5. Geometria płaska – trójkąty

Podział trójkątów. Suma kątów w trójkącie. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki dwóch boków w trójkącie

5.1. Stosunek dwóch kątów w trójkącie wynosi 4 : 5, a trzeci kąt jest większy od najmniejszego o 37°. Wyznacz kąty trójkąta.

5.2. Oblicz miary kątów trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ostrych jest o 26° większy od drugiego.

5.3. Suma dwóch kątów trójkąta jest równa trzeciemu kątowi. Wykaż, że jest to trójkąt prostokątny.

5.4. Znajdź kąty trójkąta równoramiennego, w którym kąt przy podstawie jest pięć razy mniejszy od przyległego do niego kąta zewnętrznego.

5.5. Kąt zewnętrzny przy podstawie trójkąta równoramiennego jest większy o 36° od kąta zewnętrznego przy jego wierzchołku naprzeciw podstawy. Wyznacz kąty tego trójkąta.

5.6. Czy można zbudować trójkąt o bokach mających długość:

a) 2, 4, 6   b) $2-\sqrt{2}, 5, 2+\sqrt{2}$ c) 10, 12, 14?

5.7. Czy stosunek długości boków trójkąta może być równy 2 : 4 : 6? Odpowiedź uzasadnij.

5.8. Liczby $2c-2$, $c+1$, $2c+2$ są długościami boków trójkąta. Do jakiego przedziału należy liczba c?

5.9. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których boki pewnego trójkąta mają długość

a) $3, a+2, 5-a$ b) $a, 2a, 6$ c) $a, 6-a, 3a+4$

5.10. W trójkącie równoramiennym jeden z boków ma długość 4 cm, a drugi 9 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

5.16. 5.11. W trójkącie dwa boki mają długość 3,15 i 0,78. Wyznacz długość trzeci[e]go boku, wiedząc, że wyraża się ona liczbą całkowitą.

5.17. 5.12. Dwa boki trójkąta mają długość 1 cm i 4 cm. Oblicz obwód tego trójkąta, je[śli] wiadomo, że długość trzeciego boku wyraża się liczbą naturalną.

5.13. Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu płaszczyzny od wierzchołk[ów] danego czworokąta jest większa od połowy obwodu tego czworokąta.

5.14. Punkt X jest dowolnym punktem leżącym wewnątrz równoległoboku AB[...] Wykaż, że $|AX| < |BX| + |CX| + |DX|$.

5.15. Na płaszczyźnie dane są punkty A, B, C, D. Wykaż, że co najmniej jedna z r[ów]ności $|AC| + |AD| \geq |AB|$, $|BC| + |BD| \geq |AB|$ jest prawdziwa.

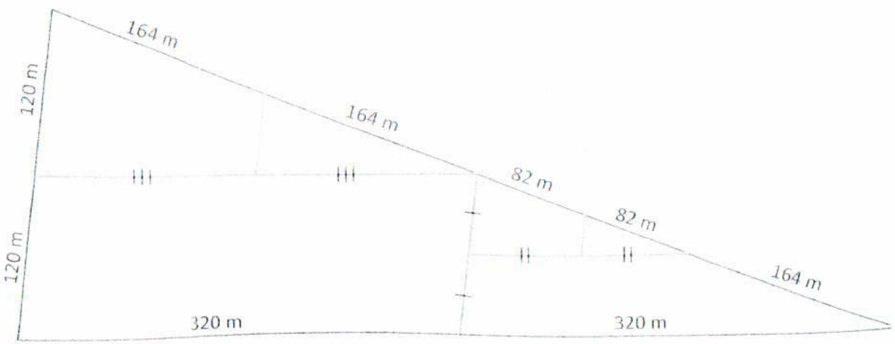
5.18. 5.16. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o podstawie AC. Ramię AB przedłuż[ono] na zewnątrz trójkąta o odległość BD i punkt D połączono z punktem C. Oblicz dług[ość] AC, jeżeli obwód trójkąta CBD wynosi 24 cm, a obwód trójkąta ADC wynosi 39 c[m].

5.19. 5.17. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 11$ cm, $|AC| = 12$ [cm]. Połączono środki boków tego trójkąta, otrzymując trójkąt $A_1B_1C_1$. Oblicz obw[ód] tego trójkąta.

5.20. 5.18. Obwód trójkąta ABC wynosi 27 cm. Połączono środki boków tego trójk[ąta] i otrzymano trójkąt $A_1B_1C_1$. Oblicz obwód tego trójkąta.

5.21. 5.19. W trójkącie ABC połączono środki boków, otrzymując trójkąt $A_1B_1C_1$. Obw[ód] trójkąta $A_1B_1C_1$ jest o 20 cm mniejszy od obwodu trójkąta ABC. Oblicz obwód t[rój]kąta ABC.

5.22. 5.20. W części parku, przedstawionej na poniższym planie, wybudowano al[ejki] (oznaczone kolorem).



Oblicz długość wybudowanych alejek, wykorzystując dane z rysunku.

5.23. **5.21.** Udowodnij, że w każdym trójkącie jest kąt, który ma co najmniej 60°, i kąt, który ma co najwyżej 60°.

5.24. **5.22.** Wewnątrz trójkąta ABC wybrano dowolny punkt S. Uzasadnij, że $|\sphericalangle CSB| > |\sphericalangle CAB|$.

5.25. **5.23.** Narysuj dowolny trójkąt ABC i wykreśl przy dwóch jego wierzchołkach po jednym kącie zewnętrznym. Czy suma tych dwóch kątów może równać się kątowi półpełnemu? Odpowiedź uzasadnij.

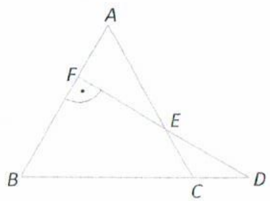
5.28. **5.24.** Wykaż, że jeżeli kąt przyległy do jednego z kątów trójkąta jest dwa razy większy od drugiego kąta tego trójkąta, to trójkąt jest równoramienny. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

5.25. W trójkącie prostokątnym ABC przedłużono przeciwprostokątną AB i zaznaczono na przedłużeniach punkty D i E tak, że $|AD| = |AC|$ oraz $|BE| = |BC|$. Wykaż, że $|\sphericalangle DCE| = 135°$.

5.26. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zaznaczono punkty C_1 i C_2 w taki sposób, że $|AC_1| = |AC|$ oraz $|BC_2| = |BC|$. Wykaż, że $|\sphericalangle C_1CC_2| = 45°$.

5.27. W trójkącie ABC bok AB jest najdłuższy. Na boku AB odłożono odcinki AC_1 oraz BC_2 w taki sposób, że $|AC_1| = |AC|$ oraz $|BC_2| = |BC|$. Wykaż, że $|\sphericalangle C_1CC_2| = \frac{|\sphericalangle A| + |\sphericalangle B|}{2}$.

5.27. **5.28.** W trójkącie ABC na rysunku obok boki AC i BC są równe. Punkty B, C, D są współliniowe oraz $DF \perp AB$. Wykaż, że trójkąt CDE jest równoramienny.



5.29. Dany jest kąt ostry o wierzchołku O i punkt A leżący na ramieniu tego kąta, $A \neq O$. Przez punkt A poprowadzono dwie proste: prostą k prostopadłą do ramienia $\overrightarrow{OA}$, która przecięła drugie ramię kąta w punkcie B, oraz prostą m, prostopadłą do drugiego ramienia, która przecięła to ramię w punkcie C. Dwusieczna kąta ostrego BAC przecięła odcinek BC w punkcie D. Wykaż, że $|OA| = |OD|$.

5.29. **5.30.** W trójkącie ABC połączono środki boków i otrzymano w ten sposób trójkąt KLM. Wykaż, że:

a) obwód trójkąta KLM jest dwa razy mniejszy od obwodu trójkąta ABC

b) kąty trójkąta KLM mają takie same miary, jak kąty trójkąta ABC.

5.30. **5.31.** W dowolnym trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$, poprowadzono przekątną DB. Niech punkty K, L, M oznaczają odpowiedni środki odcinków AD, DB, BC. Wykaż, że:

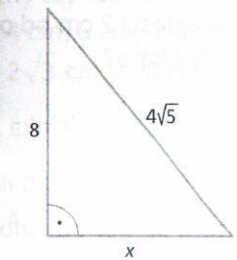
a) punkty K, L, M są współliniowe

b) długość odcinka KM jest średnią arytmetyczną długości podstaw tego trapezu.

