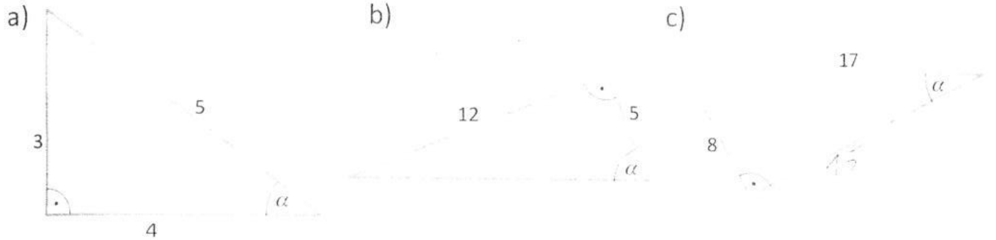
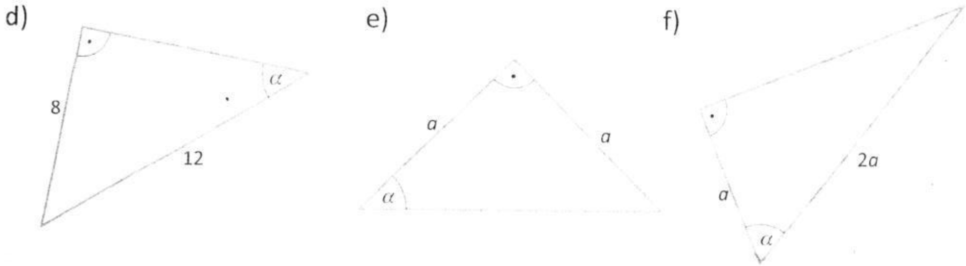
6.

6.1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α w trójkącie prostokątnym na rysunku poniżej:

a) b) c)

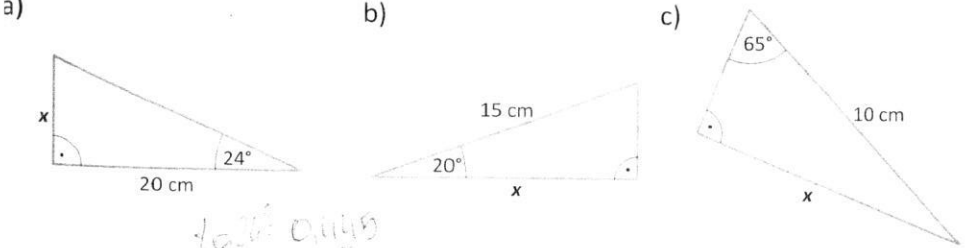


d) e) f)

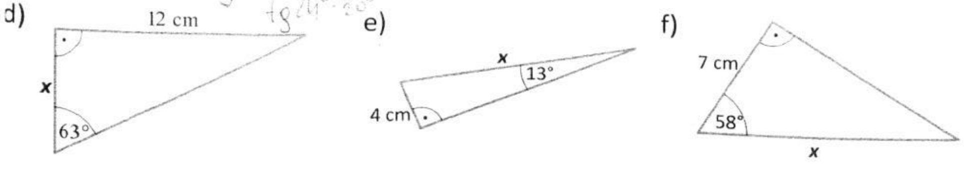


6.2. Oblicz długość boku x, zaznaczonego na rysunku poniżej, z dokładnością do 0,1 cm (patrz tabela wartości funkcji trygonometrycznych, str. 378).

a) b) c)

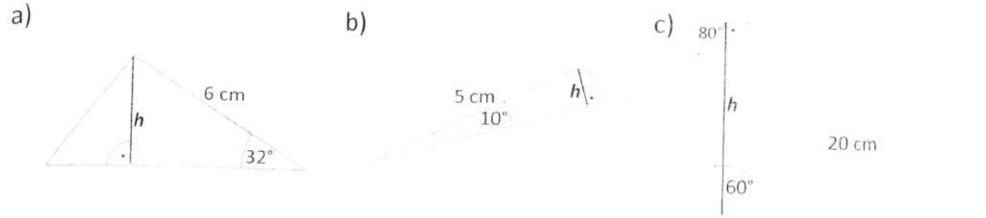


d) e) f)

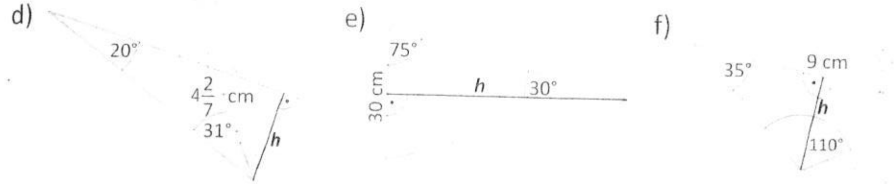


6.3. Korzystając z danych w trójkącie na rysunku poniżej, oblicz wysokość h z dokładnością do 0,1 cm.

a) b) c)

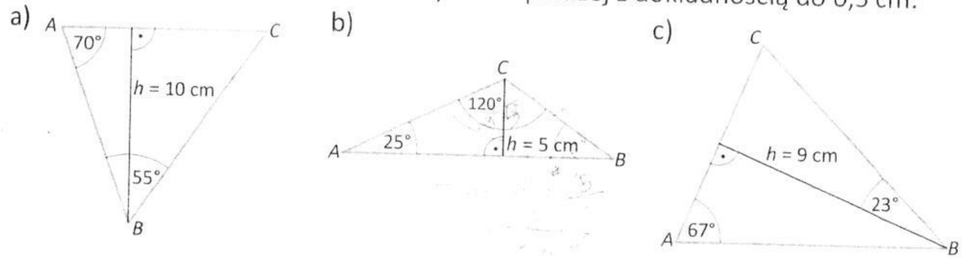


d) e) f)

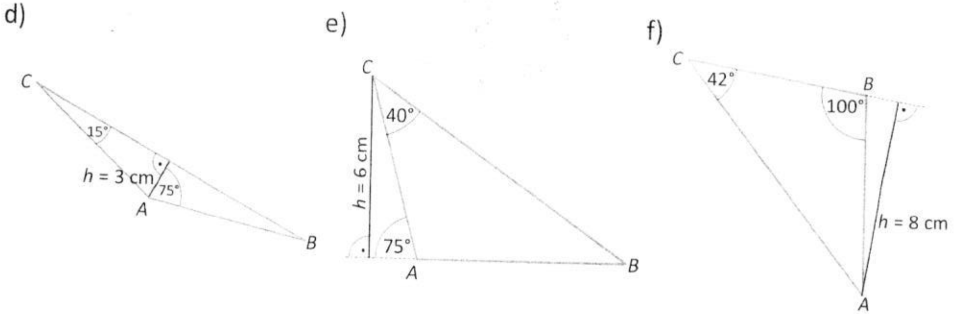


6.4. Oblicz obwód trójkąta ABC na rysunku poniżej z dokładnością do 0,5 cm:

a) b) c)

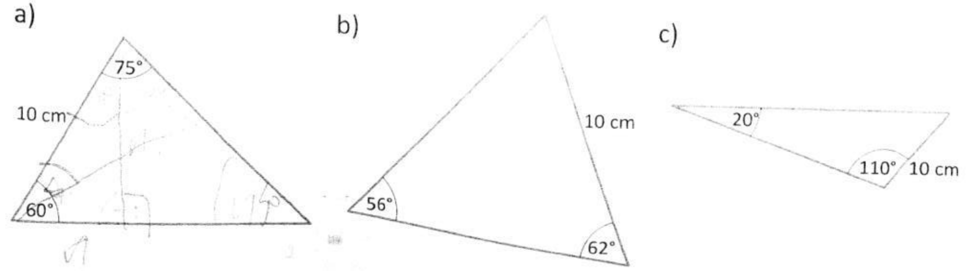


d) e) f)

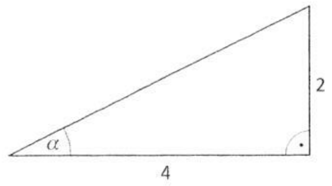


6.5. Oblicz wszystkie wysokości w trójkącie na rysunku poniżej z dokładnością do 0,1 cm:

a) b) c)



