l, jeśli kierunkiem rzutowania jest prosta AC:

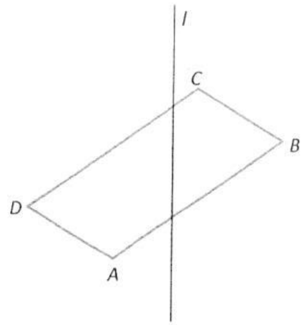
a)



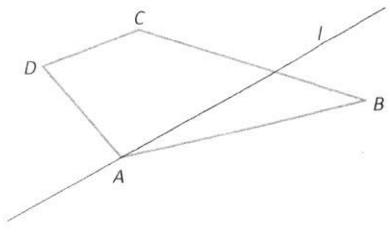
b)



c)

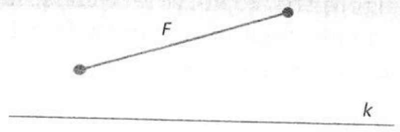


d)

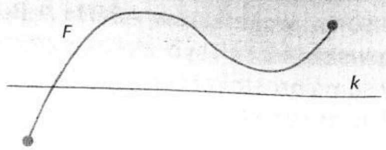


4.87. Znajdź rzut prostokątny figury F na prostą k.

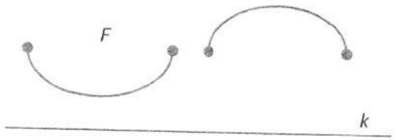
a)



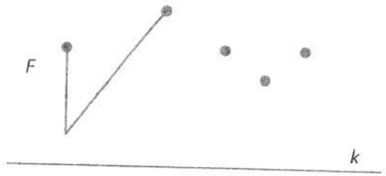
b)



c)

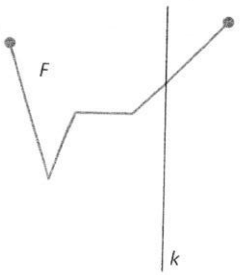


d)

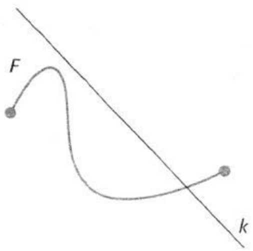


4.88. Znajdź rzut prostokątny figury F na prostą k.

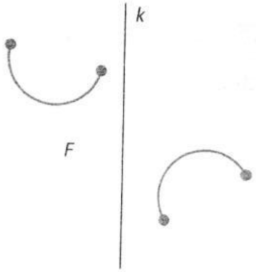
a)



b)



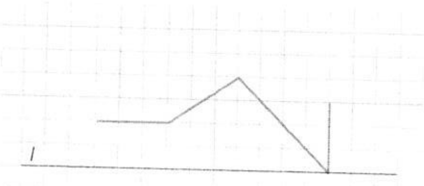
c)



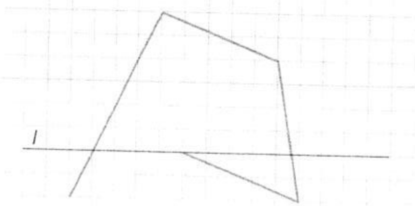
4.89. Rzuty prostokątne odcinka AB na proste k oraz l, które są prostopadłe, mają odpowiednio długość 5 cm i 12 cm. Oblicz długość odcinka AB.

4.90. Wyznacz obraz figury F w powinowactwie prostokątnym o osi l i skali k, jeśli:

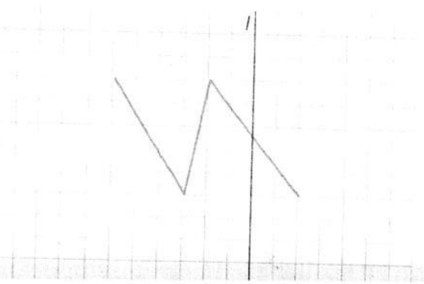
a) $k = 2$



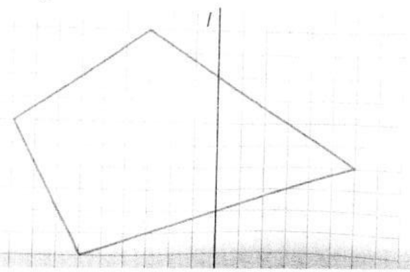
b) $k = -\frac{1}{2}$



c) $k = -3$

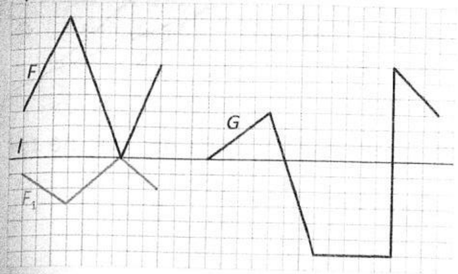


d) $k = \frac{2}{3}$

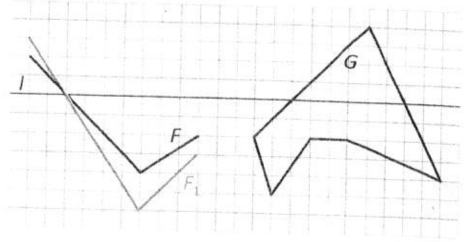


4.91. Obrazem figury F w powinowactwie prostokątnym o osi l jest figura F_1 (zobacz rysunek poniżej). Podaj skalę tego powinowactwa; następnie wyznacz obraz łamanej G w tym powinowactwie.

a)



b)



4.92. Jak jest położona prosta m względem prostej l, jeśli obraz m_1 prostej m w powinowactwie prostokątnym o osi l i skali k, $k \neq 0$ i $|k| \neq 1$:

a) jest równoległy do prostej m i nie pokrywa się z prostą m

b) pokrywa się z prostą m?