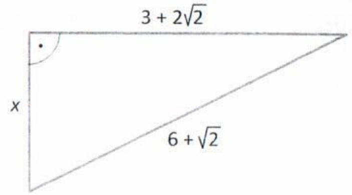
Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

5.31. **5.32.** Oblicz x:

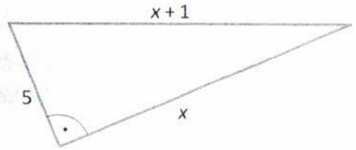
a)



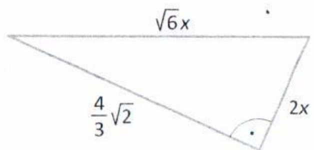
b)



c)

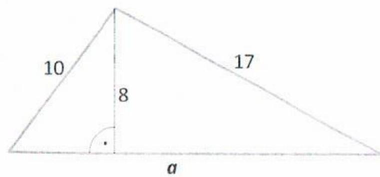


d)

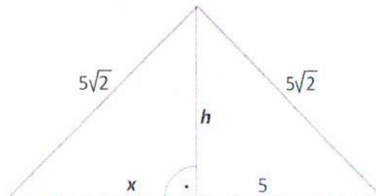


5.32. **5.33.** Oblicz długości nieznanych odcinków na rysunkach poniżej:

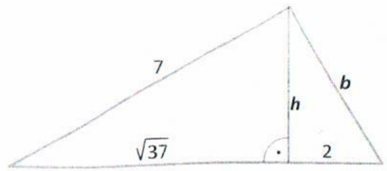
a)



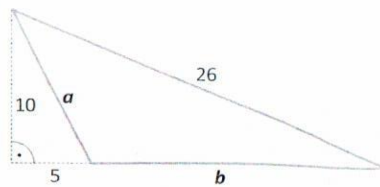
b)



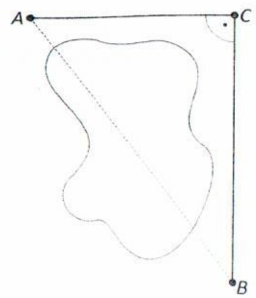
c)



d)



5.33 **5.34.** Miejscowości A, B i C są położone nad tym samym jeziorem – jak pokazano na rysunku obok. Z miejscowości A do C prowadzi droga długości 2,7 km, a droga z miejscowości C do B jest o 900 m dłuższa. O ile krótsza jest odległość w linii prostej od A do B od drogi prowadzącej przez C?



5.35. Wielkość telewizora wyraża się długością przekątnej ekranu, mierzonej w calach (1 cal = 2,54 cm). Oblicz, ile cali ma telewizor, którego wymiary ekranu wynoszą 42 cm na 31,5 cm. Wynik podaj z dokładnością do 1 cala.

5.36. Punkt P należy do dwusiecznej kąta prostego i leży w odległości 2 cm od obu ramion tego kąta. Jaka jest odległość tego punktu od wierzchołka kąta?

5.37. Punkt M leży na symetralnej odcinka AB, w odległości 11 cm od odcinka AB i 61 cm od końców tego odcinka. Oblicz długość odcinka AB.

5.38. Oblicz długość cięciwy okręgu o promieniu 6,5 cm, która leży w odległości 2,5 cm od środka tego okręgu.

5.39. W trójkącie prostokątnym średni bok jest krótszy od najdłuższego o 2 cm. Wiedząc, że najkrótszy bok ma długość 8 cm, oblicz długość pozostałych boków trójkąta.

5.40. W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna AB ma długość 3 dm. Długości przyprostokątnych pozostają w stosunku 3 : 4. Oblicz obwód tego trójkąta.

5.41. Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 10 cm, a dwa jego krótsze boki pozostają w stosunku 8 : 15. Wyznacz długości boków tego trójkąta.

5.42. Kąt BAC jest kątem wpisanym w okrąg, opartym na średnicy BC. Cięciwa AB ma długość 15 cm. Do cięciwy AC należy punkt D, którego odległość od punktu B jest równa 17 cm, a od punktu C – 12 cm. Oblicz długość promienia okręgu.

5.43. Cięciwy AB i AC pewnego okręgu są do siebie prostopadłe. Odległość cięciwy AB od środka okręgu wynosi 2,8 cm, natomiast odległość cięciwy AC od środka okręgu jest równa 2,1 cm. Oblicz długość tego okręgu.

5.44. Dane są odcinki o długościach a i b ($a > b$). Skonstruuj odcinek, którego długość x wynosi:

a) $a\sqrt{2}$ b) $b\sqrt{2}$ c) $\sqrt{18}(a-b)$

d) $0{,}5\sqrt{a^2+b^2}$ e) $3\sqrt{a^2-b^2}$ f) $\frac{\sqrt{10b^2}}{2a}$

5.44. **5.45.** Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest prostokątny:

a) 1,6 dm; 1,2 dm; 1 dm b) 4 dm; 85 cm; 75 cm

c) $\sqrt{2}$ cm; $\sqrt{3}$ cm; $\sqrt{5}$ cm d) 1 m; 5 dm; 1,25 m

5.45. **5.46.** Wyznacz niewiadomą a, dla której podane liczby są długościami boków trójkąta prostokątnego. Rozważ dwa przypadki.

a) $\frac{1}{2}a$, 12, 20 b) 8, $9a$, 10

5.46. **5.47.** Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny:

a) 4 cm, 5 cm, 6 cm b) 10 cm, 7 cm, 7 cm

c) $2\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{6}$ cm, $10\sqrt{0{,}36}$ cm d) $(\sqrt{2}+1)$ cm, $(\sqrt{2}-1)$ cm, $2\sqrt{2}$ cm

5.47. **5.48.** Sprawdź, czy dany trójkąt jest prostokątny, ostrokątny czy rozwartokątny jeśli długości jego boków pozostają w stosunku:

a) 4 : 3 : 5 b) 2 : 3 : 4 c) $2 : 1 : \sqrt{5}$ d) $\sqrt{10} : \sqrt{6} : \sqrt{5}$

5.48. **5.49.** W prostokącie $ABCD$ bok AB ma długość 10 cm, a bok BC ma 4 cm. Na boku D obrano punkt E tak, że $|DE| : |EC| = 1 : 4$. Czy trójkąt ABE jest prostokątny? Odpowied uzasadnij.

*5.49. **5.50.** W prostokącie $ABCD$ bok AD ma długość 10 cm. Na boku AB zaznaczono punk E w taki sposób, że $|AE| = 4$ cm. Punkt E połączono z punktami D i C. Wyznacz długoś boku AB, wiedząc, że trójkąt DEC jest prostokątny.

5.50. **5.51.** Boki prostokąta $ABCD$ mają długość: $|AB| = 4$, $|BC| = 6$. Niech K oznacza środe boku DC, zaś L – punkt leżący na boku BC i dzielący ten bok na dwa odcinki w sto sunku 1 : 2. Wykaż, że trójkąt ALK jest prostokątny. Rozważ dwa przypadki.

Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie

5.52. W trójkącie prostokątnym równoramiennym najkrótsza wysokość ma dł gość 1 dm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

5.53. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, którego wysokość ma długoś

a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{6}$ c) 15 d) $\sqrt{2}$

5.55 **5.54.** W trójkącie równobocznym bok jest o 3 cm dłuższy od wysokości. Oblicz długość boku trójkąta. Podaj przybliżenie dziesiętne wyniku z dokładnością do 0,1 cm.

5.55. W trójkącie prostokątnym równoramiennym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest o 0,5 dm krótsza od przyprostokątnej. Oblicz obwód tego trójkąta. Podaj przybliżenie dziesiętne wyniku z dokładnością do 1 cm.

5.56. W trójkącie prostokątnym wysokości mają długość: 12 cm, 15 cm, 20 cm. Jaką długość mają odcinki, na które spodek wysokości, poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego, podzielił przeciwprostokątną?