6.6. **6.6.** Oblicz wartość wyrażenia,

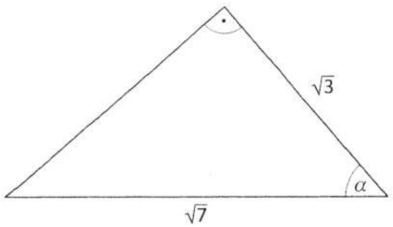


wykorzystując dane z rysunku powyżej:

a) $1 + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

b) $(\mathrm{tg}\alpha \cdot \cos\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \sin\alpha)^2$

6.7. **6.7.** Oblicz wartość wyrażenia,

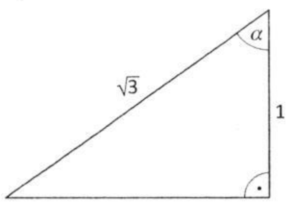


wykorzystując dane z rysunku powyżej:

a) $4 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\alpha$

b) $(\sin\alpha + \mathrm{tg}\alpha)^2$

6.8. **6.8.** Oblicz wartość wyrażenia,



wykorzystując dane z rysunku powyżej:

a) $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$

b) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + 2\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

6.9. W trójkącie prostokątnym przyprostokątna przeciwległa kątowi α ma długość a, druga przyprostokątna ma długość b, a przeciwprostokątna c. Wiadomo, że $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{b^2 + c^2}{6ac}$.

6.10. Dany jest trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątna przyległa do kąta ma długość n, gdzie $n > 1$. Druga przyprostokątna jest o 1 krótsza od przeciwprost kątnej. Wykaż, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{n^2 + 2n - 1}{n^2 + 1}$.

6.9. **6.11.** Zbuduj taki kąt α, $\alpha \in (0°, 90°)$, dla którego:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ b) $\cos\alpha = \frac{5}{6}$ c) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ d) $\mathrm{ctg}\alpha = 4$

6.10. **6.12.** Zbuduj taki kąt α, $\alpha \in (0°, 90°)$, dla którego:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ b) $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ c) $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{7}$ d) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{4}{\sqrt{6}}$

6.11. **6.13.** W prostokącie $ABCD$ przekątne mają długość 16 cm i przecinają się pod kąte ostrym 50°. Oblicz odległość wierzchołka A od przekątnej BD z dokładnością d 0,01 cm.

6.12. **6.14.** W równoległoboku $ABCD$ wysokości mają długość 4 cm i 5 cm, a kąt rozwar ma 115°. Oblicz obwód tego równoległoboku z dokładnością do 0,1 cm.

6.13. **6.15.** W trójkącie prostokątnym naprzeciw kąta ostrego α leży przyprostokątr długości a. Oblicz długość pozostałych boków trójkąta, jeśli:

a) $a = 4$ cm, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{8}{15}$ b) $a = 10$ cm, $\mathrm{ctg}\alpha = 2{,}4$

c) $a = 7$ cm, $\mathrm{tg}\alpha = 1$ d) $a = 6$ cm, $\mathrm{ctg}\alpha = \sqrt{3}$

6.14. **6.16.** W trójkącie prostokątnym naprzeciw kąta ostrego α leży przyprostokątr długości a. Oblicz długość pozostałych boków trójkąta, jeśli:

a) $a = 40$ cm, $\sin\alpha = 0{,}8$ b) $a = 5$ cm, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $a = 3$ cm, $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ d) $a = \sqrt{6}$ cm, $\cos\alpha = 0{,}5$

6.15. **6.17.** W pewnym prostokącie przekątna ma długość d i tworzy z jednym z bokó kąt α. Oblicz obwód tego prostokąta, jeśli:

a) $d = 9$ cm, $\cos\alpha = 0{,}6$ b) $d = 2\frac{1}{3}$ cm, $\sin\alpha = \frac{1}{7}$

c) $d = 2\sqrt{17}$ cm, $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}25$ d) $d = 4\sqrt{5}$ cm, $\mathrm{ctg}\,\alpha = 3$

6.16. **6.18.** W równoległoboku sinus kąta ostrego jest równy $\frac{2}{3}$, a wysokość opuszczor na dłuższy bok ma długość 8 cm. Oblicz obwód tego równoległoboku wiedząc, że j den z boków stanowi $\frac{3}{4}$ drugiego boku.

6.17. **6.19.** Boki pewnego równoległoboku pozostają w stosunku 1 : 2. Krótsza wysokość tego równoległoboku ma długość 6 cm i tworzy z krótszym bokiem kąt α, dla którego $\cos\alpha = 0{,}9$. Oblicz obwód tego równoległoboku.

6.18. **6.20.** Obwód rombu jest równy 244 cm, a krótsza przekątna ma długość 22 cm. Oblicz:

a) cosinus kąta między krótszą przekątną a bokiem rombu

b) cotangens kąta między dłuższą przekątną rombu a bokiem rombu.

6.19. **6.21.** Średnica AB okręgu ma długość 10 cm, a cięciwa CD, prostopadła do AB, jest oddalona od punktu A o 9 cm. Oblicz:

a) tangens kąta CBA

b) sinus kąta CAB.

6.20. **6.22.** Promienie słoneczne padają pod kątem 16°. Oblicz długość cienia, który rzuca maszt mający 12,5 m wysokości.

6.21. **6.23.** Drzewo mające 14 m wysokości, rosnące na równinie, rzuca cień długości 23 m. Pod jakim kątem padają promienie słoneczne?

6.22. **6.24.** Kąt wzniesienia baszty, zmierzony w odległości 80 m od jej podstawy, ma miarę 48°. Jaką wysokość ma baszta?

6.23. **6.25.** Janek stoi na stromym brzegu jeziora, 16 m nad jego poziomem. Zauważył, że po jeziorze płynie łódź, której kąt depresji ma miarę 21°. W jakiej odległości od brzegu znajduje się łódź?

6.24. **6.26.** Do miski mającej kształt półkuli o promieniu 10 cm nalano wody do wysokości 6 cm. Jaki jest największy kąt, o który można przechylić miskę tak, aby woda się nie wylała?

6.25. **6.27.** Dwie prostopadłe do siebie siły $\vec{F_1}$ i $\vec{F_2}$, zaczepione w tym samym punkcie, mają odpowiednio wartości 20 N i 48 N. Znajdź wartość siły wypadkowej $\vec{F}$ oraz miary kątów, jakie siła $\vec{F}$ tworzy ze składowymi $\vec{F_1}$ i $\vec{F_2}$.

6.28. Kasia siedzi na sankach, które ciągnie jej kolega Jacek, działając siłą o wartości $F = 105$ N. Sanki przylegają do podłoża. Miara kąta α między kierunkiem siły a drogą wynosi 25°. Jaką pracę W wykona Jacek, jeśli będzie ciągnął sanki na drodze $s = 250$ m? Wynik podaj z dokładnością do 1 J.

6.26. **6.29.** Sieradz leży na 51°35′ szerokości geograficznej północnej. Załóżmy, że Ziemia jest kulą o promieniu długości 6370 km. Oblicz:

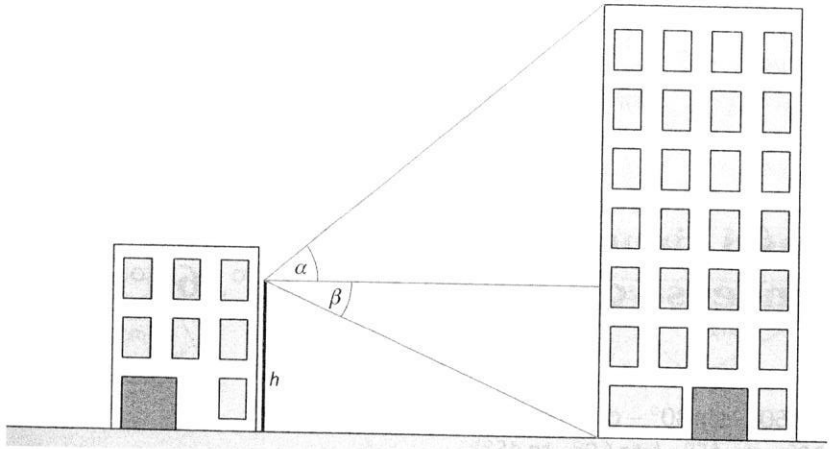
a) długość promienia równoleżnika, na którym leży Sieradz

b) drogę, jaką przebywa Sieradz, na skutek ruchu wirowego Ziemi, w ciągu 45 minut. Wyniki podaj z dokładnością do 1 km.