4.93. Jaka figura jest obrazem kwadratu K w pewnym powinowactwie prostokątnym o skali k, $k \neq 0$ i $|k| \neq 1$, jeśli oś tego powinowactwa:

a) jest równoległa do boku tego kwadratu

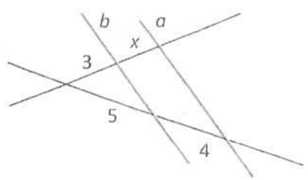
b) jest równoległa do przekątnej kwadratu

c) nie jest równoległa do żadnego boku kwadratu ani do żadnej przekątnej?

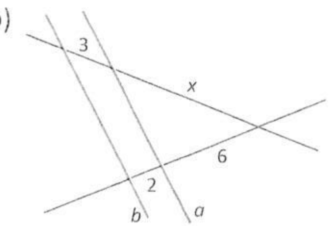
Twierdzenie Talesa

4.52. **4.94.** Na rysunkach poniżej proste a i b są równoległe. Oblicz x.

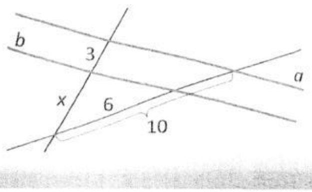
a)



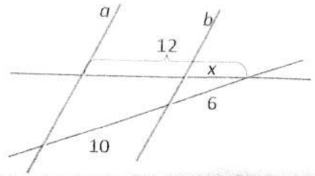
b)



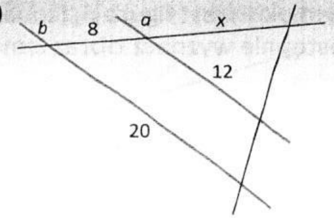
c)



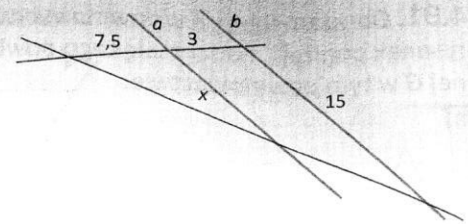
d)



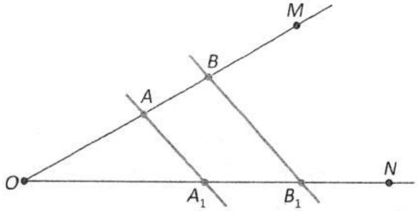
e)



f)

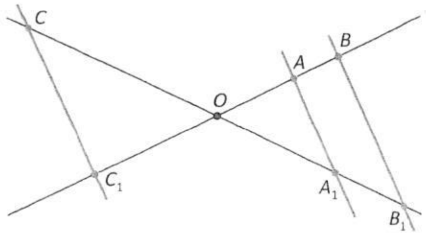


53. **4.95.** Ramiona kąta MON przecięto prostymi równoległymi AA_1 i BB_1, jak na rysunku poniżej:



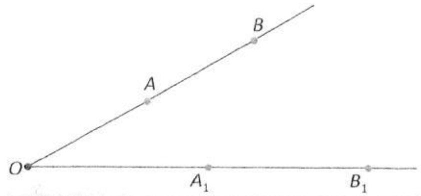
Oblicz:
a) $|AB|$, jeśli $|OA| = 17$ cm, $|OA_1| = 2$ dm, $|OB_1| = 49$ cm
b) $|OA|$, jeśli $|OB| = 10{,}5$ cm, $|OA_1| = 38$ mm, $|A_1B_1| = 0{,}95$ dm
c) $|OB_1|$, jeśli $|OA| = 16$ cm, $|AB| = 4{,}8$ dm, $|A_1B_1| = 0{,}4$ m
d) $|A_1B_1|$, jeśli $|OA| = 6{,}3$ cm, $|AB| = 8{,}7$ cm, $|OB_1| = 22{,}5$ cm.

54. **4.96.** Proste AB i A_1B_1 przecięto prostymi równoległymi AA_1, BB_1 i CC_1, jak na rysunku poniżej:



Oblicz:
a) $|CC_1|$, jeśli $|C_1O| = 4$ cm, $|OA| = 3$ cm, $|AA_1| = 2$ cm
b) $|OC_1|$, jeśli $|OA_1| = 1{,}8$ dm, $|AC_1| = 11{,}2$ dm, $|OC| = 5{,}4$ dm
c) $|OB|$, jeśli $|CC_1| = 4$ dm, $|BB_1| = 56$ cm, $|C_1B| = 1{,}2$ m
d) $|CA_1|$, jeśli $|AA_1| = 2$ cm, $|BB_1| = 5$ cm, $|A_1B_1| = 4{,}5$ cm, $|CC_1| = 4$ cm.