5.57. W trójkącie prostokątnym poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego. Spodek wysokości podzielił przeciwprostokątną na odcinki długości a i b. Oblicz tę wysokość, jeśli:

a) $a = 5$ cm $\quad b = 2$ dm
b) $a = 0{,}2$ dm $\quad b = 1\frac{1}{4}$ dm
c) $a = \sqrt{2}$ cm $\quad b = \sqrt{18}$ cm
d) $a = 2\sqrt{3\frac{1}{16}}$ dm $\quad b = 1{,}4$ m

5.58. Punkt C należy do okręgu o średnicy AB. Punkt C leży w odległości 12 cm od punktu B i w odległości $4\frac{8}{13}$ cm od odcinka AB. Oblicz:

a) długość średnicy okręgu
b) długość cięciwy AC.

5.59. Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu 5 cm. Z punktu C poprowadzono dwie styczne do tego okręgu. Cięciwa AB wyznaczona przez punkty styczności ma długość 8 cm. Oblicz odległość punktu C od środka okręgu.

5.60. W trójkącie równoramiennym o obwodzie 32 cm wysokość poprowadzona na podstawę jest równa 8 cm. Oblicz długość boków tego trójkąta.

5.61. W trójkącie boki mają długość: 17 cm, 25 cm, 28 cm.

a) Sprawdź, czy ten trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.
b) Oblicz wysokość poprowadzoną na najdłuższy bok.

5.62. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 13$ cm, $|BC| = 14$ cm, $|AC| = 15$ cm. Niech D oznacza spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka A. Oblicz $|CD|$.

5.63. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 6 cm i 8 cm. Oblicz różnicę długości środkowej i wysokości tego trójkąta, poprowadzonych z wierzchołka kąta prostego.

5.64. W trójkącie prostokątnym równoramiennym przyprostokątna ma długość 4. Oblicz długość środkowych tego trójkąta.

5.68. **5.65.** Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 16 cm i 12 cm. Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od wierzchołka kąta prostego.

5.69. **5.66.** W trójkącie równoramiennym boki mają długość 13 cm, 13 cm, 10 cm. Oblicz długość środkowych w tym trójkącie.

5.70. **5.67.** W trójkącie równoramiennym środkowe mają długość: 7,5 cm, 7,5 cm, 9 cm. Oblicz obwód tego trójkąta. Podaj przybliżenie dziesiętne wyniku z dokładnością do 0,1 cm.

5.71. **5.68.** W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 30 cm. Środek ciężkości tego trójkąta znajduje się w odległości $2\frac{2}{3}$ od podstawy. Oblicz obwód danego trójkąta.

5.74. **5.69.** W trójkącie ABC na wysokości CD wybrano punkt H taki, że $|\sphericalangle AHD| = |\sphericalangle ABC|$. Wykaż, że proste AH i BC są prostopadłe.

5.70. Na okręgu o średnicy AB zaznaczono punkty M i N tak, że cięciwy AM i BN przecięły się w punkcie P. Punktem wspólnym prostych AN i BM jest punkt Q. Wykaż, że prosta PQ jest prostopadła do odcinka AB.

5.76. **5.71.** Udowodnij, że jeżeli środkowa trójkąta równa się połowie boku, do którego została poprowadzona, to trójkąt jest prostokątny.

5.77. **5.72.** W trójkącie ABC poprowadzono środkowe AD, BE i CF i połączono punkty D, E, F. Wykaż, że środkowe trójkąta DEF zawierają się w środkowych trójkąta ABC.

5.73. W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa odcinkowi, który łączy środek podstawy ze środkiem ramienia. Podstawa trójkąta jest równa a. Wyznacz wysokość opuszczoną na podstawę.

5.74. W trójkącie ABC poprowadzono środkową CD. Wierzchołek A połączono odcinkiem ze środkiem E środkowej CD i przedłużono go aż do przecięcia w punkcie F z bokiem CB. Oblicz $\frac{|CF|}{|FB|}$.

***5.75.** Wykaż, że w dowolnym trójkącie ABC prawdziwa jest podwójna nierówność

$$\frac{3(a+b+c)}{4} < s_a + s_b + s_c < a + b + c,$$

gdzie a, b, c oznaczają długości odpowiednich boków trójkąta, s_a, s_b, s_c – długości środkowych poprowadzonych odpowiednio do boków o długościach a, b, c.

Symetralne boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie

5.78 **5.76.** W trójkącie ABC ($|AC| < |BC|$) wysokość CD jest równa 4,5 cm. Symetralna boku AB przecina ten bok w punkcie E, zaś bok BC w punkcie F. Wiedząc, że $|EF| = 3$ cm, oblicz $|AD| : |DB|$.

5.79 **5.77.** W trójkącie ABC ($|AC| > |BC|$) spodek wysokości CD dzieli bok AB na odcinki AD i DB w taki sposób, że $|AD| : |DB| = 3 : 1$. Symetralna boku AB przecina ten bok w punkcie E, zaś bok AC w punkcie F. Wiedząc, że $|EF| = 2{,}1$ cm, oblicz $|CD|$.

.80 **5.78.** W trójkącie prostokątnym symetralna przeciwprostokątnej przechodzi przez wierzchołek kąta prostego. Oblicz miary kątów ostrych tego trójkąta.

.81 **5.79.** W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 2 cm i 6 cm. Oblicz stosunek długości odcinków, na jakie symetralna przeciwprostokątnej podzieliła dłuższą przyprostokątną tego trójkąta.

.82 **5.80.** W trójkącie prostokątnym ABC ($|\sphericalangle CAB| = 90°$) bok AB ma długość 42 cm. Symetralna boku AB przecina bok AB w punkcie D, zaś bok BC w punkcie E. Wiedząc, że $|DE| = 28$ cm, oblicz obwód trójkąta ABC.

.83 **5.81.** Symetralne boków trójkąta prostokątnego przecinają się w punkcie odległym od wierzchołka kąta prostego o 5 cm. Wiedząc, że długości przyprostokątnych pozostają w stosunku 3 : 4, oblicz długości boków trójkąta.

.84 **5.82.** W trójkącie równoramiennym ABC kąt przy wierzchołku C jest równy 120°. Symetralne boków trójkąta przecinają się w punkcie E. Wiedząc, że $|CE| = 4$ cm, oblicz obwód trójkąta ABC.

5.83. Na trójkącie równoramiennym ABC, $|AC| = |BC|$, opisano okrąg o środku w punkcie O. Oblicz miary kątów trójkąta ABC wiedząc, że $|\sphericalangle AOB| = 72°$.

5.84. Na trójkącie równoramiennym ABC, $|AC| = |BC|$, opisano okrąg o środku w punkcie O. Oblicz miary kątów trójkąta ABC, wiedząc, że $3|\sphericalangle AOB| = 2|\sphericalangle COB|$, ($\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle COB$ – kąty wypukłe).

5.85. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym, którego bok ma długość 6 cm.

5.86. Wysokość trójkąta równobocznego jest o 3 cm dłuższa od promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Oblicz długość boku tego trójkąta.

5.89 **5.87.** Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długość 24 cm i 7 cm.

5.90 **5.88.** Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy 6 cm. Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od wierzchołka kąta prostego.

5.91 **5.89.** W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną jest równa 4 cm. Spodek tej wysokości leży w odległości $1\frac{1}{6}$ cm od środka okręgu opisanego na trójkącie. Oblicz:
a) promień okręgu opisanego na tym trójkącie
b) długości boków tego trójkąta.

5.92 **5.90.** W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 65 cm, a wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną jest równa 60 cm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

5.93 **5.91.** Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną i wynosi 7 cm. Oblicz obwód trójkąta.

5.94 **5.92.** Dane są długości boków trójkąta równoramiennego:
a) 25 cm, 25 cm, 14 cm
b) 17 cm, 17 cm, 30 cm
c) 13 cm, 13 cm, 24 cm
d) 61 cm, 61 cm, 120 cm

Sprawdź, czy dany trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

5.95 **5.93.** Wykaż, że jeżeli wysokość trójkąta zawiera się w symetralnej boku, to trójkąt ten jest równoramienny.

5.96 **5.94.** Wykaż, że jeżeli symetralna boku trójkąta jest równoległa do innego boku tego trójkąta, to trójkąt ten jest prostokątny.

5.97 **5.95.** W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie jest równy α. Wykaż, że symetralne ramion tego trójkąta tworzą kąt, którego miara jest równa 2α.

Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt

5.98 **5.96.** W trójkącie o kątach 20°, 60°, 100° poprowadzono dwusieczne tych kątów. Oblicz miary kątów powstałych w ten sposób sześciu trójkątów.