6.30. Kuter płynie z prędkością 8 węzłów w kierunku, który odchyla się od kierunk zachodniego o 33°45′ na południe. O godzinie $9^{\underline{35}}$ zauważono tankowiec, 7 mil n zachód od kutra. Tankowiec płynie na zachód z prędkością 5 węzłów. O której go dzinie tankowiec będzie znajdował się na północ od kutra?

Uwaga: 1 węzeł = 1 mila morska na godzinę.

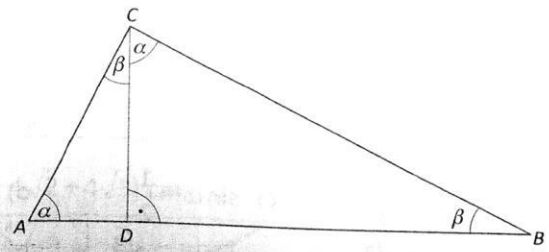
6.27. **6.31.** Z okna znajdującego się na wysokości h zmierzono dwa kąty α i β (patrz rysu nek poniżej).



Jaką wysokość ma wieżowiec?

6.32. Balon wznosi się pionowo. W chwili, gdy znajduje się on na wysokości h metrów nad ziemią, osoba lecąca balonem mierzy kąt depresji α przedmiotu znajdującego się na ziemi. Po upływie t sekund powtarza pomiar i otrzymuje kąt β. Z jaką średnią prędkością v wznosi się balon?

6.28. **6.33.** Dany jest trójkąt prostokątny ABC, $|\sphericalangle C| = 90°$. W tym trójkącie poprowadzono wysokość CD. Wykażemy, że $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$.



Oznaczmy $|\sphericalangle A| = \alpha$ i $|\sphericalangle B| = \beta$. Wówczas $|\sphericalangle BCD| = \alpha$ i $|\sphericalangle DCA| = \beta$ (dlaczego?).
Obliczmy $\cos\alpha$ na dwa sposoby.

Z zależności w trójkącie prostokątnym ABC otrzymujemy równość

$$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|}$$

Z zależności w trójkącie prostokątnym ADC otrzymujemy zależność

$$\cos\alpha = \frac{|AD|}{|AC|}$$

Zatem

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|}, \text{ czyli}$$

$$|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$$

Postępując podobnie, wykaż, że:

a) $|BC|^2 = |AB| \cdot |DB|$

b) $|CD|^2 = |AD| \cdot |DB|$

Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów 30°, 45°, 60°

6.29. **6.34.** Oblicz:

a) $4 \cdot \cos 60° \cdot \sin 30° - \cos 30° \cdot \sin 60°$

b) $\operatorname{ctg} 30° \cdot \operatorname{ctg} 45° : (\operatorname{ctg} 60° \cdot \operatorname{tg} 45°)$

c) $18 \cdot \sin 30° \cdot \operatorname{tg} 30° : (\cos 30° \cdot \operatorname{tg} 60°)$

d) $6 \cdot (\sin 30° \cdot \cos 45° \cdot \operatorname{ctg} 60°) : (\operatorname{ctg} 30° \cdot \sin 45°)$

e) $12 \cdot (\operatorname{tg} 60° - \cos 60°) \cdot (\operatorname{tg} 30° + \cos 30°)$

f) $(\sin 45° + \operatorname{ctg} 45°) \cdot (6 \cdot \sin 60° - \operatorname{ctg} 30°)$

6.30. **6.35.** Oblicz:

a) $(\cos 45° - \cos 30°) \cdot (\cos 45° + \cos 30°)$

b) $(3\sin 45° + \operatorname{tg} 60°) \cdot (3\sin 45° - \operatorname{tg} 60°)$

c) $(\sin 60° + \cos 30°)^2 - (\sin 30° + \cos 60°)^2$

d) $(\operatorname{tg} 60° - \sin 30°) \cdot (\cos 60° - \operatorname{ctg} 30°)$

e) $4(\operatorname{ctg} 45° + \sin 60°) \cdot (\cos 30° + \operatorname{tg} 45°)$

f) $2(\operatorname{tg} 30° - \sin 45°) \cdot (\cos 45° - \operatorname{ctg} 60°)$

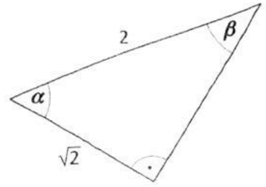
6.31. **6.36.** Wyznacz α, $\alpha \in (0°, 90°)$, wiedząc, że:

a) $\operatorname{tg}\alpha = 1$ b) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ c) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$

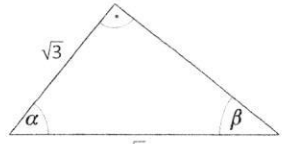
e) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ f) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ g) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$

6.32. **6.37.** Wyznacz kąty α i β, korzystając z danych na rysunkach poniżej:

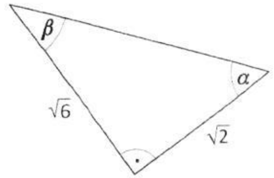
a)



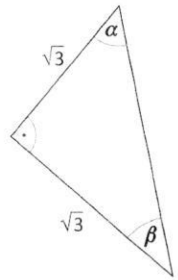
b)



c)

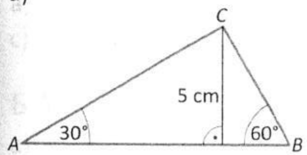


d)

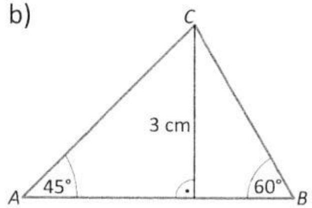


6.33. **6.38.** Oblicz obwód trójkąta ABC, korzystając z danych na rysunkach poniżej:

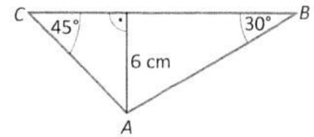
a)



b)

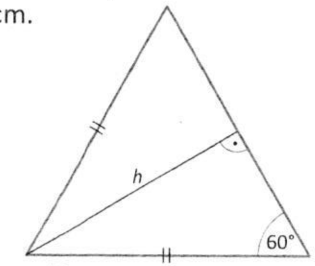


c)

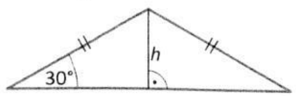


6.34. **6.39.** Oblicz wysokość h trójkąta, znając jego obwód i korzystając z danych na rysunkach poniżej:

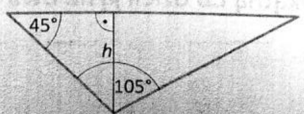
a) Obwód = 42 cm.



b) Obwód = $(12 + 6\sqrt{3})$ cm.

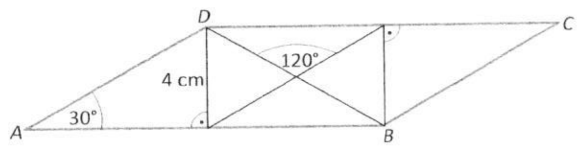


c) Obwód = $(12 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3})$ cm.

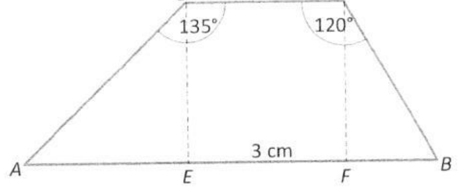


6.35. **6.40.** Oblicz obwód czworokąta $ABCD$, korzystając z danych na rysunkach poniżej:

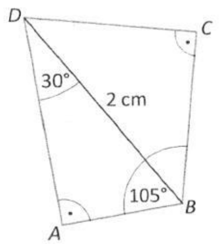
a) $ABCD$ – równoległobok.



b) $ABCD$ – trapez, $CDEF$ – kwadrat.



c)



6.36. **6.41.** W trójkącie równoramiennym prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 4 cm. Wyznacz długość wszystkich wysokości tego trójkąta.

6.37. **6.42.** W trójkącie równoramiennym ramię ma długość 20 cm, a kąt przy podstawie ma 30°. Oblicz długość wszystkich wysokości tego trójkąta.

