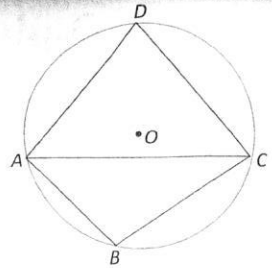
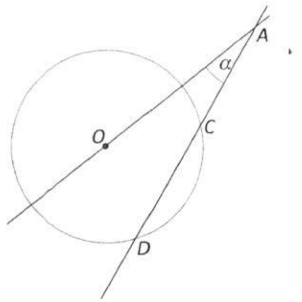
6.148. Wierzchołki trójkątów ABC i ACD, o wspólnej podstawie AC, leżą na okręgu (zobacz rysunek obok). Trójkąt ACD jest równoramienny, $|AD| = |DC|$. W trójkącie ABC mamy dane: $|BC| = 8$ oraz $|AC| = |AB| + 6$, $|\sphericalangle ABC| = 120°$. Oblicz obwód czworokąta $ABCD$.



***6.149.** Z punktu A znajdującego się w odległości $2r$ $(r > 0)$ od środka okręgu $o(O, r)$ poprowadzono sieczną, która przecięła okrąg w punktach C i D tak, że $|AC| = |CD|$ (zobacz rysunek poniżej). Wyznacz cosinus kąta α, jaki tworzy ta sieczna z sieczną AO.



6.150. Wykaż, że w dowolnym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich boków.

6.151. W trójkącie ABC, w którym $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, poprowadzono dwusieczną CD kąta ACB, przy czym $|\sphericalangle CDA| = \beta$. Wykaż, że: $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{\sin(\alpha + 2\beta)}{-\sin\alpha}$, gdzie $180° < \alpha + 2\beta < 360°$ i $0° < \alpha + \beta < 180°$.

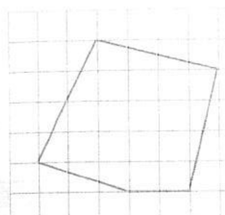
***6.152.** Oblicz miary kątów trójkąta ABC, w którym wysokość i środkowa poprowadzone z jednego wierzchołka dzielą kąt przy tym wierzchołku na trzy równe części.

7 • Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta

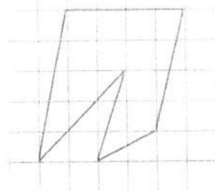
Pole figury geometrycznej

7.1. Pole jednej kratki jest równe 1. Oblicz pola poniższych figur.

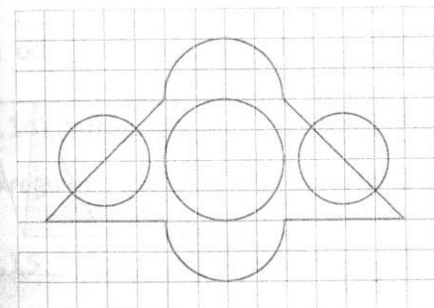
a)



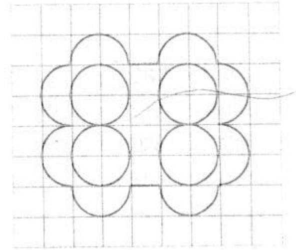
b)



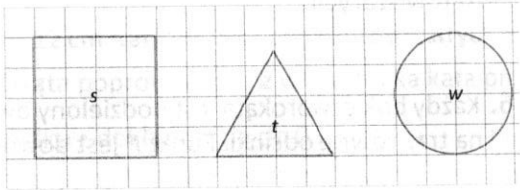
c)



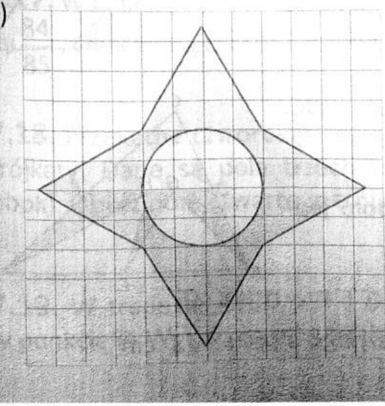
d)



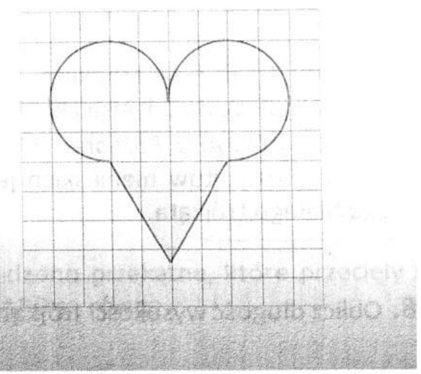
7.2. Na rysunku obok dane są trzy figury: kwadrat, trójkąt równoboczny i koło, których pola są odpowiednio równe: s, t, w. Wyraź pola figur umieszczonych poniżej za pomocą pól s, t, w.



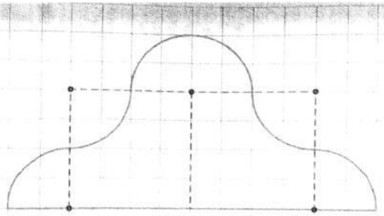
a)



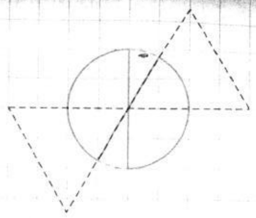
b)



c)

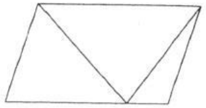


d)

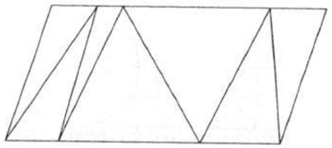


Pole trójkąta, cz. 1

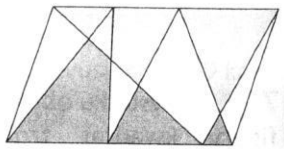
7.3. Dwa wierzchołki trójkąta są wierzchołkami równoległoboku, a trzeci wierzchołek trójkąta należy do przeciwległego boku równoległoboku (zobacz rysunek obok). Wykaż, że pole równoległoboku jest dwa razy większe od pola trójkąta.



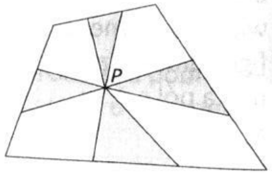
7.4. Wierzchołki trójkątów na rysunku poniżej należą do dwóch przeciwległych boków równoległoboku (zobacz rysunek obok). Wykaż, że suma pól trójkątów białych jest równa sumie pól trójkątów niebieskich.