5.99. **5.97.** Wyznacz kąty trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$, a dwusieczna AD tworzy z bokiem BC kąt $120°$.

5.100. **5.98.** O pewnym trójkącie wiadomo, że dwusieczne dwóch jego kątów zawierają wysokości tego trójkąta. Jaki to trójkąt? Odpowiedź uzasadnij.

5.101. **5.99.** W trójkącie ABC dwusieczna AD kąta A jest równa bokowi AB. Wyznacz $|\sphericalangle B|$ i $|\sphericalangle C|$, wiedząc, że $|\sphericalangle A| = 108°$.

5.102. **5.100.** W trójkąt równoramienny ABC, $|AC| = |BC|$, wpisano okrąg o środku O. Oblicz miary kątów trójkąta, jeżeli $|\sphericalangle AOB| = 130°$.

5.103. **5.101.** W dany okrąg wpisano trójkąt ABC, którego kąty mają odpowiednio miary $50°, 60°, 70°$. W punktach A, B, C poprowadzono styczne do okręgu, które przecięły się w punktach A_1, B_1, C_1. Oblicz miary kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.

5.104. **5.102.** W trójkąt ABC, którego kąty mają odpowiednio miary $50°, 60°, 70°$, wpisano okrąg. Punkty styczności wyznaczają wierzchołki trójkąta KLM. Oblicz miary kątów wewnętrznych trójkąta KLM.

5.105. **5.103.** Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny, jeśli:
a) wysokość trójkąta jest równa 21 cm
b) bok trójkąta ma długość 10 cm
c) środek ciężkości tego trójkąta leży w odległości 5 cm od wierzchołków tego trójkąta.

5.107. **5.104.** Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest o 4 cm krótszy od promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Oblicz obwód tego trójkąta.

5.108. **5.105.** W trójkącie równoramiennym ABC mamy dane $|AC| = |BC| = 16$ cm oraz $|AB| = 12$ cm. W trójkąt ten wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków, na jakie punkt styczności podzielił odcinek AC.

5.106. W trójkąt ABC wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków, na jakie punkty styczności podzieliły boki trójkąta, wiedząc, że: $|AB| = 20$ cm, $|AC| = 16$ cm, $|BC| = 32$ cm.

5.107. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 3 dm i 4 dm wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków, na jakie punkty styczności podzieliły boki tego trójkąta.

5.108. Wykaż, że suma promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym oraz promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równa średniej arytmetycznej długości przyprostokątnych tego trójkąta.

5.112. **5.109.** Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość:
a) 6 cm i 8 cm
b) 8 cm i 15 cm
c) 12 cm i 5 cm
d) $2\sqrt{5}$ cm i 4 cm.

5.113. **5.110.** Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny wiedząc, że obwód trójkąta wynosi 30 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 6,5 cm.

5.115. **5.111.** Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny, którego boki mają długość:
a) 5 cm, 5 cm, 6 cm
b) 5 cm, 5 cm, 8 cm
c) 13 cm, 13 cm, 24 cm
d) 61 cm, 61 cm, 22 cm

5.116. **5.112.** W trójkącie ABC prowadzimy dwusieczne kątów B i C, które przecinają się w punkcie S. Wykaż, że trójkąt CBS jest rozwartokątny.

5.117. **5.113.** Wykaż, że w trójkącie ABC kąt między wysokością opuszczoną z wierzchołka A i dwusieczną $\sphericalangle A$ równa się połowie różnicy kątów: $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$.

5.114. Wykaż, że jeśli w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta przy podstawie dzieli dany trójkąt na dwa trójkąty równoramienne, to kąty danego trójkąta są równe: $36°, 72°, 72°$.

5.115. W trójkącie równoramiennym poprowadzono dwusieczną kąta przy podstawie, która podzieliła ramię na dwa odcinki długości 4 cm i 6 cm. Oblicz długość podstawy tego trójkąta. Rozpatrz dwa przypadki.

5.116. W trójkącie ABC boki mają długość: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Wykaż, że $|AD| = \dfrac{bc}{a+b}$ i $|BD| = \dfrac{ac}{a+b}$.

5.117. W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AB| = a$, $|BC| = |AC| = b$, poprowadzono dwusieczną kąta wewnętrznego BAC, która przecięła bok BC w punkcie E. Oblicz $\dfrac{|AO|}{|OE|}$, gdzie punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

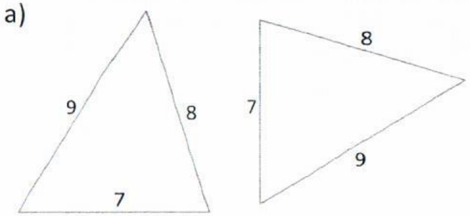
5.118. W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych są równe a i b. Oblicz długość odcinków, na jakie dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną tego trójkąta.

***5.119.** W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli przeciwległy bok w stosunku 2 : 3. Oblicz $\dfrac{r}{R}$, gdzie r oznacza promień okręgu wpisanego w dany trójkąt, a R – promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

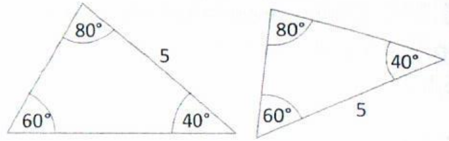
Przystawanie trójkątów

.119. **5.120.** Czy trójkąty w poniższych parach są przystające? Odpowiedź uzasadnij.

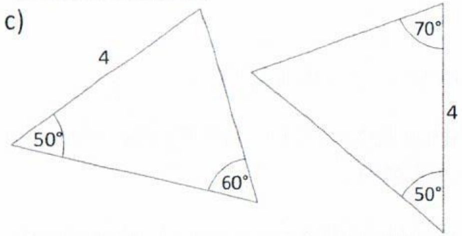
a)



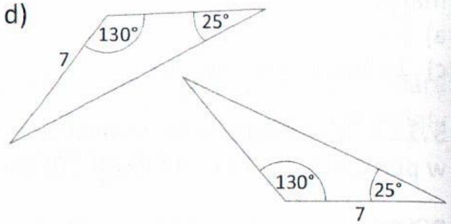
b)



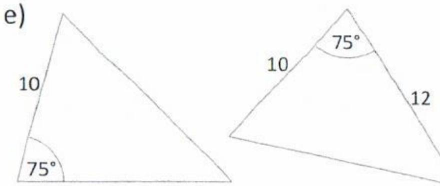
c)



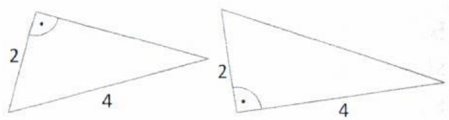
d)



e)



f)



.120. **5.121.** Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym wysokości poprowadzone do równych boków są równej długości.

.121. **5.122.** a) Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym środkowe poprowadzone do równych boków są równej długości.

b) Udowodnij, że trójkąt, który ma wszystkie środkowe równej długości, jest równoboczny.

.122. **5.123.** Udowodnij, że dwa trójkąty prostokątne są przystające, jeżeli przyprostokątna i przeciwległy jej kąt ostry jednego trójkąta równają się przyprostokątnej i przeciwległemu kątowi ostremu drugiego trójkąta.

.123. **5.124.** W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono dwusieczne BD i B_1D_1. Wykaż, że jeśli $|BC| = |B_1C_1|$, $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1|$ i $|BD| = |B_1D_1|$, to $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

.124. **5.125.** W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono środkowe BD i B_1D_1. Wykaż, że jeżeli $|BD| = |B_1D_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$ oraz $|\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle D_1B_1C_1|$, to $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

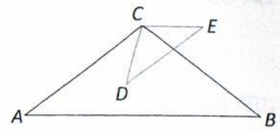
5.125. **5.126.** W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono dwusieczne CD i C_1D_1. Wykaż, że $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, wiedząc, że $|CD| = |C_1D_1|$, $|DA| = |D_1A_1|$ oraz $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle C_1D_1A_1|$.

5.126. **5.127.** W trójkątach ostrokątnych ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono wysokości CD i C_1D_1. Wykaż, że $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, jeżeli $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle A_1|$, $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1|$ i $|CD| = |C_1D_1|$.