6.38. **6.43.** W prostokącie $ABCD$ przekątne mają długość 4 cm i przecinają się pod kątem:

a) 60° b) 45° c) 30°

Oblicz odległość punktu B od przekątnej AC.

6.44. W trójkącie prostokątnym ABC, kąt przy wierzchołku A jest prosty, zaś $|\sphericalangle ACB| = 60°$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Wykaż, że $|CB|^2 - 2 \cdot |DB|^2 = |AD|^2 + |AC|^2$.

6.45. W trójkąt prostokątny ABC o kącie ostrym 60° wpisano okrąg. Punkt styczności D tego okręgu z przeciwprostokątną CB dzieli ją na dwa odcinki CD i DB. Wykaż, że $|AC| \cdot |AB| = 2 \cdot |CD| \cdot |DB|$.

6.46. Trójkąt ABC jest równoramienny, w którym $|AC| = |BC|$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 120$ W trójkąt ten wpisano okrąg o środku O. Punkt D jest punktem styczności tego okr gu z ramieniem AC. Wiedząc, że obwód trójkąta DOC wynosi $2\sqrt{3} + 3$, wykaż, że pr mień okręgu jest równy $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

6.47. Dany jest okrąg o środku O i promieniu r. Z punktu P ($|OP| > r$) poprowadzon styczną do okręgu w punkcie A oraz sieczną, która przecięła okrąg w punktach B i ($|PB| < |PC|$). Wykaż, że jeśli $|\sphericalangle OPA| = 30°$ oraz $|PB| = 1{,}5r$, to obwód czworoką $AOCP$ jest równy $(4 + \sqrt{3})r$.

Kąt skierowany

6.48. Skonstruuj kąty skierowane o miarach:

a) $\alpha = 30°$ $\beta = -30°$ b) $\alpha = 135°$ $\beta = -135°$
c) $\alpha = 240°$ $\beta = -240°$ d) $\alpha = 420°$ $\beta = -420°$

6.49. Oblicz miarę główną kąta skierowanego β, jeśli:

a) $\beta = 457°$ b) $\beta = -130°$
c) $\beta = 850°$ d) $\beta = -520°$
e) $\beta = 1710°$ f) $\beta = -2010°$

6.50. Ile razy miara główna kąta skierowanego 585° jest większa od miary główn kąta 745°?

6.51. O ile stopni miara główna kąta –550° jest większa od miary głównej kąt 1220°?

6.52. Kąty β i γ są przeciwnie skierowane i miara kąta β jest równa 1210°. Wiedzą że $\gamma \in (-1200°, -1000°)$ oraz miara główna kąta skierowanego β jest o 70° większ od miary głównej kąta γ, wyznacz miarę kąta γ.

Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta

6.53. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli wiadomo, że na końcowym ramieniu kąta α znajduje się punkt:

a) $A(12, 5)$ b) $B(-2, 2\sqrt{3})$
c) $C(-\sqrt{3}, -\sqrt{6})$ d) $D(15, -8)$.

6.54. Oblicz – korzystając z definicji – wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli:

a) $\alpha = 300°$ b) $\alpha = -150°$ c) $\alpha = 495°$ d) $\alpha = -330°$.

6.55. Jakie wartości może przyjmować kąt α, jeśli $\alpha \in \langle 0°, 360°)$ i :

a) $\sin\alpha = -1$ b) $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

Dla wyznaczonych wartości α oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych (o ile istnieją).

6.56. Kąt α znajduje się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym. Punkt $P(x, y)$ wybrano na końcowym ramieniu tego kąta w odległości r od punktu $O(0, 0)$. Oblicz współrzędne punktu P, jeśli wiadomo, że:

a) $\alpha \in (0°, 90°)$ i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $r = 6$
b) $\alpha \in (90°, 180°)$ i $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ i $r = 9$
c) $\alpha \in (180°, 270°)$ i $\cos\alpha = -0{,}6$ i $r = 10$
d) $\alpha \in (270°, 360°)$ i $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ i $r = 2\sqrt{3}$.

6.57. W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się końcowe ramię kąta o mierze α, jeżeli:

a) $\sin\alpha < 0$ i $\cos\alpha < 0$ b) $\sin\alpha < 0$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$
c) $\operatorname{tg}\alpha > 0$ i $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ d) $\cos\alpha < 0$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$
e) $\sin\alpha < 0$ i $\cos\alpha > 0$ f) $\cos\alpha > 0$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

6.58. Jaką wartość, dodatnią czy ujemną, ma poniższe wyrażenie, jeśli α jest kątem ostrym?

a) $\sin(90° + \alpha) \cdot \cos(180° + \alpha) + \operatorname{tg}(270° + \alpha)$
b) $\cos(90° - \alpha) \cdot \cos(180° - \alpha) \cdot \sin(360° - \alpha)$
c) $\operatorname{ctg}(270° + \alpha) + \sin(180° + \alpha)$
d) $[\cos(180° + \alpha) + \sin(270° + \alpha)] \cdot \operatorname{tg}(180° - \alpha)$

6.59. Kąt α znajduje się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym. Punkt $P(x, y)$ wybrano na końcowym ramieniu tego kąta w odległości r od punktu $O(0, 0)$. Oblicz współrzędne punktu P, jeśli wiadomo, że:

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha < 0$ i $r = \sqrt{13}$ b) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$, $\sin\alpha > 0$ i $r = 5$
c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{5}$, $\cos\alpha > 0$ i $r = \frac{\sqrt{29}}{5}$ d) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha > 0$ i $r = \frac{\sqrt{41}}{3}$.

6.60. Zbuduj w układzie współrzędnych kąt o mierze α, wiedząc, że:

a) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{9}$ b) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$
c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = -7$

Rozważ dwa przypadki.

6.61. Zbuduj w układzie współrzędnych kąt o mierze α takiej, że:

a) $\sin\alpha = \frac{5}{6}$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$ b) $\cos\alpha = -\frac{2}{7}$ i $\operatorname{ctg}\alpha > 0$
c) $\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{1}{3}$ i $\sin\alpha < 0$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{2}$ i $\cos\alpha > 0$.

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

6.46. **6.62.** Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że $\alpha \in (0°, 90°)$ oraz:

a) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ b) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$

6.47. **6.63.** Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że $\alpha \in (90°, 180°)$ oraz:

a) $\sin\alpha = 0{,}8$ b) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = -7$

6.48. **6.64.** Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że $\alpha \in (0°, 90°) \cup (90°, 180°)$ oraz:

a) $\sin\alpha = 0{,}5$ b) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\sin\alpha = 0{,}75$

6.49. **6.65.** Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że $\alpha \in (0°, 90°) \cup (90°, 180°)$ oraz:

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ b) $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$ c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{11}{60}$

6.66. **Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, wiedząc, że:**

a) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ i $\alpha \in (180°, 270°)$ b) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$ i $\alpha \in (270°, 360°)$

c) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{15}$ i $\alpha \in (180°, 270°)$ d) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ i $\alpha \in (270°, 360°)$.

6.67. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, wiedząc, że:

a) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ b) $\sin\alpha = -\frac{60}{61}$ c) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{45}{28}$

6.68. Wiedząc, że:

a) $\sin\alpha = b$ i $\alpha \in (180°, 270°)$, $b \in (-1, 0)$

b) $\cos\alpha = a$ i $\alpha \in (270°, 360°)$, $a \in (0, 1)$,

oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

0. **6.69.** Zbadaj, czy istnieje kąt $\alpha \in (0°, 90°) \cup (90°, 180°)$, który spełnia następujące warunki:

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ i $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ b) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg}\alpha = -2\sqrt{2}$ d) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{6}$ i $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

6.70. Czy $\sin\alpha$ może się równać:

a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

c) $-\frac{1}{\sin\beta}$ dla pewnego kąta β d) $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta$ dla pewnego kąta β?

6.71. Czy $\cos\alpha$ może się równać:

a) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ b) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

c) $\frac{1}{\sin\beta}$ dla pewnego kąta β d) $\operatorname{tg}\beta$ dla pewnego kąta β?