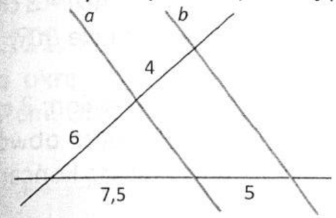
55. **4.97.** Na jednym z ramion kąta o wierzchołku O leżą punkty A i B, a na drugim ramieniu – punkty A_1 i B_1 (patrz rysunek poniżej).



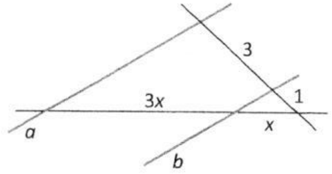
Czy proste AA_1 i BB_1 są równoległe, jeśli:
a) $|OA| = 4{,}2$ dm, $|AB| = 2$ dm, $|OA_1| = 6{,}3$ dm, $|OB_1| = 9{,}3$ dm
b) $|OA| = 6{,}8$ cm, $|OB| = 20{,}8$ cm, $|OB_1| = 31{,}2$ cm, $|A_1B_1| = 17$ cm
c) $|OA| = 4$ dm, $|AB| = 2$ dm, $|AA_1| = 3$ dm, $|BB_1| = 4{,}5$ dm
d) $|OA_1| : |A_1B_1| = 3 : 2$, $|AA_1| : |BB_1| = 3 : 5$?

4.56. **4.98.** Czy na rysunku poniżej proste a i b są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.

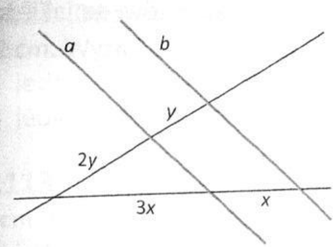
a)



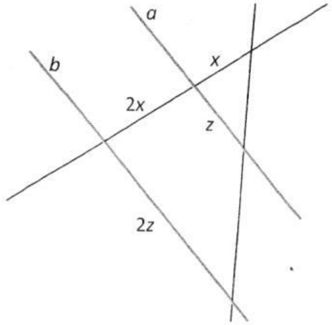
b)



c)



d)



4.57. **4.99.** Dane są odcinki, których długości są równe a i b ($a > b$). Skonstruuj odcinek, którego długość będzie równa:

a) $\frac{1}{5}a$ b) $\frac{b^2}{a}$ c) $\frac{ab}{a-b}$

d) $\frac{a(a+b)}{b}$ e) $\frac{ab}{a+2b}$ f) $\frac{(2a-b)^2}{2a}$

4.58. **4.100.** W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przedłużono ramiona AD i BC do przecięcia się w punkcie E. Oblicz CE, jeśli $|AD| = 1$ dm, $|BC| = 1{,}5$ dm, $|DE| = 2$ dm.

4.59. **4.101.** Na boku AC trójkąta ABC obrano punkt K tak, że $\frac{|CK|}{|AK|} = \frac{3}{4}$. Przez punkt K poprowadzono prostą równoległą do boku AB. Przecięła ona bok BC trójkąta w punkcie L. Oblicz $|BL|$ i $|LC|$, jeśli $|BC| = 49$ cm.

4.102. Na boku AC trójkąta ABC obrano punkt M tak, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{5}{7}$. Przez punkt M poprowadzono prostą, równoległą do boku AB trójkąta, która przecięła bok BC w punkcie N. Wiedząc, że $|AC| = 24$ cm i $|AB| = 20$ cm, oblicz $|MN|$ oraz $\frac{|CN|}{|CB|}$.

4.103. W trapezie $ABCD$, $AB \parallel CD$, mamy dane: $|AB| = 12$ cm, $|CD| = 7$ cm, $|AD| = 8$ cm. O ile należy wydłużyć ramię AD, aby przecięło się z przedłużeniem ramienia BC?

4.104. W trapezie długości podstaw wynoszą 5 cm i 8 cm, a długości ramion: 3 cm i 4 cm. Ramiona trapezu przedłużono do przecięcia w punkcie P. Oblicz obwód trójkąta, którego jednym z wierzchołków jest punkt P, a dwa pozostałe są końcami dłuższej podstawy trapezu.

4.105. W trójkącie ABC wysokość CD dzieli bok AB na odcinki długości $|AD| = 4$ cm i $|DB| = 10$ cm. Bok BC ma 16 cm długości. Wyznacz długości odcinków, na jakie symetralna boku AB podzieli bok BC.

Okrąg i koło

4.106. Naszkicuj okrąg i zaznacz na nim punkty A, B i C. Ile cięciw i ile łuków wyznaczają te punkty? Wskaż te cięciwy i łuki. Ile cięciw i ile łuków wyznaczają cztery punkty położone na okręgu?

4.107. Naszkicuj okrąg i w nim kilka cięciw, a następnie wykreśl symetralne tych cięciw. Co możesz powiedzieć o tych symetralnych?

4.108. W kole poprowadzono średnicę AB i cięciwę AC. Wiedząc, że $BC \perp AC$ i $|BC| = 7$ cm, oblicz odległość cięciwy AC od środka koła.