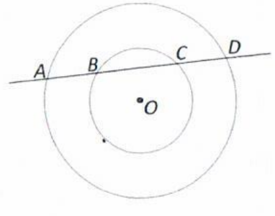
5.128. Na jednej z dwóch prostych przecinających się w punkcie O odkładamy dwa odcinki OA i OB, gdzie $|OA| = |OB|$. Na drugiej prostej odkładamy dwa inne odcinki OC i OD takie, że $|OC| = |OD|$. Wykaż, że pr. $AC \parallel$ pr. BD.

5.127. **5.129.** W trójkącie równobocznym o boku a przedłużono bok AC poza punkt A o odcinek AA_1, $|AA_1| = 1$, bok AB poza punkt B o odcinek BB_1, $|BB_1| = 1$, bok BC poza punkt C o odcinek CC_1, $|CC_1| = 1$. Udowodnij, że trójkąt $A_1B_1C_1$ jest równoboczny.

5.130. Trójkąty ABC i CDE są równoramienne, $|AC| = |BC|$, $|CD| = |CE|$ oraz $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE|$. Wykaż, że $|AD| = |BE|$.



5.131. Prosta przecina dwa okręgi współśrodkowe odpowiednio w punktach A, D i B, C, jak na rysunku obok. Wykaż, że $|AB| = |CD|$.



5.128. **5.132.** Na bokach trójkąta równobocznego ABC zaznaczono punkty E, F, D, odpowiednio na bokach AB, BC i CA tak, że $|AE| = |BF| = |CD| = \frac{1}{3}|AB|$. Wykaż, że trójkąt EFD jest równoboczny oraz że boki tego trójkąta są prostopadłe do boków trójkąta ABC.

5.129. **5.133.** Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkty P, Q, R leżą na bokach trójkąta ABC (po jednym punkcie na każdym boku) w taki sposób, że każdy bok trójkąta PQR jest prostopadły do jednego boku trójkąta ABC.

a) Wykaż, że trójkąt PQR jest równoboczny.

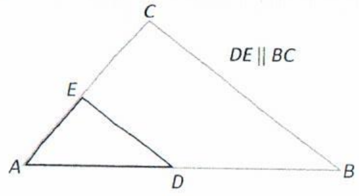
b) Wyznacz stosunek $\frac{|AB|}{|PQ|}$.

***5.134.** Na bokach trójkąta równobocznego ABC odkładamy odcinki równej długości: AD na boku AB, BE na boku BC i CF na boku CA. Następnie prowadzimy odcinki AE, BF i CD. Wykaż, że punkty przecięcia tych odcinków wyznaczają trójkąt równoboczny.

Podobieństwo trójkątów

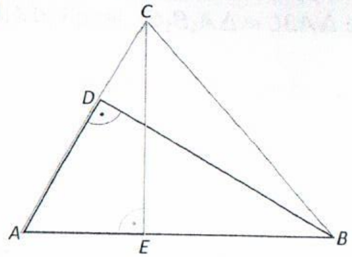
5.135. Wykaż podobieństwo trójkątów wskazanych na rysunku:

a)



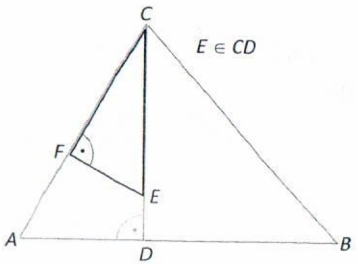
$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

b)



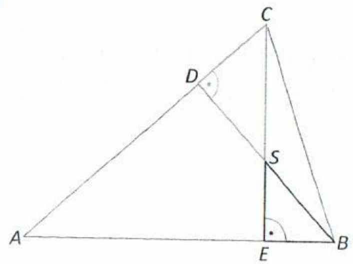
$\Delta ABD \sim \Delta AEC$

c)



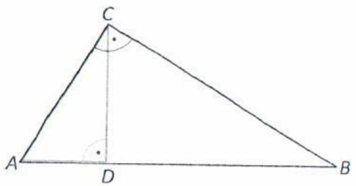
$\Delta ADC \sim \Delta CFE$

d)



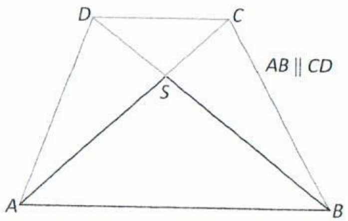
$\Delta BSE \sim \Delta CDS$

e)



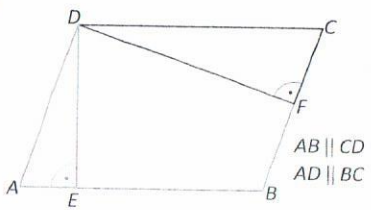
$\Delta ABC \sim \Delta ADC$

f)



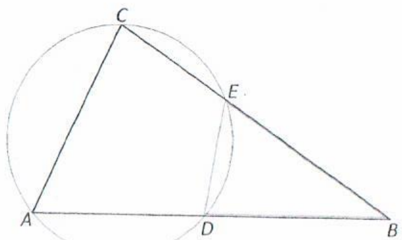
$\Delta ABS \sim \Delta CDS$

g)



$\Delta AED \sim \Delta DFC$

h)



$\Delta ABC \sim \Delta DBE$

5.136. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|AC| = 12$ cm. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC i jego obwód jest równy 6 cm. Oblicz:

a) skalę podobieństwa

b) długości boków trójkąta $A_1B_1C_1$.

5.132. **5.137.** Obwód trójkąta ABC jest równy 9 cm. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $k = 4$, a dwa jego boki mają długość: $|A_1B_1| = 10$ cm, $|A_1C_1| = 12$ cm. Oblicz długość boków trójkąta ABC.

5.133. **5.138.** Obwód trójkąta ABC jest równy 21 cm. Prosta równoległa do podstawy AB przecina wysokość CD w punkcie P, a boki AC i BC – odpowiednio w punktach E i F. Wiedząc, że $|DP| : |PC| = 1 : 2$, oblicz obwód trójkąta CEF.

5.134. **5.139.** W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość $|CA| = 5{,}5$ cm, $|CB| = 30$ cm. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC, a $|A_1B_1| = 122$ cm. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta $A_1B_1C_1$.

5.135. **5.140.** W trójkącie ABC bok AB ma długość 18 cm. Bok AC podzielono w stosunku $2 : 3 : 4$ i przez punkty podziału poprowadzono odcinki KL i MN, równoległe do AB ($L, N \in BC$). Oblicz długość odcinków KL i MN.

5.136. **5.141.** W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $|\sphericalangle C| = 90°$, $|AB| = 51$ cm, $|BC| = 24$ cm, poprowadzono odcinek DE długości 15 cm, równoległy do boku AC taki, że $E \in BC$ i $D \in AB$. Oblicz długości odcinków CE i AD.

5.137. **5.142.** W trapezie $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$, $|AB| = 14$ cm, $|DC| = 3{,}5$ cm, $|AD| = 6$ cm, przedłużono ramiona AD i BC do przecięcia w punkcie E. Oblicz $|DE|$.

5.139. **5.143.** W trójkącie równoramiennym ABC, $|AC| = |BC|$, wysokość AD podzieliła ramię BC na odcinki długości $|BD| = 5$ cm i $|DC| = 7$ cm. Oblicz długość podstawy AB.

5.140. **5.144.** W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 10 cm. Odcinek AD jest wysokością tego trójkąta. Wiedząc, że $|DB| = 6$ cm, oblicz odwód trójkąta ABC.

5.141. **5.145.** W okręgu poprowadzono dwie cięciwy AB i CD, które przecięły się w punkcie E. Wiedząc, że $|AE| = 9$ cm, $|EB| = 4$ cm i $|CE| = 3$cm, oblicz $|ED|$.

5.142. **5.146.** W trójkąt równoramienny wpisano okrąg, który jest styczny do ramion AB i AC, odpowiednio w punktach D i E. Wiedząc, że $|AB| = |AC| = 25$ cm i $|BC| = 14$ cm, oblicz:

a) długość odcinka DE

b) odległość odcinka DE od boku BC.

5.143. **5.147.** W trójkącie równoramiennym ABC są dane: $|AC| = |BC| = 26$ cm, $|AB| = 20$ cm. Oblicz odległość środka S wysokości CD od ramienia AC.