1. **6.72.** Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{4\sin\alpha - 5\cos\alpha}{\cos\alpha + 3\sin\alpha}$, jeśli wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha = 5$

b) $\frac{-3\cos\alpha + 6\sin\alpha}{8\sin\alpha + 3\cos\alpha}$, jeśli wiadomo, że $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

52. **6.73.** Wiadomo, że α jest kątem rozwartym. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\cos\alpha - \sin^2\alpha$, jeśli $\cos^2\alpha = 0{,}81$ b) $2\cos\alpha + \sin\alpha$, jeśli $\sin^2\alpha = 0{,}25$

c) $\operatorname{tg}\alpha - 6\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\operatorname{tg}^2\alpha = 144$ d) $\frac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha}$, jeśli $\operatorname{ctg}^2\alpha = 100$.

6.74. Oblicz:

a) $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (0°, 90°)$ i $4\sin^2\alpha = 3\cos^2\alpha$,

b) $\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (90°, 180°)$ i $5\cos^2\alpha = 2\sin^2\alpha$,

c) $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (180°, 270°)$ i $9\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha = 2$,

d) $\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (270°, 360°)$ i $4\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 3$.

6.75. Wykaż, że jeżeli liczby x i a są dodatnie, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i $\sin\alpha = \sqrt{\frac{x}{x+a}}$ oraz $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{x}{a}}$, to $\alpha = \beta$.

6.67 **6.76.** Wiedząc, że α jest kątem rozwartym oraz $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{13}$, oblicz:

a) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ b) $\sin\alpha - \cos\alpha$ c) $\sin\alpha, \cos\alpha$ d) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$

6.77. Wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oblicz:

a) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ b) $|\sin\alpha - \cos\alpha|$

c) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ d) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$

6.78. Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 4$, oblicz:

a) $|\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha|$ b) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$

c) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$ d) $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha$

6.54. **6.79.** Zapisz wyrażenia w prostszej postaci:

a) $\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ b) $\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^3\alpha$

c) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\frac{1}{\sin\alpha} - \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

e) $\cos\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha$ f) $\sin\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

g) $\frac{1}{\sin^2\alpha} \cdot (1 - \cos^2\alpha)$ h) $(\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha) \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

6.55. **6.80.** Sprawdź, czy podane równości są tożsamościami trygonometrycznymi, wiedząc, że $\alpha \in (0°, 90°) \cup (90°, 180°)$:

a) $\sin\alpha \cdot \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha} = 1$ b) $\cos\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = 1$

c) $\sin\alpha + \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$ d) $\cos\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$

e) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} = 1 + \operatorname{tg}\alpha$ f) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}\alpha)$

g) $\frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = 1 + \frac{1}{\cos\alpha}$ h) $\frac{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha} = 1 + \frac{1}{\sin\alpha}$

i) $\dfrac{\text{tg}\,\alpha \cdot (1+\text{ctg}^2\alpha)}{1+\text{tg}^2\alpha} = \text{ctg}\,\alpha$

j) $\dfrac{\text{ctg}\,\alpha \cdot (1+\text{tg}^2\alpha)}{1+\text{ctg}^2\alpha} = \text{tg}\,\alpha$

6.81. Sprawdź, czy podane równości są tożsamościami trygonometrycznymi, wiedząc, że $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ) \cup (90^\circ, 180^\circ)$:

a) $1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

b) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

c) $\sin\alpha \cdot \left(\dfrac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right) = \cos^2\alpha$

d) $\cos\alpha \cdot \left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = \sin^2\alpha$

e) $\dfrac{2}{\cos^2\alpha} - 1 = 1 + 2\text{tg}^2\alpha$

f) $\dfrac{2}{\sin^2\alpha} - 1 = 1 + 2\text{ctg}^2\alpha$

g) $\dfrac{1}{1-\cos\alpha} + \dfrac{1}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2}{\sin^2\alpha}$

h) $\dfrac{1}{1-\sin\alpha} + \dfrac{1}{1+\sin\alpha} = \dfrac{2}{\cos^2\alpha}$

i) $1 - \sin\alpha = \dfrac{\text{ctg}\,\alpha - \cos\alpha}{\text{ctg}\,\alpha}$

j) $1 - \cos\alpha = \dfrac{\text{tg}\,\alpha - \sin\alpha}{\text{tg}\,\alpha}$

6.82. Wykaż, że jeśli $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$, to $\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = 0$.

6.83. Wykaż, że jeśli $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$,

to $\dfrac{1-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} + \dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-\sin\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$.

Wzory redukcyjne

6.57. **6.84.** Oblicz, stosując wzory redukcyjne:

a) $\text{tg}\,43^\circ \cdot \text{tg}\,44^\circ \cdot \text{tg}\,45^\circ \cdot \text{tg}\,46^\circ \cdot \text{tg}\,47^\circ$

b) $\text{ctg}\,25^\circ \cdot \text{ctg}\,35^\circ \cdot \text{ctg}\,45^\circ \cdot \text{ctg}\,55^\circ \cdot \text{ctg}65^\circ$

c) $\sin^2 75^\circ + \sin^2 15^\circ - 2\sin 30^\circ$

d) $(\cos 52^\circ - \cos 38^\circ)^2 + 2\sin 38^\circ \cdot \sin 52^\circ + 2\cos 60^\circ$

6.58. **6.85.** Oblicz, stosując wzory redukcyjne:

a) $\sin 120^\circ \cdot \cos 150^\circ + \text{tg}\,135^\circ$

b) $\text{tg}\,120^\circ \cdot \text{ctg}\,30^\circ + \cos^2 135^\circ$

c) $(\cos 120^\circ - \text{tg}\,150^\circ)^2$

d) $(\sin 135^\circ - \text{tg}\,120^\circ) \cdot (\cos 135^\circ - \text{ctg}\,150^\circ)$

6.43. **6.86.** Dane są liczby:

$a = \sin 120^\circ + \cos 150^\circ - 2\text{tg}\,45^\circ$

$b = \left(\dfrac{\sin 60^\circ - 2\cos 135^\circ}{\text{tg}\,120^\circ}\right)^2$

$c = (\cos 150^\circ + \sin 135^\circ)(\cos 30^\circ + \sin 45^\circ)$

$d = \text{tg}\,150^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 90^\circ$

Która z nich jest liczbą wymierną?

6.44. **6.87.** Wykaż, że dana liczba jest wymierna:

a) $(2 + \cos 150^\circ)(2 + \sin 120^\circ)$

b) $(-\text{tg}\,135^\circ + \text{tg}\,150^\circ)(\text{tg}\,45^\circ + \text{tg}\,30^\circ)$

c) $\sin^2 135^\circ - 2\sin 135^\circ \cos 135^\circ + \cos^2 135^\circ$

d) $\text{tg}^2 120^\circ + 2\text{tg}\,120^\circ \text{ctg}\,150^\circ + \text{ctg}^2 150^\circ$

6.45. **6.88.** Porównaj liczby x i y, jeśli:

a) $x = \sin 135^\circ$, $y = \text{tg}^2 150^\circ$

b) $x = -\sqrt{3}\cos 120^\circ$, $y = \sin 120^\circ$

c) $x = \dfrac{1}{\text{ctg}\,120^\circ}$, $y = \dfrac{1}{\cos 135^\circ}$

d) $x = 4^{\sin 150^\circ}$, $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3\cos 120^\circ}$

6.89. Oblicz, bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora:

a) $4\sin(-420^\circ) \cdot \cos 690^\circ \cdot \text{ctg}\,315^\circ$

b) $\cos 480^\circ \cdot \sin 540^\circ + \cos(-1080^\circ)$

c) $\sin^2 217^\circ + \cos^2 127^\circ + 2\sin 37^\circ \cdot \cos 487^\circ$

d) $\text{tg}\,405^\circ + \text{ctg}\,225^\circ - \sin 720^\circ$

e) $2\cos 120^\circ + 4\text{tg}\,390^\circ \cdot \sin 120^\circ$

f) $-3\text{tg}(-45^\circ) \cdot \cos(-300^\circ) + \sin 150^\circ$

g) $\cos 210^\circ \cdot \text{ctg}\,390^\circ - \sin 405^\circ \cdot \cos 675^\circ$

h) $\sin 30^\circ \cdot \text{tg}\,225^\circ + (\sin 300^\circ)^2$

6.90. Wykaż, że prawdziwe są równości:

a) $\dfrac{\cos^2 112^\circ - \sin^2 382^\circ}{\text{tg}\,128^\circ} = 0$

b) $2\sin 510^\circ \cdot \cos 300^\circ - \text{tg}\,179^\circ \cdot \text{tg}\,89^\circ = \dfrac{3}{2}$

c) $\sin^2 785^\circ + \sin^2 155^\circ - \text{tg}\,198^\circ \cdot \text{tg}\,108^\circ = 2$

d) $\text{ctg}\,105^\circ \cdot \text{tg}\,285^\circ + \sin^2 375^\circ + \sin^2 105^\circ = 2$