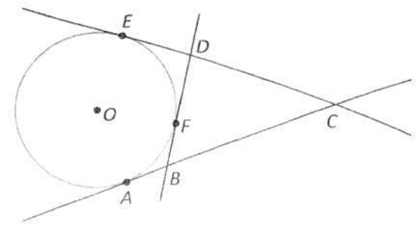
4.109. Wyraź w procentach (z dokładnością do 1%), jaką część okręgu stanowi łuk okręgu o promieniu r, jeśli długość łuku jest równa l:

a) $r = 3$ cm, $l = \pi$ cm b) $r = 5$ cm, $l = 20$ cm

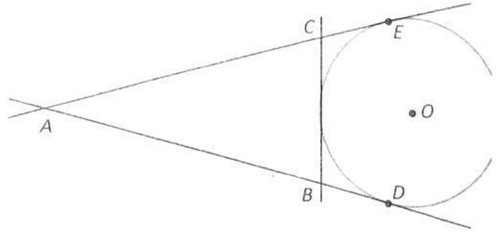
c) $r = \pi$ cm, $l = \pi^2$ cm d) $r = 0{,}25\pi$ dm, $l = 6$ cm

e) $r = \sqrt{3}$ dm, $l = \sqrt{12}\pi$ dm f) $r = 0{,}4$ m, $l = \sqrt{5}\pi$ dm

4.69. **4.110.** Wskaż na rysunku poniżej trzy pary odcinków równej długości wiedząc, że proste AC, EC i BD są styczne do okręgu odpowiednio w punktach A, E, F.



4.70. **4.111.** Proste AE, AD i BC są styczne do okręgu. Odcinek AD ma długość 17 cm. Oblicz obwód trójkąta ABC.



4.72. **4.112.** Dwa okręgi są styczne zewnętrznie. Odległość między ich środkami wyno[illegible] 12 cm. Wyznacz promienie tych okręgów, wiedząc, że:

a) jeden z nich jest o 2 cm dłuższy od drugiego

b) jeden z nich jest trzy razy dłuższy od drugiego.

4.73. **4.113.** Dwa okręgi są styczne wewnętrznie. Odległość między ich środkami wyno[illegible] 3 cm. Wyznacz promienie tych okręgów, wiedząc, że:

a) jeden z promieni jest dwa razy krótszy od drugiego

b) suma długości ich promieni jest równa 17 cm.

4.74. **4.114.** Promienie dwóch okręgów o_1 i o_2 są równe odpowiednio: r_1 i r_2. Gdyby t[illegible] okręgi były styczne zewnętrznie, to odległość między ich środkami wynosiłab[illegible] 15 cm; a gdyby te okręgi były styczne wewnętrznie, to odległość między ich środ[illegible]kami byłaby równa 3 cm. Oblicz promienie tych okręgów.

4.75. **4.115.** Dane są takie dwa okręgi $o(A, r_1)$, $o(B, r_2)$, że:

a) $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $|AB| = k$

b) $r_1 = k$, $r_2 = k - 1$, $|AB| = 5$

c) $r_1 = 3$, $r_2 = 2k$, $|AB| = 4$

d) $r_1 = 5 - k$, $r_2 = k + 1$, $|AB| = 2$.

Określ położenie okręgów, w zależności od parametru k.

4.76. **4.116.** Trzy okręgi o promieniu r są styczne zewnętrznie, każdy do dwóch pozost[illegible]łych. Wyznacz długości boków i miary kątów trójkąta, utworzonego przez punk[illegible] styczności.

4.77. **4.117.** Dwa okręgi, $o(A, r_1)$ i $o(B, r_2)$ są styczne zewnętrznie do siebie i oba są styc[illegible]ne wewnętrznie do okręgu $o(C, r_3)$. Obwód trójkąta ABC wynosi 25 cm. Oblicz r_3.

4.118. Z punktu zewnętrznego A poprowadzono styczne AB i AC do okręgu o środku w punkcie O (B, C – punkty styczności). Wykaż, że jeśli miara kąta między stycznymi równa się mierze kąta zawartego między promieniami poprowadzonymi ze środka koła do punktów styczności, to czworokąt $ABOC$ jest kwadratem.

4.119. Dwa okręgi o promieniach równych 2 cm i 3 cm są styczne zewnętrznie. Dwie proste, z których każda jest styczną do obu okręgów, przecinają się w takim punkcie A, że środki okręgów oraz punkt A są współliniowe. Oblicz odległość punktu A od środka mniejszego okręgu.

4.120. Dwa okręgi środkach O_1 i O_2 oraz promieniach odpowiednio 5 cm i 2 cm są rozłączne zewnętrznie. Styczna wewnętrzna tych okręgów przecina odcinek O_1O_2 w punkcie P. Wiedząc, że odcinek O_1P jest o 9 cm dłuższy od odcinka PO_2. Oblicz $|O_1O_2|$.

***4.121.** Do danego okręgu poprowadzono styczną tak, że końce AB średnicy tego okręgu są odległe od stycznej o 25 cm i o 15 cm. Oblicz promień tego okręgu.