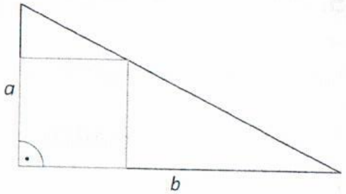
144. **5.148.** W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość: $|AB| = 8$ cm i $|AC| = 4$ cm. Punkt D dzieli bok AB w stosunku $|AD| : |DB| = 1 : 3$. Punkt E należy do boku BC i odcinek DE jest prostopadły do boku BC. Oblicz $|CE| : |EB|$.

145. **5.149.** W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 30 cm, a ramię 25 cm. Środek podstawy tego trójkąta jest środkiem okręgu stycznego do ramion trójkąta. Oblicz długość promienia tego okręgu.

146. **5.150.** W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 6 cm, a wysokość CD ma 12 cm. W trójkąt ten wpisano kwadrat, którego dwa wierzchołki należą do podstawy AB, a dwa – do ramion AC i BC. Oblicz długość boku kwadratu.

147. **5.151.** Podstawa AB trójkąta ostrokątnego ABC ma długość 10 cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę ma długość 8 cm. W ten trójkąt wpisano kwadrat tak, że dwa jego wierzchołki należą do podstawy AB, a dwa – do boków AC i BC. Oblicz długość boku kwadratu.

48. **5.152.** Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość a i b. W ten trójkąt wpisano kwadrat, jak na rysunku obok.
Wykaż, że długość boku kwadratu jest równa $\frac{a \cdot b}{a+b}$.

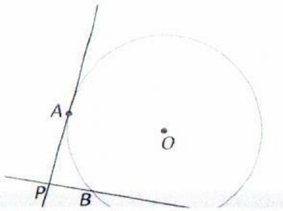


49. **5.153.** W trójkącie równobocznym ABC wysokości AE i CD przecinają się w punkcie O.
a) Wykaż, że trójkąt ODE jest podobny do trójkąta ADE. Oblicz skalę tego podobieństwa.
b) Wiedząc dodatkowo, że obwód trójkąta ODE wynosi 2, oblicz długość boku trójkąta ABC. Wynik przedstaw w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{C}$ i $c > 0$.

50. **5.154.** W prostokącie $ABCD$ punkt E jest środkiem boku BC. Odcinek DE przecina przekątną AC w punkcie F. Wykaż, że $|AF| = 2|FC|$.

Twierdzenie o stycznej i siecznej

5.155. Z punktu P poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A oraz sieczną, przecinającą okrąg w punktach B i C, jak na rysunku poniżej. Wiedząc, że $|PB| = 1$ cm, $|BC| = 8$ cm, oblicz $|PA|$.



5.156. Satelita telekomunikacyjny znajduje się 550 km nad powierzchnią Ziemi. Jaka jest maksymalna odległość satelity od takiego miejsca na Ziemi, w którym może być odbierany sygnał z tego satelity? W obliczeniach przyjmij, że Ziemia jest kulą o średnicy 12740 km. Wynik podaj z dokładnością do 1 km.

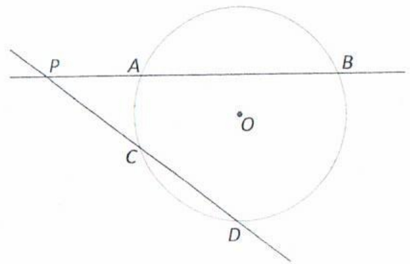
5.157. Przez punkt P poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A i sieczną okręgu, przecinającą ten okrąg w punktach B i C (zobacz rysunek do zadania 5.155.). Wiedząc, że $|PA| = 8$ cm oraz $|PB| = 4$ cm, oblicz $|BC|$.

5.158. Przez punkt P poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A i sieczną okręgu, przecinającą ten okrąg w punktach B i C (zobacz rysunek do zadania 5.155.). Wykaż, że jeśli $|PB| : |BC| = 9 : 16$, to $|PA| : |PC| = 3 : 5$.

5.159. Przez punkt P poprowadzono styczną do okręgu w punkcie A i sieczną okręgu, przecinającą ten okrąg w punktach B i C (zobacz rysunek do zadania 5.155.). Wykaż, że jeśli $|PB| : |BC| = 1 : 3$, to $|PB| < |AB| < |BC|$.

5.160. Przez punkt P leżący w odległości 11 cm od środka okręgu poprowadzono sieczną, która przecięła ten okrąg w punktach A i B. Wiedząc, że $|PA| = |AB| = 6$ cm, oblicz promień tego okręgu.

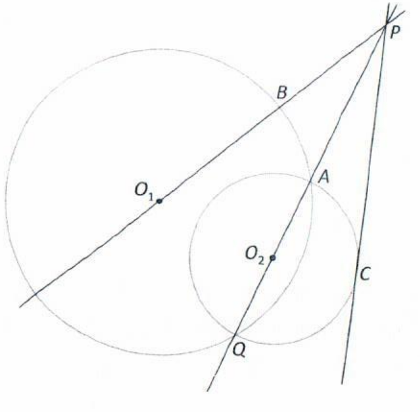
5.161. Przez punkt P poprowadzono dwie proste, które przecięły okrąg odpowiednio w punktach A, B oraz C, D (zobacz rysunek poniżej). Wiedząc, że $|PB| + |PD| = 28$ cm oraz $|PA| : |PC| = 5 : 9$, oblicz $|PB|$ i $|PD|$.



5.162. Cięciwy AB i CD okręgu przecinają się w punkcie P. Punkt P dzieli cięciwę CD na połowy, a cięciwę AB na odcinki AP i PB, takie, że $|AP| = 9$ cm, $|PB| = 4$ cm. Oblicz $|CD|$.

5.163. Średnicą okręgu o środku O jest bok AB trójkąta ABC. Okrąg ten przecina bok AC w punkcie D i bok BC w punkcie E. Wiedząc, że $|AB| = 15$ cm, $|BE| = 9$ cm i $|CE| = 5$ cm, oblicz $|DC|$ i $|AD|$.

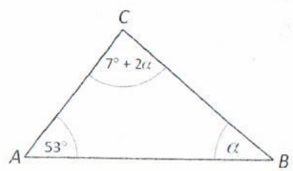
5.164. Okręgi o środkach O_1 i O_2 przecinają się w punktach A i Q i punkt O_2 należy do cięciwy AQ. Punkt P leży na prostej AQ, prosta PC jest styczną do okręgu o środku O_2 (w punkcie C), punkt B jest punktem przecięcia odcinka PO_1 z okręgiem o środku O_1 (zobacz rysunek poniżej). Wiedząc, że: $|PA| = 8$ cm, $|PB| = 6$ cm i $|PC| = 12$ cm, oblicz $|O_1O_2|$.



Test sprawdzający do rozdziału 5.

1. Na rysunku obok dane są kąty trójkąta ABC. Zatem:

A. $\alpha = 13°$ B. $\alpha = 50°$
C. $\alpha = 30°$ D. $\alpha = 40°$.



2. Dwa boki trójkąta mają długość 4 oraz $5\frac{1}{2}$, a obwód tego trójkąta jest liczbą naturalną. Trzeci bok tego trójkąta może mieć maksymalnie długość równą:

A. 9 B. 8,5 C. 7,5 D. 5,5.

3. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest o 1 cm krótsza od przeciwprostokątnej, a druga przyprostokątna ma 5 cm długości. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość:

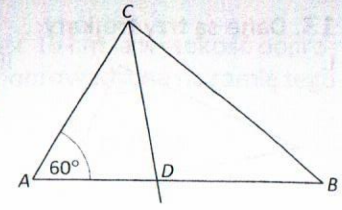
A. 5 cm B. 10 cm C. 13 cm D. 15 cm.