7.5. Wykaż, że w równoległoboku na rysunku obok suma pól wielokątów niebieskich jest równa sumie pól wielokątów szarych.



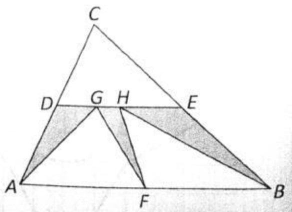
7.6. Każdy bok czworokąta jest podzielony dwoma punktami na trzy równe odcinki. Punkt P jest dowolnym punktem leżącym we wnętrzu czworokąta (zobacz rysunek obok). Wykaż, że suma pól białych czworokątów jest dwa razy większa od sumy pól niebieskich trójkątów.



7.7. Punkty D, E, F są środkami boków trójkąta ABC. Punkty G, H należą do odcinka DE. Wykaż, że:

a) pola trójkątów AFG, FBH oraz DEC są równe;

b) suma pól trójkątów niebieskich jest równa polu jednego białego trójkąta.



7.4. **7.8.** Oblicz długość wysokości trójkąta równobocznego o polu $3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

7.5. **7.9.** Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest o 4 cm dłuższy od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Oblicz:

a) długość wysokości trójkąta   b) pole tego trójkąta.

7.7. **7.10.** W trójkącie równoramiennym długość podstawy wynosi 16 cm, a wysokość poprowadzona na tę podstawę jest równa 15 cm. Oblicz pozostałe wysokości.

7.9. **7.11.** W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 20 cm i 21 cm. Oblicz wysokość poprowadzoną na przeciwprostokątną.

7.11. **7.12.** W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa 12 cm i dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, których długości pozostają w stosunku 4 : 9. Oblicz pole tego trójkąta.

7.12. **7.13.** W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 20 cm, a środkowa poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość 12,5 cm. Oblicz:

a) pole tego trójkąta

b) odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej.

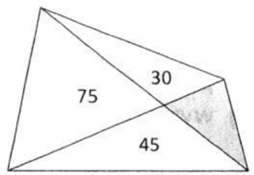
7.13. **7.14.** W trójkącie prostokątnym cosinus jednego z kątów jest równy $\frac{12}{13}$, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 13 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

7.15. **7.15.** W trójkącie prostokątnym sinus jednego z kątów jest równy $\frac{3}{5}$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość 7 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

7.16. **7.16.** W trójkącie prostokątnym o polu $12\ \text{cm}^2$ tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{2}{3}$. Wyznacz wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego. Podaj przybliżenie dziesiętne wyniku z dokładnością do 0,1 cm.

7.17. **7.17.** W trójkącie prostokątnym o polu $136{,}5\ \text{cm}^2$ cosinus jednego z kątów jest równy $\frac{84}{85}$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

7.18. Przekątne czworokąta dzielą ten czworokąt na cztery trójkąty. Dane są pola trzech trójkątów (zobacz rysunek obok). Oblicz pole czwartego trójkąta.



7.19. W trapezie $ABCD$, $AB \parallel DC$, poprowadzono przekątne, które przecięły się w punkcie P. Wykaż, że pola trójkątów BCP i APD są równe.

7.20. W trapezie $ABCD$, $AB \parallel DC$, poprowadzono przekątne, które przecięły się w punkcie E. Pola trójkątów ABE i BCE są odpowiednio równe 78 i 52. Oblicz pole trójkąta CDE.

7.21. W trapezie $ABCD$, $AB \parallel DC$, przekątne przecinają się w punkcie E. Wiedząc, że pola trójkątów ABE i CDE są odpowiednio równe 90 cm^2 i 40 cm^2, oblicz pole trójkąta AED.

7.22. Punkt E jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$, gdzie $AB \parallel DC$. Pola trójkątów ABE i CDE są odpowiednio równe P_1 i P_2. Niech P oznacza pole trapezu $ABCD$. Wykaż, że $P = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}\right)^2$.

7.18. **7.23.** Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki mają długość 10 cm i 14 cm, a kąt między nimi ma miarę:
a) $30°$ b) $120°$ c) $135°$

7.19. **7.24.** W trójkącie, którego pole jest równe 27 cm^2, dwa boki mają długość 18 cm i 6 cm. Jaką miarę ma kąt ostry, zawarty między tymi bokami?

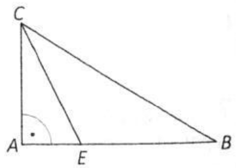
7.20. **7.25.** W trójkącie rozwartokątnym boki przy kącie rozwartym α mają długość 5 cm i 8 cm, a jego pole jest równe $10\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz α.

7.21. **7.26.** Dwa boki trójkąta mają długość 10 cm i 12 cm, a jego pole jest równe 30 cm^2. Jaką miarę może mieć kąt tego trójkąta między danymi bokami?

7.22. **7.27.** W trójkącie równoramiennym cosinus jednego z kątów jest równy $-0{,}8$. Wiedząc, że pole tego trójkąta jest równe 7,5 cm^2, oblicz długość jego ramienia.

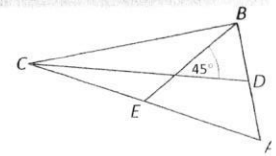
7.28. Pole trójkąta jest równe 20 cm^2, a jeden z jego kątów ma miarę $150°$. Wiedząc, że wysokości poprowadzone z wierzchołków kątów ostrych pozostają w stosunku 5 : 4, oblicz długości boków trójkąta przy kącie rozwartym.

7.25. **7.29.** Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle BAC| = 90°$ oraz $|AC| = 12$ cm. Na boku AB tego trójkąta zaznaczono punkt E w taki sposób, że $|CE| = |EB|$. Wiedząc, że pole trójkąta ABC jest równe 108 cm^2, oblicz:
a) pole trójkąta BCE
b) wysokość trójkąta BCE poprowadzoną z punktu E.

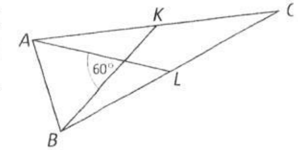


7.27. **7.30.** W trójkącie poprowadzono środkowe, które podzieliły dany trójkąt na sześć mniejszych trójkątów. Wykaż, że pola powstałych trójkątów są równe.

7.28. **7.31.** Środkowe CD i BE trójkąta ABC przecinają się pod kątem $45°$ (patrz rysunek obok). Wiedząc, że $|BE| = 12$ cm oraz $|CD| = 21$ cm, oblicz pole trójkąta ABC.