4.122. Przez punkt wspólny dwóch przecinających się okręgów o środkach O_1 i O_2 poprowadzono sieczną równoległą do prostej O_1O_2. Przecięła ona jeden okrąg w punkcie A, natomiast drugi – w punkcie B. Wykaż, że:

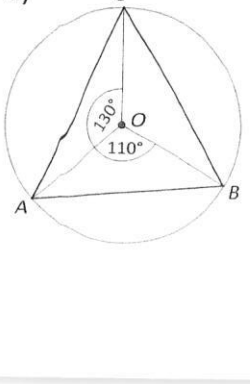
a) $|O_1O_2| = \frac{1}{2}|AB|$

*b) odcinek AB jest dłuższy od wszystkich innych odcinków siecznych przechodzących przez punkt C.

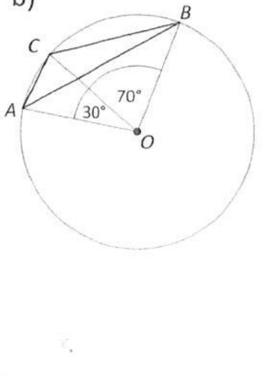
Kąty i koła

4.123. Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Korzystając z danych na rysunku, wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

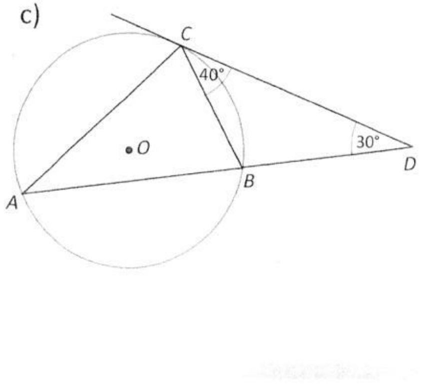
a)



b)

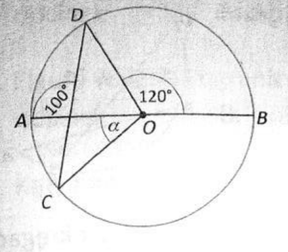


c)

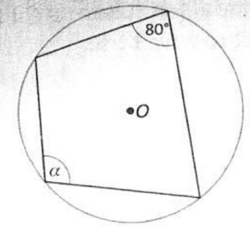


4.124. Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Korzystając z danych na rysunku, oblicz α.

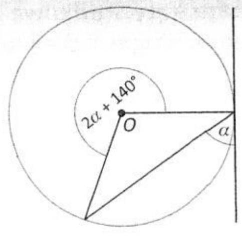
a)



b)



c)



4.83. **4.125.** Punkty A, B, C dzielą okrąg na trzy łuki, których stosunek długości wynosi $5 : 6 : 7$. Oblicz miary kątów trójkąta ABC.

4.84. **4.126.** W okręgu o promieniu r kreślimy średnicę AB oraz taką cięciwę AC, że $|AC| = r$. Jaką częścią okręgu jest łuk CAB?

4.86. **4.127.** W kole narysowano dwie średnice AB i CD. Wykaż, że czworokąt $ACBD$ jest prostokątem.

4.87. **4.128.** W okręgu rysujemy średnicę AB i równoległą do niej cięciwę CD. Udowodnij, że różnica miar kątów ACD i CDA jest równa $90°$.

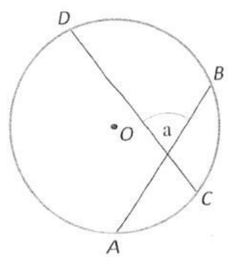
4.88. **4.129.** W równoległoboku narysowano dwa półokręgi: średnicą jednego okręgu jest krótszy bok, a drugiego – dłuższy bok równoległoboku. Półokręgi przecięły się wewnątrz równoległoboku w punkcie P. Wykaż, że punkt P należy do przekątnej równoległoboku.

4.89. **4.130.** Dwa okręgi przecinają się w punktach P i Q. Poprowadzono średnicę PA w pierwszym okręgu oraz średnicę PB w drugim okręgu. Wykaż, że punkty A, Q, B są współliniowe.

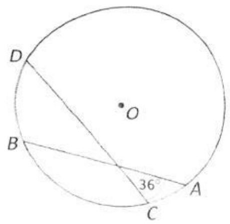
4.131. Dwa okręgi o równych promieniach przecinają się w punktach A i B w taki sposób, że jeden przechodzi przez środek drugiego. Przez punkt A poprowadzono sieczną tych okręgów, która przecięła okręgi w punktach C i D. Wykaż, że punkty B, C, D wyznaczają trójkąt równoboczny.

4.90. **4.132.** Dane są dwa kąty wpisane w okrąg, oparte na tym samym łuku. Wykaż, że dwusieczne tych kątów przetną się w punkcie należącym do okręgu.

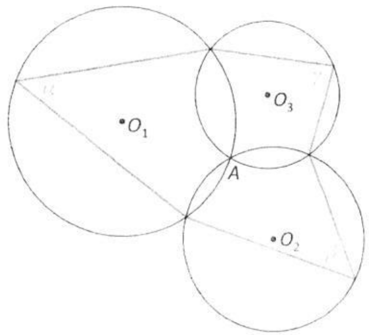
4.133. Wykaż, że miara kąta α między dwiema przecinającymi się cięciwami AB i CD okręgu o środku w punkcie O równa się połowie sumy miar wypukłych kątów środkowych DOB i AOC.



4.134. Cięciwy AB i CD okręgu przecinają się pod kątem $36°$. Wyznacz kąty środkowe odpowiadające łukom AC i BD, jeżeli stosunek długości tych łuków jest równy 1 : 3.