4. W pewnym trójkącie dwusieczna tylko jednego kąta zawiera wysokość tego trójkąta. Zatem trójkąt ten jest:

A. rozwartokątny B. prostokątny C. równoramienny D. równoboczny.

5. W trójkącie ABC na rysunku obok kąt przy wierzchołku A jest równy 60°. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Jeżeli $|CD| = |DB|$, to kąt ACB jest równy:

A. 90° B. 80°
C. 70° D. 60°.



6. W trójkącie prostokątnym równoramiennym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość a. Długość przeciwprostokątnej jest równa:

A. $2a$ B. $\sqrt{2}a$ C. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ D. a.

7. W trójkącie równoramiennym ramię ma długość 3, a kąt między ramionami jest równy 30°. Wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka przy podstawie jest równa:

A. $\sqrt{2}$ B. 1,5 C. $\sqrt{3}$ D. 2.

8. W trójkącie równobocznym ABC punkty D i E są odpowiednio środkami boków AB i BC. Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w punkcie S. Nieprawdą jest, że trójkąty ADS i CSE są:

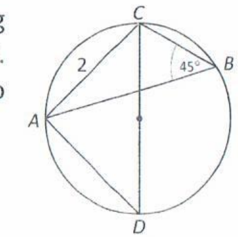
A. prostokątne B. równoramienne C. przystające D. podobne.

9. Środek okręgu opisanego na trójkącie jest punktem przecięcia:

A. wysokości B. środkowych
C. dwusiecznych kątów D. symetralnych boków tego trójkąta.

10. Na rysunku obok trójkąty ABC i ADC są wpisane w okrąg o środku w punkcie O. Odcinek CD jest średnicą tego okręgu. Bok AC ma długość 2, zaś kąt CBA jest równy 45°. Wobec tego promień tego okręgu wynosi:

A. 1 B. $\sqrt{2}$
C. 2 D. $2\sqrt{2}$.



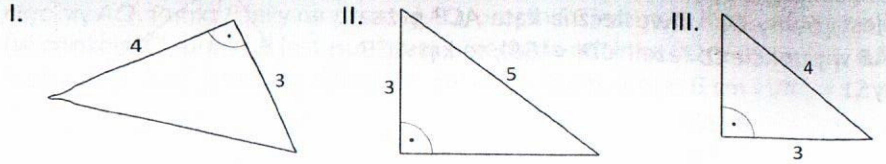
11. W trójkącie o bokach długości 4, 5, 6 połączono środki boków i otrzymano w ten sposób nowy trójkąt. Obwód nowego trójkąta jest równy:

A. 5,5 B. 6,5 C. 7,5 D. 8,5.

12. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku a jest równy 2 cm. Zatem:

A. $a = 2\sqrt{3}$ B. $a = 3\sqrt{3}$ C. $a = 2 + \sqrt{3}$ D. $a = 3 + \sqrt{3}$.

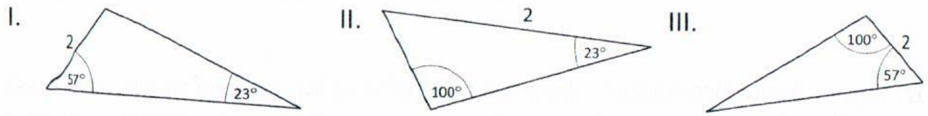
13. Dane są trzy trójkąty:



Trójkąty przystające są na rysunkach:

A. tylko na I i II B. tylko na II i III C. tylko na I i III D. na I, II i III.

14. Dane są trzy trójkąty:



Trójkąty przystające są na rysunkach:

A. tylko na I i II B. tylko na II i III C. tylko na I i III D. na I, II i III.

15. Trójkąt $A_1B_1C_1$ ma obwód 18 cm i jest podobny do trójkąta ABC w skali 3. Obwód trójkąta ABC jest równy:

A. 2 cm B. 6 cm C. 15 cm D. 54 cm.

16. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono dwie wysokości CD i AE. Wiadomo, że $|DB| = 2{,}5$ cm, $|CD| = 5$ cm oraz $|AE| = 4$ cm. Wówczas:

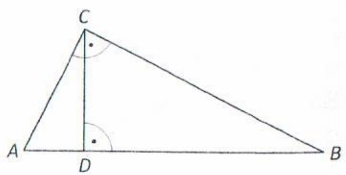
A. $|EB| = 2$ cm B. $|EB| = 2\frac{1}{4}$ cm C. $|EB| = 3$ cm D. $|EB| = 3\frac{1}{8}$ cm.

17. W trójkącie ABC na rysunku obok $|AD| = 1\frac{1}{5}$ cm, $|DB| = 7{,}5$ cm.

Odcinek CD ma długość:

A. 2 cm B. 3 cm

C. 4 cm D. 5 cm.



18. Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 15 i 20 jest równy:

A. 12,5 B. 10 C. 8 D. 5.

19. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 2 cm. W trójkąt wpisano okrąg. Punkt styczności D okręgu z ramieniem AC dzieli to ramię na dwa odcinki, których długości pozostają w stosunku $|AD| : |DC| = 2 : 3$. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. 12 cm B. 9 cm C. 8 cm D. 7 cm.

20. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 16 cm, a wysokość poprowadzona na tę podstawę jest równa 18 cm. Środkowa poprowadzona na ramię tego trójkąta ma długość:

A. 15 cm B. 12 cm C. 10 cm D. 9 cm.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

5.152. **5.165.** W trójkącie ABC dwusieczna poprowadzona z wierzchołka C przecina przeciwległy bok w punkcie D. Wiedząc, że $|\sphericalangle BDC| = 100°$ i że odcinek CD jest równy jednemu z boków wychodzących z wierzchołka C, oblicz miary kątów trójkąta ABC.

5.154. **5.166.** Trójkąt ostrokątny równoramienny ABC ($|\sphericalangle B| = |\sphericalangle C|$) wpisano w okrąg. Następnie przez punkty B i C poprowadzono styczne do okręgu, przecinające się w punkcie D. Miara kąta CDB jest dwa razy mniejsza od miary kąta przy podstawie trójkąta ABC. Oblicz miarę kąta BAC.

5.155. **5.167.** W trójkącie równobocznym ABC poprowadzono wysokość BD i na przedłużeniu wysokości odłożono punkt K tak, że $|BK| = |AC|$. Punkt K połączono z punktami A i C. Oblicz $|\sphericalangle AKC|$. Rozważ dwa przypadki.

5.156. **5.168.** Oblicz długości boków trójkąta równoramiennego ABC wiedząc, że $|AB| = 2a + 5$, $|BC| = a + 6$, $|CA| = 4a - 1$.

5.157. **5.169.** Dany jest trójkąt równoramienny ABC, $|AB| = |BC|$, o obwodzie 200 cm. W trójkącie tym poprowadzono środkowe AD i CE. Obwód trójkąta ACE jest o 20 cm większy od obwodu trójkąta ABD. Oblicz długości boków trójkąta ABC.

5.158. **5.170.** Rozpatrujemy trójkąty, których boki są kolejnymi liczbami naturalnymi, a obwód jest mniejszy od 17.

a) Wyznacz długości boków trójkąta, który ma największy obwód.

b) Dla wyznaczonego trójkąta oblicz długość odcinka łączącego środki dwóch krótszych boków.

5.159. **5.171.** Dane są długości boków trójkąta ABC. Punkt D należy do boku AB. Sprawdź, czy odcinek CD jest wysokością trójkąta ABC, jeśli:

a) $|AB| = 2\sqrt{2}$; $|AC| = |BC| = 2$; $|CD| = \sqrt{2}$

b) $|AB| = 1$; $|BC| = 2$; $|AC| = |CD| = \sqrt{3}$

c) $|AB| = |AC| = 8$; $|BC| = 9$; $|CD| = 2\sqrt{14}$

d) $|AB| = 10{,}5$; $|AC| = 8{,}5$; $|BC| = 5$; $|CD| = 4$

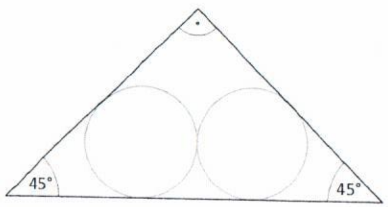
160. **5.172.** W prostokącie $ABCD$ poprowadzono odcinek AE prostopadły do przekątnej DB i punkt E należy do boku DC prostokąta. Przekątna DB przecina się z odcinkiem AE w punkcie P. Wiedząc, że $|AP| = 8$ cm, $|PE| = 2$ cm, oblicz:
a) długość przekątnej prostokąta
b) długość boków prostokąta.

161. **5.173.** W trójkącie prostokątnym równoramiennym środkowa poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość 6 cm. Oblicz długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta ostrego tego trójkąta.