7.29. **7.32.** Podstawą trójkąta równoramiennego ABC jest bok AB. Środkowe AL i BK przecinają się w punkcie S pod kątem $60°$ (patrz rysunek obok). Wiadomo, że pole trójkąta ABS jest równe $\sqrt{3}$.
a) Oblicz długość boków trójkąta ABC.
b) Czy kąt ACB jest równy $30°$? Odpowiedź uzasadnij.



Pole trójkąta, cz. 2

7.30. **7.33.** Z kawałka trójkątnego materiału o obwodzie 1,12 m i polu 504 cm^2 wycięto koło, styczne do boków tego trójkąta. Oblicz długość promienia wyciętego koła.

7.31. **7.34.** W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 32 cm, a ramię ma 20 cm. Oblicz:
a) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt
b) odległość środka tego okręgu od wierzchołków trójkąta.

7.32. **7.35.** W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 8 cm. W trójkąt ten wpisano okrąg o. Punkty D i E są punktami styczności okręgu, odpowiednio z ramionami AC i BC tego trójkąta, przy czym $|DC| + |CE| = |DA| + |AB| + |BE|$. Oblicz:
a) pole trójkąta ABC
b) promień okręgu o.

7.33. **7.36.** Pole trójkąta wynosi 84, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 4. Wiedząc, że długości boków trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi, wyznacz najkrótszą wysokość tego trójkąta.

7.34. **7.37.** W trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$, $|\sphericalangle C| = 120°$, wpisano okrąg, którego promień jest równy 3 cm. Oblicz długości boków trójkąta.

7.35. **7.38.** W trójkącie ABC dane są kąty: $|\sphericalangle A| = 30°$, $|\sphericalangle B| = 45°$. Wysokość CD jest równa 3 cm.
a) Oblicz pole trójkąta ABC.
b) Wyznacz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt. Podaj przybliżenie dziesiętne wyniku z dokładnością do 0,1 cm

7.36. **7.39.** Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 16$ cm, $|BC| = |AC| = 17$ cm. Oblicz:

a) pole tego trójkąta
b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt
c) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

7.37. **7.40.** W trójkącie równoramiennym o polu 48 cm^2 stosunek długości ramienia do wysokości opuszczonej na podstawę jest równy 5 : 4. Oblicz:

a) obwód trójkąta
b) wysokości tego trójkąta
c) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

7.38. **7.41.** Boki trójkąta mają długość 25 cm, 39 cm, 56 cm. Oblicz:

a) pole trójkąta
b) wysokości tego trójkąta.

7.39. **7.42.** Boki trójkąta mają długość 21 cm, 17 cm, 10 cm. Oblicz:

a) pole trójkąta
b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt
c) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

7.40. **7.43.** W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 14 cm, a pole tego trójkąta wynosi 168 cm^2. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy $5\frac{1}{4}$ cm.

a) Oblicz długość ramienia tego trójkąta.
b) Wykaż, że kąt α między ramionami tego trójkąta jest większy od 30°.

7.41. **7.44.** Dwa boki trójkąta mają długość 17 cm i 25 cm, a jego pole jest równe 210 cm^2. Wiedząc, że promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 6 cm, oblicz:

a) długość trzeciego boku trójkąta
b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

7.42. **7.45.** W trójkącie równoramiennym ramię ma długość 15 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 12,5 cm. Wiedząc, że pole trójkąta jest równe 108 cm^2, wyznacz wysokość tego trójkąta poprowadzoną na podstawę.

7.43. **7.46.** Dwa boki trójkąta mają długość 42 cm i 20 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $21\frac{1}{4}$ cm. Wiedząc, że pole trójkąta jest równe 336 cm^2, wyznacz:

a) długość trzeciego boku
b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

7.44. **7.47.** W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 25 cm. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

7.45. **7.48.** Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy 17 cm, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt – 6 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

***7.49.** Pole trójkąta prostokątnego jest równe 180 cm^2, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi 4 cm. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

7.46. **7.50.** Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego obwód jest równy 70 cm, a pole wynosi 210 cm^2.

***7.51.** Wykaż, że okrąg wpisany w trójkąt prostokątny jest styczny do przeciwprostokątnej w punkcie dzielącym ją na dwa odcinki, których iloczyn długości jest równy polu tego trójkąta.

7.52. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 12 cm i 5 cm. Przez wierzchołek kąta prostego poprowadzono prostą, która podzieliła ten trójkąt na dwa trójkąty o równych obwodach. Oblicz stosunek promieni okręgów wpisanych w powstałe trójkąty.

***7.53.** W trójkącie równoramiennym ramię jest dwa razy dłuższe od podstawy, a suma promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt i promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa 11 cm. Oblicz długość podstawy trójkąta.

7.54. Oblicz długości boków trójkąta równoramiennego o polu $25\sqrt{2}$ i kącie 45° między ramionami.

7.55. W trójkącie dwa boki mają długość 12 i 3, a kąt między nimi jest równy 60°. Oblicz:

a) pole trójkąta
b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie
c) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

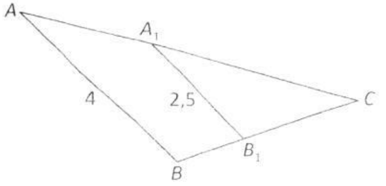
7.56. W trójkącie ABC, w którym $|AC| = |BC| = 15$ i $|\sphericalangle C| = 30^\circ$, poprowadzono odcinek AD w ten sposób, że $D \in BC$ oraz pole trójkąta ADC jest dwa razy większe od pola trójkąta ABD. Oblicz $|AD|$.

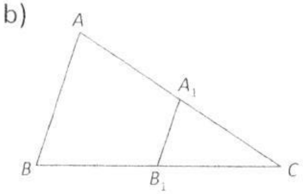
Pola trójkątów podobnych

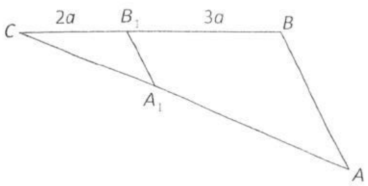
7.47. **7.57.** Trójkąt ABC ma obwód równy 30 cm, a pole 24 cm^2. Obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ podobnego do trójkąta ABC wynosi 15 cm. Oblicz pole trójkąta $A_1B_1C_1$.

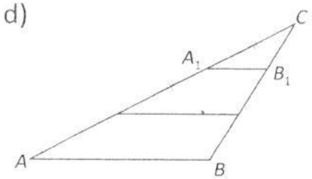
7.58. Trójkąt ABC ma obwód równy 33 cm, a jego pole wynosi 18 cm^2. Oblicz obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ podobnego do trójkąta ABC, wiedząc, że pole trójkąta $A_1B_1C_1$ jest równe 2 cm^2.