***4.135.** Trzy okręgi o środkach O_1, O_2 i O_3 przecinają się w punkcie A. W okręgach tych zaznaczono kąty wpisane α, β, γ – jak na rysunku poniżej. Wykaż, że $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



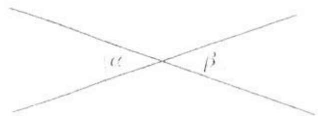
Test sprawdzający do rozdziału 4.

1. Dane są na płaszczyźnie trzy punkty niewspółliniowe. Na ile części proste, wyznaczone przez te punkty, dzielą płaszczyznę?

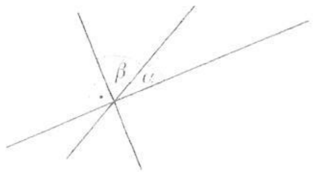
A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

2. Kąty przyległe α, β są zaznaczone na rysunku:

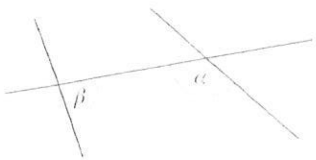
A.



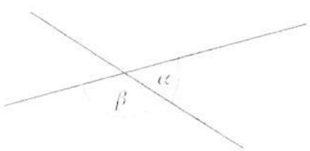
B.



C.



D.



3. Dane są dwa kąty przyległe, z których jeden jest o $38°$ większy od drugiego. Kąty te mają miary:

A. $71°$ i $109°$ B. $38°$ i $142°$ C. $26°$ i $64°$ D. $38°$ i $76°$.

4. Figurą wypukłą i nieograniczoną jest:

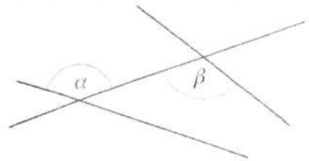
A. odcinek B. koło C. okrąg D. kąt o mierze $175°$.

5. Figurą wklęsłą i ograniczoną jest:

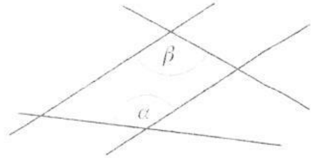
A. odcinek B. koło C. okrąg D. kąt o mierze $270°$.

6. Kąty naprzemianległe wewnętrznie α, β znajdują się na rysunku:

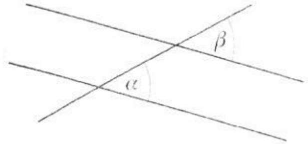
A.



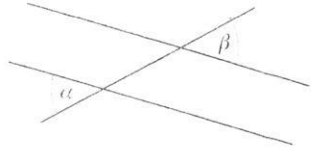
B.



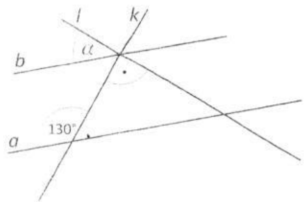
C.



D.



7. Na rysunku obok proste a i b są równoległe, zaś prosta k jest prostopadła do prostej l.



Zatem:

A. $\alpha = 35°$ B. $\alpha = 40°$
C. $\alpha = 45°$ D. $\alpha = 50°$.

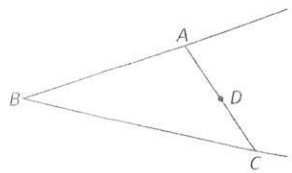
8. Punkt C dzieli odcinek AB długości 48 cm na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy $|AC| : |BC| = 3 : 5$. Z tego wynika, że:

A. $|AC| = 30$ cm i $|BC| = 18$ cm B. $|AC| = 20$ cm i $|BC| = 28$ cm
C. $|AC| = 18$ cm i $|BC| = 30$ cm D. $|AC| = 28$ cm i $|BC| = 20$ cm.

9. Punkt C należy do odcinka DE. Środkiem odcinka DC jest punkt A, zaś środkiem odcinka CE jest punkt B. Odcinek AB ma długość 19 cm. Zatem długość odcinka DE jest równa:

A. 9,5 cm B. 19 cm C. 38 cm D. 76 cm.

10. Na rysunku obok $|BA| < |CB|$ oraz $|AD| = |DC|$.



Prawdziwe jest zdanie:

A. Prosta BD nie jest symetralną odcinka AC i półprosta $BD^{\rightarrow}$ nie jest dwusieczną kąta ABC.
B. Prosta BD nie jest symetralną odcinka AC i półprosta $BD^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta ABC.
C. Prosta BD jest symetralną odcinka AC i półprosta $BD^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta ABC.
D. Prosta BD jest symetralną odcinka AC i półprosta $BD^{\rightarrow}$ nie jest dwusieczną kąta ABC.

11. Dany jest odcinek AB oraz punkty C_1, C_2, C_3, spełniające warunki:

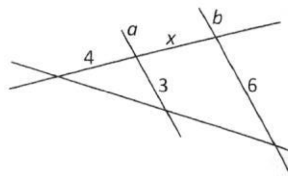
$|C_1A| = 5{,}5$ cm $\quad |C_2A| = 3{,}(7)$ cm $\quad |C_3A| = \sqrt{18}$ cm

$|C_1B| = \left(\frac{2}{11}\right)^{-1}$ cm $\quad |C_2B| = 3\frac{7}{9}$ cm $\quad |C_3B| = 3\sqrt{2}$ cm.