162. **5.174.** W trójkącie prostokątnym jedna przyprostokątna jest o 3 cm krótsza od przeciwprostokątnej. Druga przyprostokątna ma długość 9 cm. Oblicz:
a) obwód trójkąta
b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie
c) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt
d) odległość punktu przecięcia środkowych trójkąta od wierzchołka kąta prostego.

163. **5.175.** Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 36 cm. Środek ciężkości tego trójkąta znajduje się w odległości 5 cm od wierzchołka kąta prostego. Oblicz:
a) promień okręgu opisanego na tym trójkącie
b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

164. **5.176.** W trójkąt prostokątny równoramienny wpisano dwa okręgi styczne zewnętrznie do siebie, każdy o promieniu 1 cm.

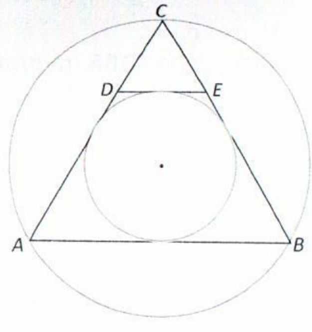


Oblicz obwód tego trójkąta.

165. **5.177.** W trójkącie równoramiennym największy kąt jest równy 120°, a najkrótsza wysokość ma 1 dm długości. Wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

167. **5.178.** Boki trójkąta mają długość: 16 cm, 10 cm, 10 cm. Oblicz odległość między środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt a środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

168. **5.179.** Różnica między promieniem okręgu o_1, opisanego na trójkącie równobocznym ABC, i promieniem okręgu o_2, wpisanego w ten trójkąt, wynosi 1 dm. Odcinek DE jest styczny do okręgu o_1 i równoległy do boku AB (patrz rysunek poniżej).



a) W jakiej odległości od boku AB znajduje się odcinek DE?
b) Oblicz długość odcinka DE.

5.169. **5.180.** Przez punkt K przecięcia się przekątnych AC i BD trapezu poprowadzono prostą m, prostopadłą do obu podstaw trapezu, która przecina krótszą podstawę DC trapezu w punkcie L, a dłuższą podstawę AB w punkcie M. Wiedząc, że $|LM| = 12$ cm oraz, że $|KL| = 2$ cm i $|LC| = 3$cm, oblicz długość przekątnej AC trapezu.

5.171. **5.181.** W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AC. Z punktu D poprowadzono odcinek DE taki, że $DE \perp AB$ oraz $E \in AB$. Wykaż, że długość odcinka DE jest równa połowie wysokości CF.

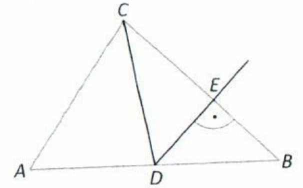
5.172. **5.182.** Z dowolnego punktu przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego równoramiennego prowadzimy odcinki prostopadłe do przyprostokątnych. Udowodnij, że suma długości tych odcinków jest równa długości przyprostokątnej.

5.173. **5.183.** W trójkącie ABC przedłużono bok AB poza wierzchołek B i odłożono odcinek BD, równy odcinkowi BC. Połączono punkty C i D. Wykaż, że $|\sphericalangle CDA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CBA|$.

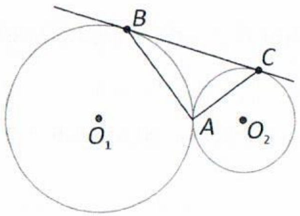
5.174. **5.184.** W trójkącie ABC boki AC i BC mają taką samą długość. Na półprostej $BC^{\rightarrow}$ poza bokiem BC zaznaczono punkt D tak, że prosta przechodząca przez punkt D i prostopadła do boku AB przecina się z bokiem AC w punkcie E. Udowodnij, że trójkąt CDE jest równoramienny.

5.175. **5.185.** Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = |AC|$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 3|\sphericalangle BAC|$. Półproste $BK^{\rightarrow}$ i $BL^{\rightarrow}$ dzielą kąt ABC na trzy równe części ($|\sphericalangle LBC| = \frac{1}{3}|\sphericalangle ABC|$). Udowodnij, że trójkąty BCL, BCK i BKA są równoramienne.

176. **5.186.** Na rysunku poniżej środkowa kąta przy wierzchołku C w trójkącie ABC przecina bok AB w punkcie D. Półprosta DE jest dwusieczną kąta BDC. Wykaż, że jeżeli $DE \perp BC$, to trójkąt ABC jest prostokątny.



177. **5.187.** Do okręgów o_1 i o_2 stycznych zewnętrznie w punkcie A poprowadzono wspólną styczną zewnętrzną BC (B, C to punkty styczności). Udowodnij, że $|\sphericalangle BAC| = 90°$.



178. **5.188.** Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, punkty A_1, B_1, C_1 są środkami boków, a punkty K, L, M są środkami odcinków SA, SB, SC. Udowodnij, że $\Delta A_1B_1C_1 \equiv \Delta KLM$.

179. **5.189.** Z punktu A leżącego na okręgu o promieniu 5 cm poprowadzono dwie cięciwy AB i AC. Odległości cięciw AB i AC od środka okręgu są odpowiednio równe 4 cm i 3 cm. Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

5.190. W trójkącie ABC, $|\sphericalangle C| = 90°$, przedłużono bok AC poza punkt C o odcinek CB_1, $|CB_1| = |CB|$ oraz bok BC poza punkt C o odcinek CA_1, $|CA_1| = |CA|$. Połączono punkty A_1 i B_1. Wykaż, że przedłużenie wysokości CD trójkąta ABC zawiera środkową trójkąta A_1B_1C poprowadzoną z wierzchołka C.

***5.191.** Na ramionach kąta o wierzchołku A odkładamy dwa odcinki AB i AC, gdzie $|AB| = |AC|$ i dalej kolejne dwa odcinki BD i CE, gdzie $|BD| = |CE|$. Odcinki BE i DC przecinają się w punkcie O. Wykaż, że prosta AO zawiera dwusieczną kąta BAC.

180. **5.192.** W trójkącie równoramiennym ABC, $|AC| = |BC|$ punkt D jest spodkiem wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C, a punkt E jest środkiem boku BC i $|CD| = |DE|$.

a) Udowodnij, że trójkąt CDE jest równoboczny.
b) Oblicz miary kątów trójkąta ABC.

5.181. **5.193.** W trójkącie ABC środkowe poprowadzone z wierzchołków A i B są do siebie prostopadłe. Wykaż, że jeżeli $|BC| = a$, $|AC| = b$, to $|AB| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$.

5.182. **5.194.** W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość: $|AB| = 32$ cm, $|AC| = 24$ cm. Symetralna boku BC przecina ten bok w punkcie D, bok AB w punkcie E i przedłużenie boku AC w punkcie F. Udowodnij, że trójkąt EBD jest podobny do trójkąta EAF i oblicz skalę tego podobieństwa.

5.195. Dany jest odcinek AB. Prowadzimy prostą k, prostopadłą do odcinka AB i przecinającą ten odcinek w punkcie Q. Wykaż, że dla dowolnego punktu P należącego do prostej k wartość wyrażenia $|PA|^2 - |PB|^2$ jest stała (to znaczy nie zależy od wyboru punktu P).

5.196. Z punktu P, którego odległość od środka O okręgu jest równa 5 cm, poprowadzono styczną do okręgu w punkcie K oraz sieczną przecinającą okrąg w punktach A i B. Wiedząc, że promień okręgu jest równy 3 cm i $|BP| : |AP| = 3 : 2$, oblicz $|AB|$.

***5.197.** Środkiem O odcinka AB o długości 20 cm jest środek okręgu o promieniu 6 cm. Przez punk A poprowadzono styczną do okręgu w punkcie C. Odcinek CB przecina okrąg w punkcie D. Oblicz $|CD|$ i $|DB|$.

5.198. W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 12 cm i 5 cm poprowadzono dwusieczną najmniejszego kąta. Oblicz długość odcinka dwusiecznej zawartego w tym trójkącie.

***5.199.** We wnętrzu kąta ostrego leży punkt A. Na jednym ramieniu kąta wyznacz punkt B, a na drugim ramieniu – punkt C, tak aby obwód trójkąta ABC był najmniejszy z możliwych.

***5.200.** We wnętrzu kąta o mierze 60° leży punkt S. Odległość punktu S od ramion kąta wynosi odpowiednio $4\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$. Oblicz odległość punktu S od wierzchołka O tego kąta.