7.59. Odcinek A_1B_1 jest równoległy do odcinka AB. Na podstawie danych na rysunku oblicz stosunek pola trójkąta A_1B_1C do pola trójkąta ABC.

a)


b)


c)


d)


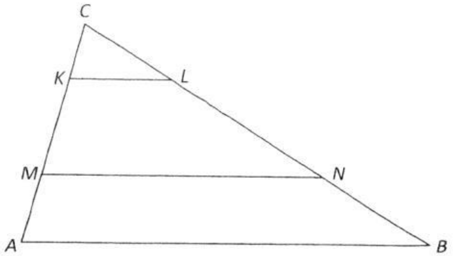
7.60. Podstawa AB trójkąta ABC ma długość 24 cm. Na boku AC zaznaczono punkty A_1, A_2, a na boku BC punkty B_1, B_2 w taki sposób, że $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_2B_2 \parallel AB$. Wiedząc, że $|A_1B_1| = 8$ cm, $|A_2B_2| = 20$ cm, oblicz stosunek pól:

a) trójkątów A_1B_1C, A_2B_2C i ABC b) figur A_1B_1C, $A_2B_2B_1A_1$ i ABB_2A_2.

7.61. W trójkącie ostrokątnym poprowadzono dwie proste równoległe do podstawy, które podzieliły wysokość trójkąta opuszczoną na tę podstawę na trzy odcinki równej długości. Oblicz stosunek pól powstałych w wyniku tego podziału figur.

7.62. Stosunek pól dwóch trójkątów podobnych $A_1B_1C_1$ i ABC wynosi $\frac{4}{9}$. Wiedząc, że podstawa A_1B_1 trójkąta $A_1B_1C_1$ jest o 7 cm krótsza od podstawy AB trójkąta ABC, oblicz $|A_1B_1|$ i $|AB|$.

7.63. Odcinki KL i MN są równoległe do podstawy AB trójkąta ABC. Stosunek pól figur KLC, $MNLK$ i $ABNM$ w podanej kolejności wynosi 1 : 8 : 7. Oblicz stosunek długości odcinków $|KL| : |MN| : |AB|$.



7.64. Wysokość CD trójkąta, której długość wynosi 5 cm, dzieli bok AB na dwa odcinki tak, że: $|AD| = 4$ cm i $|DB| = 8$ cm. W trójkącie tym poprowadzono prostą EF równoległą do CD, która podzieliła ten trójkąt na dwie figury o równych polach i taką, że $E \in BC$, $F \in AB$. Oblicz długość odcinka leżącego na tej prostej, zawartego w tym trójkącie.

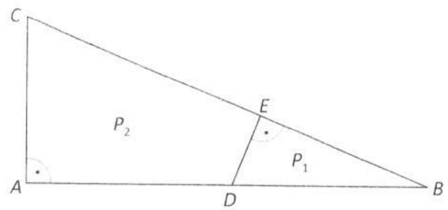
7.65. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa ma długość 40 cm. W trójkąt ten wpisano koło, które jest styczne do ramion trójkąta w punktach D i E. Wiedząc, że $|DE| = 8$ cm, oblicz:

a) pole trójkąta ABC b) pole koła wpisanego w ten trójkąt.

7.66. W trójkąt równoramienny ABC o bokach długości 13 cm, 13 cm, 10 cm wpisano koło. Styczna do koła, równoległa do podstawy, odcina od trójkąta ABC trójkąt DEC. Oblicz pole trójkąta DEC.

7.67. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne AC i AB mają długość odpowiednio równą: 8 cm i 12 cm. Na przyprostokątnej AB obrano punkt D tak, że $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ACB|$. Oblicz pole trójkąta ADC.

7.68. W trójkącie prostokątnym ABC, $|\sphericalangle A| = 90°$, przyprostokątna AC ma długość 12 cm. Odcinek DE, prostopadły do przeciwprostokątnej BC, dzieli trójkąt na dwie figury o polach równych $P_1 = 6$ cm^2 i $P_2 = 90$ cm^2. Oblicz długości boków trójkąta DBE.



7.69. W trójkącie prostokątnym ABC stosunek przyprostokątnych jest równy $|AB| : |AC| = 4 : 3$. Punkt D dzieli przyprostokątną AB na odcinki takie, że $|DB| = 3|AD|$. Punkt E należy do przeciwprostokątnej BC i odcinek DE jest prostopadły do boku BC. Oblicz, jakim procentem pola trójkąta ABC jest pole trójkąta DBE.

7.70. W trójkącie prostokątnym ABC stosunek przyprostokątnych jest równy $|AC| : |AB| = 5 : 12$. Punkt D dzieli przeciwprostokątną BC na odcinki, których długości pozostają w stosunku $|CD| : |DB| = 5 : 8$. Wiedząc, że punkt E należy do przyprostokątnej AB i $ED \perp CB$, oblicz stosunek pola czworokąta $AEDC$ do pola trójkąta EBD.

7.71. W trójkącie ostrokątnym równoramiennym ABC, $|AC| = |BC|$, poprowadzono wysokości CD i BE. Pole trójkąta ABE jest o 44% większe od pola trójkąta ADC. **Wiedząc, że obwód trójkąta** ABC **jest równy 80 cm, oblicz pole trójkąta** ABC.

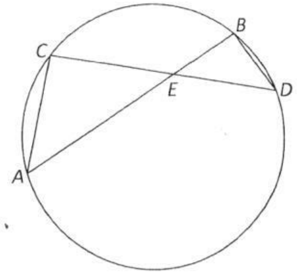
7.62. **7.72.** W ostrokątnym trójkącie równoramiennym ABC, $|AC| = |BC|$, wysokość CD przecięła się z wysokością AE w punkcie S. Wysokość AE dzieli ramię BC trójkąta na odcinki BE i EC, których długości pozostają w stosunku $|BE| : |EC| = 1 : 2$.

a) Oblicz sinus kąta EAB.
b) Wykaż, że trójkąt ADS jest podobny do trójkąta SEC.
c) Oblicz stosunek pola trójkąta ADS do pola trójkąta SEC.

7.63. **7.73.** Cięciwy AB i CD koła przecinają się pod kątem $30°$ w punkcie E. Wiedząc, że $|AE| = 6$ cm, $|ED| = 3$ cm, $|EB| = 2$ cm, oblicz pole trójkąta AEC.