Do symetralnej odcinka AB spośród punktów C_1, C_2, C_3:

A. należy tylko punkt C_1
B. należą tylko punkty C_1 i C_2
C. nie należy żaden punkt
D. należą wszystkie punkty.

12. Na rysunku obok proste a i b są równoległe. Zatem:



A. $x = 2$ B. $x = 4$
C. $x = 6$ D. $x = 8$.

13. Dwa okręgi $o_1(A, r_1)$ oraz $o_2(B, r_2)$ są styczne zewnętrznie oraz $|AB| = 4$ i $r_1 = 3$. Wówczas:

A. $r_2 = \frac{3}{4}$ B. $r_2 = \frac{4}{3}$ C. $r_2 = 1$ D. $r_2 = 7$.

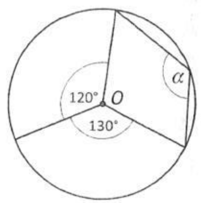
14. Kąt środkowy koła ma miarę 72° i jest oparty na łuku okręgu mającego długość 4π. Promień tego okręgu jest równy:

A. 2 B. 4 C. 5 D. 10.

15. Średnica AB okręgu ma długość 5 cm, a cięciwa BC ma 3 cm długości. Odległość środka okręgu od cięciwy AC jest równa:

A. 1,5 B. 2 C. 3 D. 4.

16. Na rysunku obok dany jest okrąg o środku w punkcie O oraz miary dwóch kątów środkowych i kąt α. Zatem:

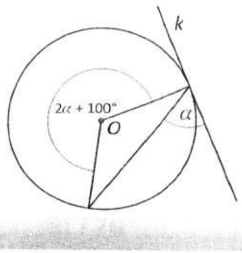


A. $\alpha = 110°$ B. $\alpha = 120°$
C. $\alpha = 125°$ D. $\alpha = 130°$.

17. Punkty A, B, C należące do okręgu wyznaczają trójkąt, którego kąty mają miary: 40°, 60° i 80°. Jeśli promień tego okręgu jest równy 9, to dane punkty podzieliły okrąg na łuki długości:

A. 4, 6, 8 B. 4π, 6π, 8π C. 2π, 3π, 4π D. 2, 3, 4.

18. Na rysunku obok prosta k jest styczną do okręgu o środku w punkcie O. Zatem:

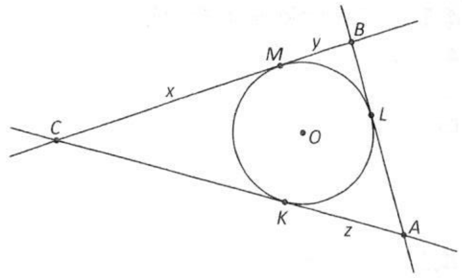


A. $\alpha = 50°$ B. $\alpha = 55°$
C. $\alpha = 60°$ D. $\alpha = 65°$.

19. Dane jest półkole o średnicy AB równej 2. Cięciwa BC ma długość 1. Zatem długość cięciwy AC jest równa:

A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1.

20. Na rysunku obok proste AB, BC, CA są stycznymi do okręgu odpowiednio w punktach L, M, K, przy czym $|CM| = x$, $|MB| = y$ oraz $|KA| = z$. Wiadomo, że $x + y + z = 10$ oraz $3x = 2(y + z)$. Wówczas:



A. $|AB| = 7$ B. $|AB| = 6$
C. $|AB| = 5$ D. $|AB| = 4$.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

4.91 **4.136.** Punkty A, B, C należą do prostej k. Narysuj, jak mogą być położone te punkty względem siebie, jeżeli:

a) $|CA| = 15$, $|CA| - |BC| = |BA|$ oraz $|BC| = 2|BA|$
b) $|BC| + |CA| > |BA|$ oraz $|BC| = 5$, $|CA| = 3$.

Oblicz długość odcinka AB.

4.92 **4.137.** Czy kąty α i β mogą być kątami przyległymi, jeśli:

a) $\alpha - \beta = 72°$ oraz $\alpha = 4\beta$
b) $\frac{\alpha - \beta}{2} + \beta = 90°$ oraz $\alpha = \beta + 30°$?

4.94 **4.138.** W równoległoboku $ABCD$ dwusieczna DE kąta rozwartego ADC i prosta BC wyznaczają dwa kąty przyległe, których miary pozostają w stosunku 2 : 3. Oblicz miary kątów równoległoboku $ABCD$.

4.96 **4.139.** W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 10$ cm. Punkt D dzieli bok AB na takie dwa odcinki, że $|AD| : |DB| = 3 : 5$. Przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do boku AC, która przecięła bok BC w punkcie E. Oblicz długości odcinków: CE, BE i DE.

4.97 **4.140.** W trójkącie ABC poprowadzono trzy proste równoległe do podstawy AB, dzielące bok BC na cztery odcinki równej długości. Suma długości odcinków tych prostych zawartych w trójkącie ABC jest o 6 dm większa od podstawy AB. Oblicz długość boku AB.

