3. Geometria płaska – czworokąty

Podział czworokątów. Trapezoidy

3.1. Oblicz miary kątów czworokąta, jeśli:

a) pierwszy kąt jest o 20° mniejszy od drugiego, trzeci kąt jest o 70° większy od pierwszego, a czwarty jest średnią arytmetyczną trzech pozostałych

b) miary kolejnych kątów pozostają w stosunku $2 : 3 : 5 : 5$

c) miara kąta drugiego stanowi 75% miary kąta pierwszego, kąt trzeci jest o 25% większy od kąta drugiego, a miara kąta czwartego stanowi $\frac{29}{16}$ miary kąta pierwszego.

3.2. Oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$, wiedząc, że:

a) przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta przy wierzchołku A i w dwusiecznej kąta przy wierzchołku C oraz kąt ACB jest o 20° mniejszy od kąta DAC, a kąt ADC jest o 50° większy od kąta CAB

b) przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta przy wierzchołku A oraz suma miar kątów DAC i DCA wynosi 90°, kąt DCA ma miarę dwa razy większą niż kąt ACB, a kąt ABC jest o 60° większy od kąta DAC.

Czy czworokąt $ABCD$ jest deltoidem? Odpowiedź uzasadnij.

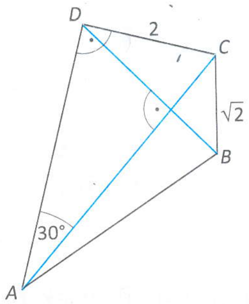
3.3. Jedna przekątna pewnego czworokąta dzieli go na dwa trójkąty o obwodach 20 cm i 40 cm, a druga – na dwa trójkąty o obwodach 30 cm i 50 cm. Wiedząc, że suma długości przekątnych jest równa 26 cm, oblicz obwód tego czworokąta.

3.4. Kawałek czworokątnego materiału o obwodzie 3 m przecięto wzdłuż jednej z jego przekątnych. Powstały dwie chusty w kształcie trójkąta równoramiennego: pierwsza o obwodzie 1,8 m, a druga o obwodzie 2,8 m. Linia rozcięcia stanowi podstawę pierwszego trójkąta, a dla drugiego jest ramieniem. Wyznacz wymiary obu chust.

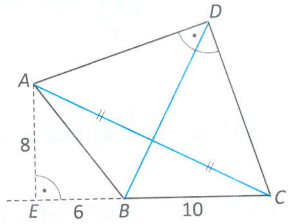
3.5. Z dwóch cienkich listewek o długości odpowiednio 0,8 m i 1,05 m wykonano szkielet latawca. Dłuższa listewka wyznacza oś symetrii krótszej listewki i jest podzielona przez punkt przecięcia się z krótszą listewką na odcinki, których długości mają się do siebie jak $2 : 5$. Następnie końce tych listewek połączono kolejno żyłką, wyznaczając w ten sposób boki latawca. Oblicz długość tej żyłki.

3.6. Oblicz długość przekątnych AC i BD czworokąta $ABCD$, wykorzystując dane z rysunku poniżej:

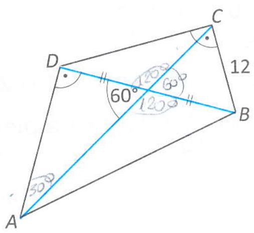
a)



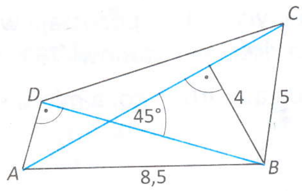
b)



c)



d)



Trapezy

3.7. W trapezie równoramiennym $ABCD$ przekątna AC tworzy z ramieniem BC kąt prosty i jest jednocześnie dwusieczną kąta przy wierzchołku A. Oblicz miary kątów trapezu.

3.8. W trapezie $ABCD$ kąt przy wierzchołku B ma miarę równą $22°$. Przekątna AC tworzy z bokiem AB kąt o mierze $22°$. Oblicz miary kątów trójkąta ACD, wiedząc, że nierównoległe boki AD i BC trapezu zawierają się w prostych prostopadłych.

3.9. W trapezie $ABCD$ ($AB \parallel CD$) miara kąta przy wierzchołku B jest o 25% większa od miary kąta przy wierzchołku A, natomiast miara kąta przy wierzchołku C jest o $13°$ mniejsza od miary kąta przy wierzchołku D. Wyznacz miary kątów tego trapezu.

3.10. W trapezie $ABCD$ przekątna AC tworzy z ramieniem BC kąt równy kątowi ADC. Wykaż, że $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DAC|$.