7.64. **7.74.** W kole poprowadzono cięciwy AB i CD, które przecięły się w punkcie E. Pole trójkąta AEC jest o 210 cm^2 większe od pola trójkąta EDB. Wiedząc, że $|AE| = 40$ cm, $|ED| = 16$ cm, $|BE| = 10$ cm, oblicz:

a) długość odcinka CE
b) pola trójkątów AEC i EDB
c) miarę kąta przecięcia się cięciwy AB z cięciwą CD.



7.75. W trójkąt ABC wpisano koło, które jest styczne do boków AC i BC odpowiednio w punktach D i E. Wiedząc, że $|AD| = |EB| = 7$ cm oraz $|DE| = 10{,}08$ cm,

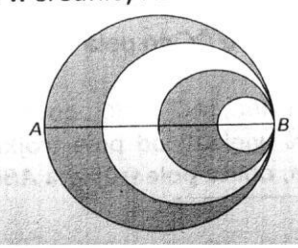
a) wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny
b) oblicz pole trójkąta ABC.

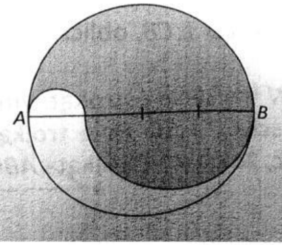
7.76. W trójkąt równoramienny ABC wpisano koło. Następnie poprowadzono dwie proste równoległe do podstawy AB – prostą l styczną do koła i prostą k przechodzącą przez środek koła. Te proste podzieliły trójkąt na trzy wielokąty, których pola pozostają w stosunku 1 : 3 : 5 (licząc od pola trójkąta). Wykaż, że trójkąt ABC jest równoboczny.

Pole koła, pole wycinka koła

7.65. **7.77.** Średnicę AB koła podzielono na cztery równe odcinki. Oblicz, jaką część pola tego koła stanowi figura zaznaczona kolorem niebieskim, jeśli:

a) okręgi wyznaczające tę figurę są styczne wewnętrznie, a ich średnice są zawarte w średnicy AB
b) łuk wewnątrz koła jest sumą dwóch półokręgów (patrz rysunek poniżej).





7.66. **7.78.** Promień koła jest równy r. Kąt wycinka tego koła ma miarę α. Oblicz pole wycinka, jeżeli:

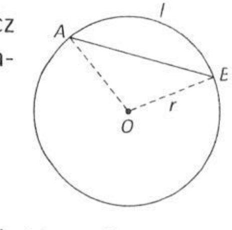
a) $r = 9$ cm, $\alpha = 20°$ b) $r = 12$ cm, $\alpha = 150°$ c) $r = 5$ cm, $\alpha = 54°$

7.67. **7.79.** Pole wycinka koła jest równe P, a łuk tego wycinka ma długość l. Oblicz promień koła, jeśli:

a) $P = 10\pi$ cm^2, $l = 2{,}5\pi$ cm
b) $P = 30$ cm^2, $l = 12$ cm
c) $P = 210\pi$ cm^2, $l = 14\pi$ cm

7.68. **7.80.** Dane jest koło o środku w punkcie O i promieniu r. Oblicz pole odcinka tego koła (zaznaczonego na rysunku obok), wyznaczonego przez łuk długości l, jeśli:

a) $r = 2, l = \pi$ b) $r = 3, l = 2\pi$ c) $r = 6, l = 5\pi$



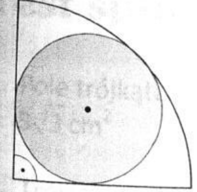
7.69. **7.81.** Stosunek pola trójkąta do pola koła wpisanego w ten trójkąt jest równy $3 : \pi$. Wiedząc, że średnica tego koła ma długość 6 cm, oblicz obwód trójkąta.

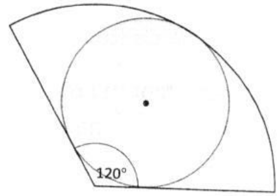
7.70. **7.82.** W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz stosunek pola koła wpisanego w ten trójkąt do pola koła opisanego na tym trójkącie.

7.71. **7.83.** Kąt wpisany w koło ma miarę $45°$ i jest oparty na łuku długości 3π cm. Oblicz pole wycinka koła, wyznaczonego przez ten sam łuk.

7.72. **7.84.** Wycinek koła jest wyznaczony przez kąt środkowy, zaznaczony na rysunku poniżej. W wycinek wpisano koło o danym polu P. Oblicz pole wycinka.

a) $P = 4\pi$ cm^2 b) $P = 9\pi$ cm^2





7.73. **7.85.** W kole z jednego punktu okręgu poprowadzono dwie cięciwy o długości 6 cm każda. Wiedząc, że utworzyły one kąt $60°$, oblicz pole części koła zawartej między tymi cięciwami.

7.74. **7.86.** Odległość środków dwóch kół o jednakowych promieniach równych r wynosi r. Oblicz pole części wspólnej tych kół.

7.75. **7.87.** Podstawa trójkąta równobocznego jest średnicą koła o promieniu r. Oblicz stosunek pola części koła leżącej na zewnątrz trójkąta do pola części koła leżącej wewnątrz tego trójkąta.

Zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń

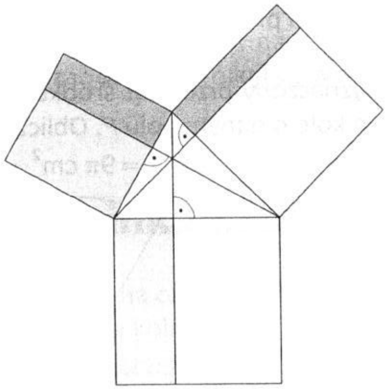
7.88. W trójkącie prostokątnym ABC, przez wierzchołek C kąta prostego poprowadzono prostą, która przecięła bok AB w punkcie D. Wiedząc, że $|AC| = a$, $|BC| = b$ oraz $|\sphericalangle ACD| = 30°$, oblicz:

a) $|CD|$

b) $|AD| : |DB|$

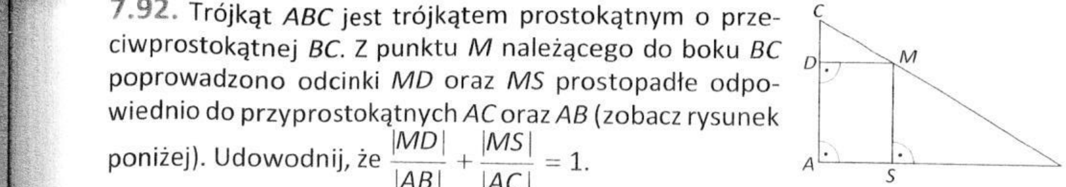
7.89. W trójkącie ABC mamy dane: $|AC| = 8$, $|BC| = 12$ oraz $|\sphericalangle C| = 150°$. Przez wierzchołek C poprowadzono prostą prostopadłą do boku BC. Przecięła ona bok AB w punkcie D. Oblicz $|CD|$.