6.91. Oblicz, bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora:

a) $\cos 0^\circ + \sin 450^\circ - \sin 270^\circ - \text{tg}\,360^\circ$

b) $\sin 180^\circ + \cos 450^\circ + \cos 540^\circ + \sin 630^\circ$

c) $\cos 720^\circ + \cos 900^\circ - \text{ctg}\,270^\circ - \text{tg}\,360^\circ$

d) $\text{tg}\,360^\circ + \text{ctg}(-90^\circ) + \text{tg}\,720^\circ$

6.92. Oblicz, bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora:

a) $\cos 0° \cdot \cos 30° \cdot \cos 60° \cdot \cos 90°$

b) $\sin 36° \cdot \sin 72° \cdot \sin 108° \cdot \sin 144° \cdot \sin 180°$

c) $\operatorname{ctg} 40° \cdot \operatorname{ctg} 50° \cdot \operatorname{ctg} 60°$

d) $\operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{tg} 50° \cdot \operatorname{tg} 60°$

6.93. Oblicz, bez użycia tablic trygonometrycznych i kalkulatora:

a) $\dfrac{\cos 120° \cdot \operatorname{ctg} 90° + \operatorname{tg} 225° \cdot \sin 510°}{\operatorname{tg} 210° \cdot \operatorname{ctg} 330° + \cos 495° \cdot \sin 405°}$

b) $\dfrac{\operatorname{tg} 690° \cdot \cos 510° - \sin 225° \cdot \cos 495°}{\sin 135° \cdot \operatorname{ctg} 390° + \operatorname{tg} 405° \cdot \operatorname{ctg} 60°}$

c) $\dfrac{\cos 390° \cdot \sin 240° + \operatorname{tg} 315° \cdot \cos 300°}{\operatorname{ctg} 150° \cdot \sin 120° - \operatorname{tg} 420° \cdot \cos(-450°)}$

d) $\dfrac{\operatorname{tg} 315° \cdot \operatorname{ctg}(-495°) + \operatorname{ctg} 810° \cdot \sin 930°}{2\cos 1020° \cdot \sin 810° + \cos 1260° \cdot \sin 630°}$

6.94. Wyznacz α, $\alpha \in \langle 0°, 360°)$, wiedząc, że:

a) $\operatorname{tg}\alpha = 1$ i $\sin\alpha < 0$

b) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ i $\operatorname{tg}\alpha > 0$

c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\alpha < 0$

d) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ i $\operatorname{ctg}\alpha > 0$

e) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin\alpha < 0$

f) $\sin\alpha = -1$ i $\cos\alpha = 0$

g) $\operatorname{ctg}\alpha = -1$ i $\sin\alpha > 0$

h) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\cos\alpha > 0$

i) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin\alpha < 0$

j) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$ i $\sin\alpha > 0$.

6.61. **6.95.** Doprowadź poniższe wyrażenia do najprostszej postaci, wiedząc, że $\alpha \in (0°, 90°) \cup (90°, 180°)$.

a) $\sin(180° - \alpha) \cdot \cos(90° + \alpha) - \cos^2(180° - \alpha)$

b) $\sin(90° + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180° - \alpha) + \cos(180° - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(90° + \alpha)$

c) $\cos(90° - \alpha) \cdot \sin(180° - \alpha) - \sin(90° - \alpha) \cdot \cos(180° - \alpha)$

d) $\operatorname{tg}(90° + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180° - \alpha) + \operatorname{ctg}(90° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(90° - \alpha)$

6.62. **6.96.** Wiadomo, że kąt α jest ostry i $\dfrac{3\sin\alpha}{\sin(90° + \alpha)} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin(90° - \alpha)} = 2$. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$.

6.63. **6.97.** Wiadomo, że kąt α jest ostry i $\dfrac{\sin(180° - \alpha)}{\sin(90° - \alpha)} + \dfrac{\operatorname{tg}(90° + \alpha)}{\operatorname{tg}(90° - \alpha)} = 3$. Wykaż, że: $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

6.64. **6.98.** Niech α, β, γ oznaczają miary kątów dowolnego trójkąta. Wykaż, że:

a) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta + \gamma}{2}$

b) $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta + \gamma}{2}$

6.99. Wykaż, że dla dowolnego kąta α, spełniającego warunek: $\alpha \neq 34° + k \cdot 180°$, gdzie $k \in C$, równość $\dfrac{\sin(146° + \alpha) + \cos(304° - \alpha)}{-\sin(326° + \alpha)} = 2$ jest tożsamością.

6.100. Wykaż, że dla dowolnego kąta α, spełniającego warunek: $\alpha \neq 160° + k \cdot 180°$, gdzie $k \in C$, równość $\dfrac{\sin(200° + \alpha) - 3\cos(250° - \alpha)}{\cos[90° - (20° + \alpha)]} = 2$ jest tożsamością.

6.101. Wykaż, że dla dowolnego kąta α, spełniającego warunek: $\alpha \neq k \cdot 45°$, gdzie $k \in C$, równość $\dfrac{\operatorname{ctg}(270° - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(180° - \alpha)} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}^2(360° - \alpha) - 1}{\operatorname{ctg}(180° + \alpha)} = 1$ jest tożsamością.

6.102. Wykaż, że dla dowolnego kąta α, spełniającego warunek: $\alpha \neq k \cdot 90°$, gdzie $k \in C$, równość $\dfrac{\cos^2(270° - \alpha)}{\sin^{-2}(\alpha + 90°) - 1} + \dfrac{\sin^2(\alpha + 270°)}{\cos^{-2}(90° - \alpha) - 1} = 1$ jest tożsamością.

Twierdzenie sinusów

6.103. W trójkącie ABC mamy dane: $|BC| = 4$ cm i $|\sphericalangle BAC| = 150°$. Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie.

6.104. W trójkącie ABC dane są miary kątów przy boku AB: 28° i 32°. Promień koła opisanego na trójkącie jest równy 8 cm. Oblicz długość boku AB.

6.105. W trójkącie ABC mamy dane: $|BC| = 5$ cm, $|\sphericalangle BAC| = 48°$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 70°$. Oblicz długość boku AC. Wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

6.106. W trójkącie ABC mamy dane: $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $|BC| = 8$ cm. Wyznacz długość boku AC.

6.107. Dwa boki trójkąta mają długość 13 cm i 21 cm, a cosinus kąta zawartego między tymi bokami wynosi $\frac{5}{13}$. Wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $10\frac{5}{6}$ cm, oblicz sumę sinusów kątów w tym trójkącie.

6.108. W trójkącie ABC mamy dane: $|AC| = 3\sqrt{3}$, $|BC| = 3$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 30°$. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta.

6.109. W trójkącie ABC mamy dane: $|AB| = 12$, $|BC| = 6\sqrt{2}$, $|AC| = 6(1+\sqrt{3})$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 30°$. Oblicz miary pozostałych kątów trójkąta.

6.110. W trójkącie ostrokątnym ABC tangens kąta przy wierzchołku C jest równy $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, a bok przeciwległy temu kątowi ma długość 12 cm.

a) Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie.
b) W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AE i BF, które przecięły się w punkcie M. Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABM.

6.111. Dane są dwa trójkąty ABC oraz $A_1B_1C_1$ takie, że $\alpha = \alpha_1$ oraz $\beta + \beta_1 = 180°$. Wykaż, że $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|B_1C_1|}$.

6.112. Wykaż, że jeżeli w trójkącie ABC prawdziwa jest równość $\frac{|BC|}{|AC|} = \sqrt{2}$, to $\cos^2\alpha = 2\cos^2\beta - 1$.

6.113. Wykaż, że jeśli α, β są miarami dwóch kątów trójkąta, a R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie, to obwód trójkąta jest równy $2R \cdot [\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)]$.