4.105 **4.141.** W równoległobok o przekątnych a i b, $a \neq b$, wpisano romb tak, że jego boki są równoległe do przekątnych równoległoboku. Wykaż, że długość boku rombu jest równa $\frac{ab}{a + b}$.

4.98. **4.142.** Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi $o(O_1, 3\text{ cm})$ i $o(O_2, 2\text{ cm})$. Długość odcinka O_1O_2 jest równa 10 cm. Poprowadzono wspólną styczną do tych okręgów, która przecięła odcinek O_1O_2 w punkcie P. Oblicz długość odcinków O_1P i PO_2.

4.99. **4.143.** Dwa okręgi $o(O_1, r)$ i $o(O_2, R)$, gdzie $r < R$, są styczne wewnętrznie w punkcie A oraz $|O_1O_2| = 4$ cm.

a) Wyznacz promienie tych okręgów wiedząc, że ich suma jest równa 10 cm.

b) Przez punkt A poprowadzono prostą, która przecięła mniejszy okrąg w punkcie B, a większy w punkcie C. Wykaż, że $O_1B \parallel O_2C$. Wiedząc dodatkowo, że $|BC| = 6$ cm, oblicz $|AB|$.

.100. **4.144.** Dane są dwa okręgi styczne zewnętrznie: okrąg o środku w punkcie O_1 i promieniu $r_1 = 3a$ oraz okrąg o ośrodku w punkcie O_2 i promieniu $r_2 = 4 - a$, gdzie $a \in (0, 4)$. Odcinek O_1O_2 ma długość 8.

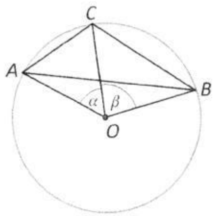
a) Wyznacz r_1 i r_2.

b) Prosta k jest styczną zewnętrzną do obu okręgów. Prosta O_1O_2 przecina prostą k w punkcie A. Oblicz $|O_1A|$.

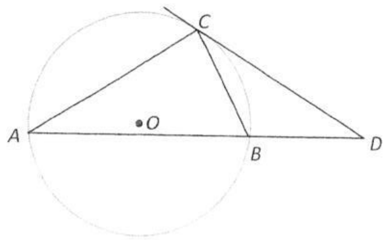
.101. **4.145.** Na rysunku obok dany jest okrąg o środku w punkcie O oraz kąty: $\alpha = 54°$, $\beta = 82°$.

a) Oblicz miary kątów trójkąta ABC.

b) Wyraź w procentach, jaką część długości okręgu stanowi długość łuku AB, do którego należy punkt C. Wynik przedstaw w przybliżeniu dziesiętnym z dokładnością do 1%.



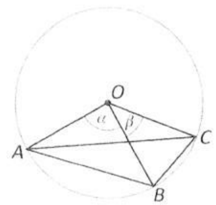
.103. **4.146.** Prosta CD jest styczna do okręgu w punkcie C. Wykaż, że jeśli $|BC| = |BD|$, to $|AC| = |CD|$.



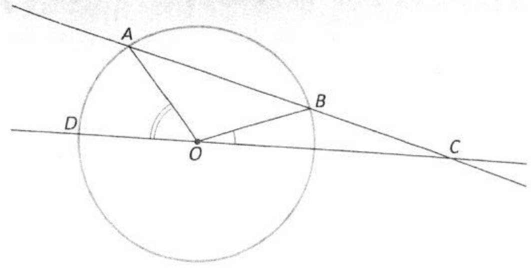
4.147. Na rysunku obok dany jest okrąg o środku w punkcie O oraz kąty α i β, przy czym:

a) $\alpha = 80°, \beta = 50°$ b) $\alpha = 90°, \beta = 40°$.

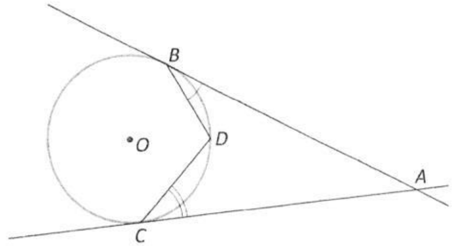
Czy prosta OC jest równoległa do prostej AB? Odpowiedź uzasadnij.



4.148. Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Poprowadzono dwie sieczne: AB i DO, które przecięły się w punkcie C jak na rysunku poniżej. Wykaż, że jeśli $|BC| = |BO|$, to $|\sphericalangle DOA| = 3|\sphericalangle COB|$.



4.149. Proste AB i AC są styczne w punktach B i C do okręgu o środku w punkcie O. Punkt D leży na łuku BC, wewnątrz trójkąta ABC jak na rysunku poniżej. Wykaż, że suma $|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle ACD|$ jest stała (tzn. nie zależy od położenia punktu D na łuku BC). Czy teza zadania będzie prawdziwa, jeśli punkt D będzie leżał na łuku BC, na zewnątrz trójkąta ABC?



***4.150.** Dwa okręgi przecinają się w punktach C i D. Przez punkt C poprowadzono sieczną tych okręgów, która przecięła jeden okrąg w punkcie A, natomiast drugi – w punkcie B. Wykaż, że miara kąta ADB jest stała – nie zależy od sposobu poprowadzenia siecznej przez punkt C.