7.90. Na bokach trójkąta ostrokątnego zbudowano kwadraty, następnie poprowadzono proste zawierające wysokości tego trójkąta. Te proste podzieliły kwadraty na sześć prostokątów (zobacz rysunek poniżej). Wykaż, że prostokąty w tym samym kolorze mają równe pola.



7.91. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych mających długość a i b $(a > b)$ wpisano prostokąt w taki sposób, że dwa kolejne boki prostokąta zawierają się w ramionach kąta prostego, a jeden jego wierzchołek leży na przeciwprostokątnej. Stosunek boków prostokąta jest równy 1 : 2. Oblicz długość krótszego boku prostokąta. Rozważ dwa przypadki. W którym przypadku pole prostokąta jest większe?

7.92. Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej BC. Z punktu M należącego do boku BC poprowadzono odcinki MD oraz MS prostopadłe odpowiednio do przyprostokątnych AC oraz AB (zobacz rysunek poniżej). Udowodnij, że $\frac{|MD|}{|AB|} + \frac{|MS|}{|AC|} = 1$.



7.93. Wyznacz długość boku c trójkąta, jeśli dane są długości a, b dwóch jego bo-ków oraz wiadomo, że $h_a + h_b = h_c$, gdzie h_a, h_b, h_c są wysokościami opuszczonymi n odpowiednie boki tego trójkąta.

7.98. **7.94.** Punkt M należy do podstawy AB trójkąta równoramiennego ABC, $M \neq A$ i $M \neq B$ Wykaż, że suma odległości punktu M od ramion trójkąta jest równa wysokośc trójkąta, poprowadzonej z punktu A.

***7.95.** Niech P będzie dowolnym punktem wewnętrznym trójkąta ABC. Wykaż, że $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$, gdzie x, y, z oznaczają odległości tego punktu odpowiednio o boków a, b, c tego trójkąta, natomiast h_a, h_b, h_c są wysokościami poprowadzonym na te boki.

***7.96.** Wykaż, że jeśli suma wysokości trójkąta jest 9 razy większa od długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt, to trójkąt ten jest równoboczny.

***7.97.** W okrąg wpisano trójkąt równoboczny ABC. Na okręgu wybrano punkt D (różny od punktów A, B, C) i poprowadzono trzy odcinki DA, DB i DC. Wykaż, że suma długości dwóch krótszych odcinków jest równa długości odcinka trzeciego.

Test sprawdzający do rozdziału 7.

1. Pole trójkąta równobocznego o boku długości 6 cm jest równe:

A. $3\sqrt{3}$ cm^2 B. $9\sqrt{3}$ cm^2 C. $18\sqrt{3}$ cm^2 D. $36\sqrt{3}$ cm^2.

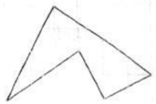
2. Trójkąt prostokątny równoramienny ma pole równe 2 cm^2. Z tego wynika, że przyprostokątna ma długość:

A. $\sqrt{2}$ cm B. 2 cm C. $2\sqrt{2}$ cm D. 4 cm.

3. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 7 cm i 24 cm. Niech h oznacza odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej tego trójkąta. Wówczas:

A. $h = 3\frac{9}{25}$ cm B. $h = 12{,}5$ cm C. $h = 6{,}72$ cm D. $h = 5\frac{23}{25}$ cm.

4. Pole jednej kratki wynosi 1. Pole figury na rysunku obok jest równe:



A. 8 B. 8,5
C. 9 D. 9,5.

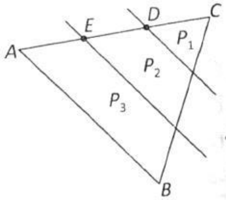
5. Trójkąt $A_1B_1C_1$ o polu 36 cm^2 jest podobny do trójkąta ABC o polu 4 cm^2. Skala podobieństwa trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta ABC jest równa:

A. 3 B. 9 C. 12 D. $\frac{1}{9}$.

6. Wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona na przeciwprostokątną dzieli ją na dwa odcinki, długości 2 cm i 8 cm. Pole tego trójkąta jest równe:

A. 16 cm^2 B. 20 cm^2 C. 24 cm^2 D. 28 cm^2.

7. Na boku AC trójkąta ABC zaznaczono punkty D, E w taki sposób, że $|AE| = |ED| = |DC|$. Przez punkty E, D poprowadzono proste równoległe do boku AB, które podzieliły trójkąt na trzy rozłączne figury o polach równych odpowiednio P_1, P_2, P_3 (patrz rysunek obok). Zatem:



A. $P_2 : P_3 = 1 : 2$ B. $P_2 : P_3 = 2 : 3$
C. $P_2 : P_3 = 4 : 9$ D. $P_2 : P_3 = 3 : 5$.

8. Odcinek CD jest środkową w trójkącie ABC. Trójkąt DBC ma pole równe 3 cm^2. Pole trójkąta ABC wynosi:

A. 4,5 cm^2 B. 5 cm^2 C. 6 cm^2 D. 7,5 cm^2.

9. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 16 cm, a wysokość poprowadzona na tę podstawę jest równa 6 cm. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

A. $3\frac{2}{3}$ cm B. 6 cm C. 4 cm D. $8\frac{1}{3}$ cm.

10. Pole koła opisanego na trójkącie o bokach długości 3, 4, 5 jest równe:

A. 5π B. $6{,}25\pi$ C. 10π D. 25π.

11. Pole trójkąta o bokach długości 13, 14, 15 jest równe:

A. 105 B. 91 C. 84 D. 42.

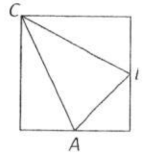
12. W trójkącie dwa boki mają długość 8 cm i 5 cm, a kąt między tymi bokami jest równy 150°. Pole tego trójkąta jest równe:

A. 20 cm^2 B. $10\sqrt{3}$ cm^2 C. $10\sqrt{2}$ cm^2 D. 10 cm^2.

13. O trójkącie ABC wiemy, że $|AB| = 15$ cm, $|AC| = 12$ cm i kąt CAB ma miarę α spełniającą warunek $30° \leq \alpha \leq 60°$. Pole trójkąta ABC będzie najmniejsze wtedy, gd miara α będzie równa:

A. 30° B. 45° C. 52,5° D. 60°.

14. Na rysunku obok punkty A i B są środkami dwóch sąsiednich boków kwadratu. Jaką część pola kwadratu stanowi pole trójkąta ABC?