6.114. Boki trójkąta mają długość a, b, c, natomiast miary kątów są odpowiednio równe α, β, γ. Wykaz, że jeśli $\frac{a}{c} \cdot \sin\alpha + \frac{b}{c} \cdot \sin\beta = \sin\gamma$, to trójkąt ten jest prostokątny.

Twierdzenie cosinusów

6.115. Wykaż, stosując twierdzenie cosinusów, że trójkąt o bokach długości:

a) 10 cm, 9 cm, 5 cm jest ostrokątny
b) $2\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{26}$ cm, $3\sqrt{2}$ cm jest prostokątny
c) 4 cm, 10 cm, 12 cm jest rozwartokątny.

6.116. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 5$ cm. Oblicz cosinusy kątów tego trójkąta.

6.117. Oblicz długości przekątnych równoległoboku, którego boki mają długo 3 cm i 5 cm, a kąt ostry jest równy 30°.

6.118. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 2$, $|AC| = 4$ oraz sinus kąta BAC równy $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

a) Wykaż, że jeśli kąt BAC jest ostry, to trójkąt ABC jest równoramienny.
b) Oblicz długość boku BC w przypadku, gdy $|\sphericalangle BAC| \in (90°, 180°)$.

6.119. W trójkącie ABC mamy dane: $|AC| = 6$ cm, $|BC| = 4$ cm oraz $\sin|\sphericalangle ACB| = \frac{2}{3}$... Oblicz obwód trójkąta oraz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

6.120. Długości boków trójkąta ABC są równe: $|AB| = \sqrt{14}$ cm, $|AC| = 3\sqrt{2}$ cm o $|BC| = \sqrt{2}$ cm. Wyznacz miarę kąta przy wierzchołku C.

6.121. Boki trójkąta ABC mają długość: $|BC| = 5$ cm, $|AB| = (2\sqrt{2} - 1)$ cm oraz $|AC| = (2\sqrt{2} + 1)$ cm. Oblicz miarę kąta przy wierzchołku A.

6.122. W trójkącie ABC mamy dane: $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 7$ cm i $|AC| = 6$ cm. Obl długość środkowej CE.

6.123. W trójkącie ABC bok AB jest o 4 cm dłuższy od boku AC oraz $|BC| = 6$ c Wiedząc, że $|\sphericalangle ACB| = 120°$, oblicz obwód trójkąta ABC.

6.124. W trójkącie ABC bok AC jest o 6 cm dłuższy od boku AB, a $|BC| = 5\sqrt{2}$ c Wiedząc, że $|\sphericalangle ABC| = 135°$, oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

6.125. W trójkącie ABC mamy dane: $|AC| = 4$, $|BC| = |AB| - 2$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 60°$. Obl sinusy kątów CAB i ABC.

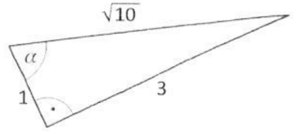
6.126. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC, $|AC| = |AB|$, poprowad no środkowe CD i BE, które przecięły się w punkcie M. Wykaż, że $\cos(\sphericalangle DMB) = \frac{4}{5}$

6.127. W trójkącie boki mają długość a, b, c, natomiast miary kątów są odp wiednio równe α, β, γ. Wykaż, że jeśli $a \cdot \cos\beta = b \cdot \cos\alpha$, to trójkąt ten jest równ ramienny.

6.128. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC wybrano punkt M taki, że $|BM| = \frac{1}{3}|MC|$. Wykaż, że sinus kąta CAM jest równy $\frac{3\sqrt{39}}{26}$.

Test sprawdzający do rozdziału 6.

1. Wykorzystując dane na rysunku obok, możemy stwierdzić, że:



A. $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ B. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

C. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ D. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

2. Wiadomo, że $\cos\alpha = \frac{1}{4}$. Wówczas $\sin(90° - \alpha)$ wynosi:

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{16}$.

3. Tangens kąta ostrego β jest równy $\frac{3}{2}$. Z tego wynika, że β należy do przedziału:

A. $(0°, 30°)$ B. $(30°, 45°)$ C. $(45°, 60°)$ D. $(60°, 90°)$.

4. Wiadomo, że γ jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym i $\sin\gamma = 0{,}9$. Z tego wynika, że:

A. $\gamma \in (0°, 30°)$ B. $\gamma \in (30°, 45°)$ C. $\gamma \in (45°, 60°)$ D. $\gamma \in (60°, 90°)$.

5. Wiadomo, że γ jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym i $\cos\gamma = 0{,}9$. Z tego wynika, że:

A. $\gamma \in (0°, 30°)$ B. $\gamma \in (30°, 45°)$ C. $\gamma \in (45°, 60°)$ D. $\gamma \in (60°, 90°)$.

6. O kącie ostrym γ wiadomo, że $\sin\gamma = \cos\gamma$. Zatem γ ma miarę:

A. 60° B. 45° C. 30° D. mniejszą niż 25°.

7. Wiadomo, że β jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\beta = 3$. Wówczas wartość wyrażenia $(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta)^2$ jest równa:

A. 1 B. $3\frac{1}{3}$ C. $9\frac{1}{9}$ D. $11\frac{1}{9}$.

8. Wartość wyrażenia $\cos^2 40° + \cos^2 50° + \cos^2 60°$ jest równa:

A. 1,25 B. 1 C. 1,75 D. 0,75.

9. Wartość wyrażenia $\operatorname{ctg} 30° \cdot \operatorname{ctg} 40° \cdot \operatorname{ctg} 50°$ jest równa:

A. 1 B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{2}$.

10. Kąt α znajduje się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym. Punkt $P(-5, 12)$ należy do drugiego ramienia tego kąta. Zatem:

A. $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ B. $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ C. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ D. $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{12}{5}$.

11. Wartość wyrażenia $(\sin 134° - \cos 44°)^2$ wynosi:

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $1\frac{1}{2}$.

12. Kąt α jest kątem ostrym. Wyrażenie $\cos(180° - \alpha) \cdot \sin(90° + \alpha) + 1$ jest równe

A. $\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 1$ B. 2 C. $\cos^2\alpha + 1$ D. $\sin^2\alpha$.

13. Wiadomo, że $\alpha \in (90°, 180°)$ i $\cos^2\alpha = \frac{4}{9}$. Zatem:

A. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{5}{6}$ B. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{6}{5}$ C. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha = -\frac{6}{5}$ D. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha = -$

14. Wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Zatem wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha}{2\cos\alpha}$ wynosi:

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2.

15. Liczba $a = \log_{\frac{3}{4}} \sin 120°$ jest:

A. parzysta B. nieparzysta C. pierwsza D. wymierna.

16. Liczby $a = 4^{\cos 120°}$ oraz $b = \operatorname{tg} 135°$ spełniają warunek:

A. $a^2 + b^2 = 5$ B. $a = 1 - b$ C. $a^b = 2$ D. $\frac{a}{b} = 2$.

17. Jeśli $\alpha = 150°$, to prawdziwa jest równość:

A. $\sqrt{3} \cdot \cos\alpha + \sin\alpha = 0$ B. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

C. $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1}{4}$ D. $\frac{\sin\alpha + 0{,}5}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

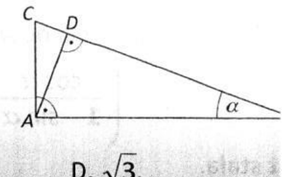
18. Wyrażenie $\cos^3\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$ jest równe:

A. 1 B. $\cos\alpha$ C. $\sin\alpha$ D. 0.

19. Punkt A leży na jednym ramieniu kąta o mierze 60°, w odległości 1 dm od wierzchołka tego kąta. Odległość punktu A od drugiego ramienia tego kąta wynosi:

A. 1 dm B. $\sqrt{3}$ dm C. 20 cm D. $5\sqrt{3}$ cm.

20. W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokość AD na przeciwprostokątną BC (zobacz rysunek obok). Jeśli $|CD| = 1$ i $|DB| = 4$, to tangens kąta ostrego α wynosi:



A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\sqrt{3}$.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

6.71. **6.129.** W trójkącie prostokątnym a, b oznaczają długości przyprostokątnych, c jest długością przeciwprostokątnej, α oznacza miarę kąta leżącego naprzeciw przyprostokątnej długości a. Wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, oblicz:

a) $\sin\alpha$ b) wartość wyrażenia $\frac{a^2}{2b^2 + c^2}$.

6.68. **6.130.** Kąt α jest kątem ostrym oraz $\sin\alpha + \cos\alpha = 1\frac{1}{4}$. Oblicz:

a) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$ b) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$

6.69. **6.131.** Kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2{,}5$. Oblicz:

a) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$ b) $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha$

6.70. **6.132.** Suma sinusów kątów ostrych w pewnym trójkącie prostokątnym jest równa $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Oblicz:

a) iloczyn sinusów tych kątów b) iloczyn cosinusów tych kątów.

6.74. **6.133.** Porównaj liczby: $a = 10^{\log\sin 45^\circ}$ i $b = \sin^3 150^\circ + \sin 30^\circ \cos^2 150^\circ$.

6.75. **6.134.** Uzasadnij, że jeśli $a = 3\sqrt[4]{9^{\cos 120^\circ}}$ i $b = \left(\sqrt{\operatorname{tg} 30^\circ}\right)^3$, to $a \cdot b = 1$.

6.76. **6.135.** Podaj miarę kąta rozwartego α, jeśli wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$.

6.77. **6.136.** Wykaż, że jeśli $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, to $(2|\cos\alpha| + 1)(2\cos\alpha + 1) + 3 = 4\sin^2\alpha$.

6.78. **6.137.** Wiedząc, że α jest miarą kąta rozwartego i $\sin\alpha = 16^{-\frac{1}{4}}$, wyznacz liczbę m, dla której $(m-1)\cos^2\alpha = m + \operatorname{tg}\alpha$.

6.79. **6.138.** Wykaż, że jeśli α jest kątem ostrym i $2\cos^2\alpha + 5\sin^2\alpha = 4$, to $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 4{,}5$.

6.88. **6.139.** Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego α wartość wyrażenia

$$\left(\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} + \frac{1-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\right)\cdot\cos\alpha$$

jest stała.

6.140. Wykaż, że jeśli $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$, to $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = -2\operatorname{tg}\alpha$.

6.141. Oblicz wartość wyrażenia: $\sin(-1320^\circ)\cdot\operatorname{tg}840^\circ + \cos(-2100^\circ)$.

6.142. Podaj miarę kąta α, wiedząc, że:

a) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\operatorname{tg}\alpha = 1$ i $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$

b) $\log_3\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$

c) $\log_{16}\sin\alpha = -\frac{1}{4}$ i $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$

d) $\log_{\frac{3\sqrt{3}}{8}}\cos\alpha = \frac{1}{3}$ i $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$.

6.143. Oblicz wartość wyrażenia:

$\log(\operatorname{tg}181^\circ) + \log(\operatorname{tg}182^\circ) + \log(\operatorname{tg}183^\circ) + \ldots + \log(\operatorname{tg}267^\circ) + \log(\operatorname{tg}268^\circ) + \log(\operatorname{tg}269^\circ$

6.97. **6.144.** W kąt o mierze 60° wpisano dwa okręgi styczne do ramion kąta i stycz zewnętrznie do siebie. Wyznacz długość promienia większego okręgu, jeżeli pı mień mniejszego okręgu ma długość r.

6.145. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 7{,}5$ cm i $|AC| = 6$ cr

a) Oblicz długość środkowej trójkąta poprowadzonej na bok AB.

b) Oblicz promień koła opisanego na trójkącie ABC.

6.146. W trójkącie ABC bok BC ma długość 16 cm, a $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$. Wiedząc, promień koła opisanego na tym trójkącie jest równy 16 cm, oblicz:

a) miary pozostałych kątów trójkąta ABC

b) obwód trójkąta ABC

c) wysokość poprowadzoną z wierzchołka C

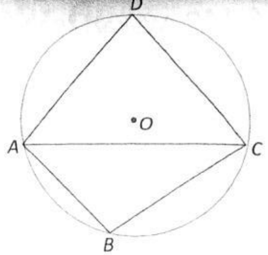
d) długość środkowej poprowadzonej na bok BC.

6.147. W trójkącie rozwartokątnym ABC dane są długości boków: $|AB| = 3\sqrt{2}$, $|BC| = 3 - \sqrt{3}$, $|AC| = 2\sqrt{3}$.

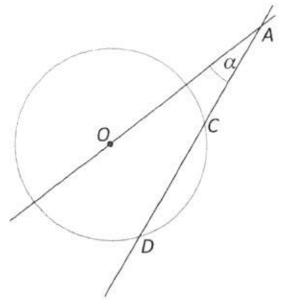
a) Wyznacz miarę kąta ACB.

b) Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

6.148. Wierzchołki trójkątów ABC i ACD, o wspólnej podstawie AC, leżą na okręgu (zobacz rysunek obok). Trójkąt ACD jest równoramienny, $|AD| = |DC|$. W trójkącie ABC mamy dane: $|BC| = 8$ oraz $|AC| = |AB| + 6$, $|\sphericalangle ABC| = 120°$. Oblicz obwód czworokąta $ABCD$.



***6.149.** Z punktu A znajdującego się w odległości $2r$ $(r > 0)$ od środka okręgu $o(O, r)$ poprowadzono sieczną, która przecięła okrąg w punktach C i D tak, że $|AC| = |CD|$ (zobacz rysunek poniżej). Wyznacz cosinus kąta α, jaki tworzy ta sieczna z sieczną AO.



6.150. Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.

6.151. W trójkącie ABC, w którym $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, poprowadzono dwusieczną CD kąta ACB, przy czym $|\sphericalangle CDA| = \beta$. Wykaż, że: $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{\sin(\alpha + 2\beta)}{-\sin\alpha}$, gdzie

$180° < \alpha + 2\beta < 360°$ i $0° < \alpha + \beta < 180°$.

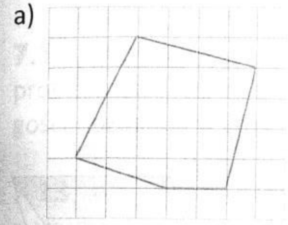
***6.152.** Oblicz miary kątów trójkąta ABC, w którym wysokość i środkowa poprowadzone z jednego wierzchołka dzielą kąt przy tym wierzchołku na trzy równe części.

7 • Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta

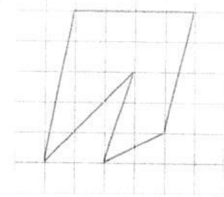
Pole figury geometrycznej

7.1. Pole jednej kratki jest równe 1. Oblicz pola poniższych figur.

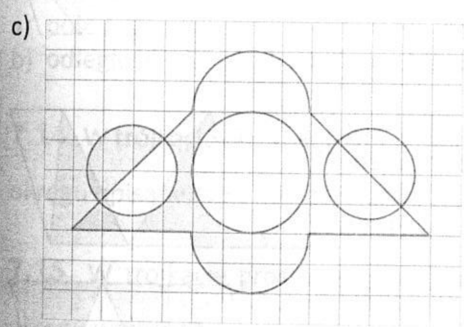
a)



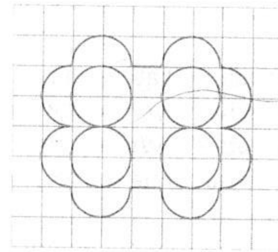
b)



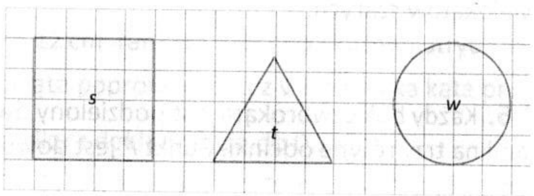
c)



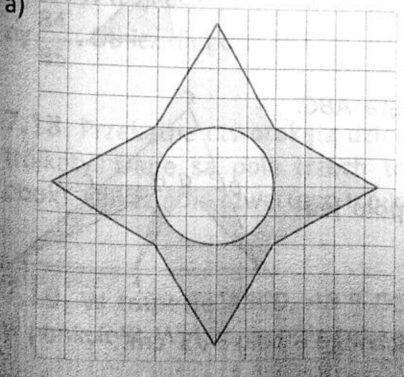
d)



7.2. Na rysunku obok dane są trzy figury: kwadrat, trójkąt równoboczny i koło, których pola są odpowiednio równe: s, t, w. Wyraź pola figur umieszczonych poniżej za pomocą pól s, t, w.



a)



b)