A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{2}{5}$

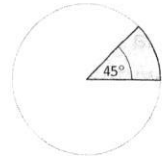
15. Pole koła wpisanego w trójkąt prostokątny o bokach długości 15 cm, 36 cm, 39 cm jest równe:

A. 36π cm^2 B. 25π cm^2 C. 16π cm^2 D. 9π cm^2.

16. Pole trójkąta wynosi 48 cm^2, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 3 cm. Zatem obwód tego trójkąta jest równy:

A. 16 cm B. 32 cm C. 72 cm D. 144 cm.

17. Na rysunku obok z pewnego koła wycięto wycinek, którego kąt jest równy 45°, a łuk tego wycinka ma długość π. Zatem pole koła było równe:



A. π B. 4π C. 8π D. 16π.

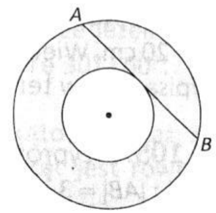
18. Pole pierwszego koła jest o 36% mniejsze od pola drugiego koła. Wobec tego promień drugiego koła jest większy od promienia pierwszego koła o:

A. 20% B. 25% C. 36% D. 64%.

19. Pole wycinka koła o promieniu 12 cm jest równe 60π cm^2. Kąt środkowy, wyznaczający dany wycinek koła, ma miarę:

A. 150° B. 135° C. 120° D. 90°.

20. Dane są dwa okręgi współśrodkowe. Cięciwa AB większego okręgu ma długość 10 cm i jest styczna do mniejszego okręgu. Pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez te okręgi jest równe:



A. 25π cm^2 B. 100π cm^2
C. 50π cm^2 D. 75π cm^2.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 7.

7.76. **7.98.** W trójkącie prostokątnym tangens jednego z kątów ostrych jest równy $1\frac{1}{3}$. Wiedząc, że obwód tego trójkąta wynosi 36 cm, oblicz:
a) pole trójkąta
b) wysokość poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego.

7.78. **7.99.** Wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona na przeciwprostokątną podzieliła ją na odcinki długości 18 cm i 2 cm. Oblicz:
a) pole tego trójkąta
b) promień okręgu opisanego na tym trójkącie
c) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

7.79. **7.100.** W trójkącie prostokątnym *ABC* cosinus kąta *ABC* wynosi 0,8. W trójkąt wpisano okrąg; punkt *D* jest punktem styczności tego okręgu z przeciwprostokątną *AB*. Wiedząc, że promień tego okręgu jest równy 5 cm, oblicz pola trójkątów *ADC* i *DBC*.

7.81. **7.101.** Dwa boki trójkąta mają długość 28 cm i 25 cm, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $14\frac{1}{6}$ cm. Wiedząc, że pole trójkąta wynosi 210 cm^2, wyznacz: .
a) długość trzeciego boku
b) promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

7.82. **7.102.** Dwa boki trójkąta mają długość $a = 7$ cm i $b = 8$ cm, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy $\sqrt{5}$ cm. Wiedząc, że pole trójkąta wynosi $12\sqrt{5}$ cm^2, oblicz sinusy kątów tego trójkąta.

7.83. **7.103.** Na przedłużeniu przeciwprostokątnej *AB* trójkąta prostokątnego *ABC* obrano punkt *D* tak, że $|BD| = |BC|$. Oblicz $|CD|$, jeśli wiadomo, że $|BC| = 15$ cm i $|AC| = 8$ cm.

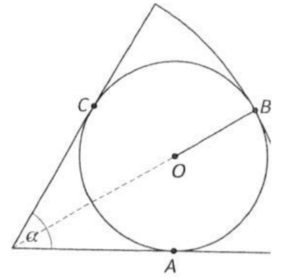
7.84. **7.104.** Na trójkącie *ABC*, w którym $|AC| = |BC|$, opisano okrąg o środku *O* i promieniu $R = 20$ cm. Wiedząc, że $|\sphericalangle AOB| = 120°$, oblicz pole trójkąta *ABC* oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt. Rozważ dwa przypadki.

7.85. **7.105.** Przyprostokątne trójkąta prostokątnego *ABC* pozostają w stosunku $|AC| : |AB| = 3 : 4$. Punkt *D* jest środkiem przeciwprostokątnej *BC*. Przez punkt *D* poprowadzono prostą prostopadłą do boku *BC*, która przecięła bok *AB* w punkcie *E*. Jaką część pola trójkąta *ABC* stanowi pole trójkąta *EBD*?

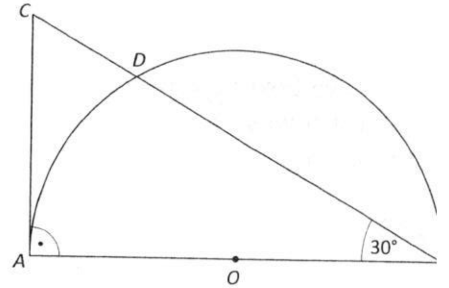
7.86. **7.106.** W trójkącie równoramiennym *ABC* podstawa *AB* ma długość 26 cm. Wysokość *AE* jest równa 24 cm. Oblicz:
a) obwód trójkąta *ABC*
b) długości odcinków, na jakie wysokość *CD* podzieliła wysokość *AE*
c) stosunek pola trójkąta *ADS* do pola trójkąta *CSE*, gdzie *S* jest punktem wspólny wysokości *AE* i *CD*.

7.87. **7.107.** Pole koła jest równe $72\frac{1}{4}\pi$ cm^2. Cięciwa *CD* przecina średnicę *AB* w punk *E*, odległym o 5 cm od środka koła. Wiedząc, że pole trójkąta *EBD* jest 9 razy więks od pola trójkąta *ACE*, oblicz odległość cięciwy *CD* od środka koła.

7.88. **7.108.** W wycinek koła o promieniu 6 cm wpisano okrąg o promieniu 2 cm (patrz rysunek obok). Oblicz pole wycinka koła.



7.89. **7.109.** W trójkącie prostokątnym *ABC* dane są: $|AC| = 3$ cm, $|\sphericalangle CAB| = 90°$, $|\sphericalangle ABC| = 30°$. Przyprostokątna *AB* jest średnicą półkola, jak na rysunku obok. Punkt *D* jest punktem przecięcia półokręgu z bokiem *BC*. Oblicz:
a) długość cięciwy *DB*
b) pole odcinka koła, zaznaczonego na rysunku.



7.92. **7.110.** W prostokącie *ABCD* punkt *E* jest środkiem boku *AB*. Przekątna *AC* i odcine *DE* przecinają się w punkcie *S*. Wykaż, że pole czworokąta *EBCS* stanowi $\frac{5}{12}$ pol prostokąta *ABCD*.

7.93. **7.111.** W trójkącie prostokątnym *ABC*, w którym $|\sphericalangle C| = 90°$, poprowadzono odc nek *CD* w taki sposób, że $D \in AB$ oraz $|\sphericalangle BCD| = 2|\sphericalangle ACD|$. Wykaż, że jeżeli pol trójkątów *ADC* i *BCD* są równe, to kąty ostre trójkąta *ABC* mają miarę 30° i 60°.

7.94. **7.112.** W danym trójkącie poprowadzono dwusieczną jednego z kątów. Wykaż, ż jeżeli pola powstałych dwóch trójkątów są równe, to dany trójkąt jest równo ramienny.

7.113. W trójkącie *ABC* poprowadzono dwusieczną z punktu *C*, która przecięła bo *AB* w punkcie *D*. Wiedząc, że $|AC| = 12$ cm, $|BC| = 4$ cm oraz pole trójkąta *ADC* jes o $6\sqrt{3}$ cm^2 większe od pola trójkąta *DBC*, oblicz pole trójkąta *ABC*.

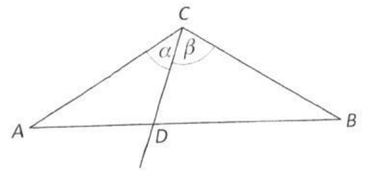
7.114. W trójkącie ABC dane są: $|\sphericalangle ACB| = 120°$, $|AC| = 6$, $|BC| = 3$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D.

a) Oblicz długość odcinka CD.

b) Jaki jest związek między promieniami: okręgu opisanego na trójkącie ABC i okręgu opisanego na trójkącie DBC? Odpowiedź uzasadnij.

7.95. **7.115.** W trójkącie ABC dane są: $|\sphericalangle ACB| = 135°$ oraz $|BC| = a$. Wykaż, że jeśli środkowa CD tego trójkąta jest prostopadła do boku BC, to $|AC| = a\sqrt{2}$.

7.96. **7.116.** Punkt D należy do podstawy AB trójkąta równoramiennego ABC. Półprosta $CD^{\rightarrow}$ dzieli kąt przy wierzchołku C na kąty o miarach α i β (patrz rysunek poniżej). Wykaż, że $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

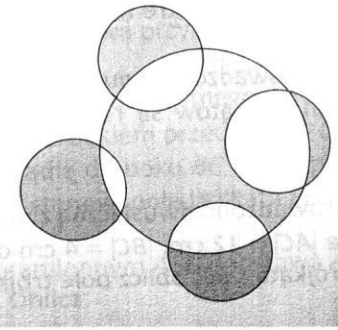


7.117. Dwa boki trójkąta mają długość 7 i 8, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy $\sqrt{5}$. Wiedząc, że pole trójkąta wynosi $12\sqrt{5}$, oblicz sinusy kątów tego trójkąta.

7.118. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $|\sphericalangle C| = 90°$ i $|BC| < |AC|$, poprowadzono prostą przez wierzchołek C trójkąta, przecinającą przeciwprostokątną w punkcie D takim, że $|AD| : |DB| = 2 : 1$. Wiedząc, że $|BC| = \sqrt{3}$ i $|\sphericalangle DCB| = 30°$, oblicz $|AB|$.

***7.119.** W trójkącie prostokątnym ABC, $|\sphericalangle C| = 90°$, wybrano punkt P, dla którego trójkąty PAB, PBC i PCA mają równe pola. Wiedząc, że $|PA|^2 + |PB|^2 = 45$, oblicz $|PC|$.

7.100. **7.120.** Każde z czterech mniejszych kół ma promień 1. Większe koło ma promień 2. Wykaż, że pole figury niebieskiej jest równe polu figury szarej.

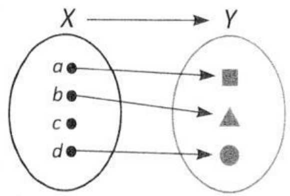


8. Funkcja i jej własności

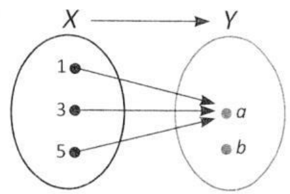
Pojęcie funkcji. Funkcja liczbowa. Dziedzina i zbiór wartości funkcji

8.1. **8.1.** Który z poniższych grafów jest grafem funkcji odwzorowującej zbiór X w zbiór Y? Odpowiedź uzasadnij.

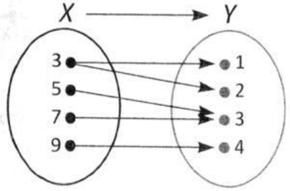
a)



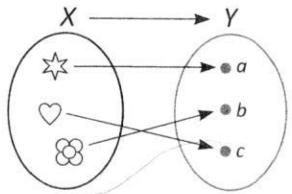
b)



c)



d)



W przypadku funkcji podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

8.2. **8.2.** Które z podanych przyporządkowań są funkcjami? Odpowiedź uzasadnij.

a) Każdemu państwu europejskiemu przyporządkowujemy jego obecną stolicę.

b) Każdemu aktorowi filmowemu przyporządkowujemy tytuł filmu, w którym zagrał.

c) Każdemu uczniowi Twojej klasy przyporządkowujemy ocenę z matematyki na świadectwie ukończenia gimnazjum.

d) Każdej liczbie całkowitej przyporządkowujemy jej kwadrat.

8.3. **8.3.** Wykonaj siedem rzutów kostką sześcienną do gry. Każdemu rzutowi przyporządkuj liczbę wyrzuconych oczek (zakładamy, że kostka tak upadnie, że za każdym razem będziemy mogli odczytać wynik). Zapisz otrzymane pary liczb w postaci:

$\{(x, y): x$ – numer rzutu, y – liczba otrzymanych oczek$\}$.

Podaj dziedzinę opisanej w ten sposób funkcji, zbiór wartości tej funkcji oraz wartość funkcji dla argumentu 4.

8.4. **8.4.** Narysuj graf funkcji f, zdefiniowanej następująco: $f(1) = 4$, $f(4) = 6$, $f(5) = 4$, $f(7) = 3$, $f(8) = 0$. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f.