3.11. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa ma taką samą długość jak ramię.

a) Wykaż, że przekątne trapezu zawierają się w dwusiecznych kątów przy dłuższej podstawie.

b) Wiedząc dodatkowo, że stosunek długości podstaw wynosi 1 : 2, wyznacz miary kątów trapezu.

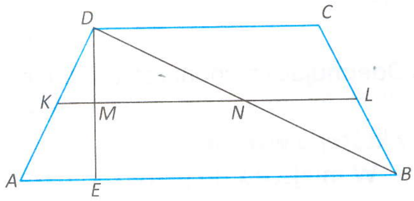
3.12. W pewnym trapezie trzy boki mają długość 6 cm, a kąt rozwarty ma miarę $120°$. Oblicz długość dłuższej podstawy trapezu.

3.13. W trapezie równoramiennym o obwodzie $(18+8\sqrt{2})$ cm wysokość jest równa 4 cm, a kąt ostry ma miarę $45°$. Oblicz długości boków tego trapezu.

3.14. W trapezie równoramiennym miara kąta ostrego jest równa $60°$. Wysokość trapezu jest równa $3\sqrt{3}$ cm, a długość przekątnej wynosi $2\sqrt{19}$ cm. Oblicz obwód trapezu.

3.15. W trapezie równoramiennym wysokość jest równa długości krótszej odstawy, a ramię ma długość 13 cm. Suma długości podstaw jest równa 34 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

3.16. W trapezie równoramiennym $ABCD$ wysokość DE i przekątna DB podzieliły odcinek KL łączący środki ramion na trzy odcinki mające długość: $|KM| = 1$ cm, $|MN| = 4$ cm, $|NL| = 3$ cm. Wiedząc, że przekątna DB ma długość 10 cm, oblicz długość boków trapezu.



3.17. W trapezie równoramiennym $ABCD$, $AB \| CD$, wysokość CE podzieliła dłuższą podstawę na odcinki mające długość: $|AE| = 15$ cm, $|EB| = 6$ cm. Długość przekątnej DB jest równa 17 cm.

a) Oblicz obwód tego trapezu.

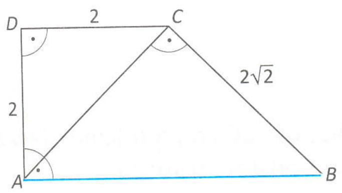
b) Jaką długość ma odcinek łączący środki ramion tego trapezu?

3.18. Różnica długości podstaw trapezu prostokątnego wynosi 5 cm, a dłuższe ramię ma długość 13 cm. Wiedząc, że wysokość trapezu i krótsza podstawa pozostają w stosunku 3 : 4, oblicz długość podstaw tego trapezu.

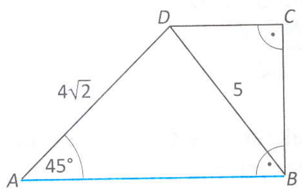
3.19. W trapezie prostokątnym suma długości krótszej podstawy i wysokości jest równa 17 cm, a suma długości dłuższej podstawy i dłuższego ramienia wynosi 29 cm. Wyznacz długości boków tego trapezu, wiedząc, że krótsza przekątna ma długość 13 cm.

3.20. Trapez $ABCD$ jest prostokątny. Na podstawie danych na rysunku poniżej oblicz długość dłuższej podstawy AB.

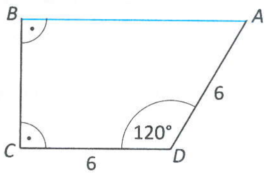
a)



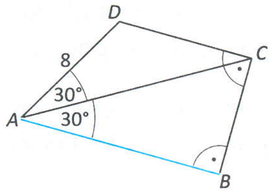
b)



c)



d)



3.21. W trapezie podstawy mają długość 28 cm i 7 cm, a ramiona 10 cm i 17 cm. Aby wyznaczyć wysokość tego trapezu, możemy postąpić tak:

- Prowadzimy wysokości h trapezu z kątów rozwartych. Spodki wysokości dzielą dłuższą podstawę na odcinki długości x cm, 7 cm oraz $(21 - x)$ cm. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w dwóch powstałych trójkątach prostokątnych, tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 100 \\ (21 - x)^2 + h^2 = 289 \end{cases}$$

Odejmując równania stronami, otrzymujemy równanie:

$$x^2 - (21 - x)^2 = -189$$

z którego wynika, że $x = 6$.

- W miejsce x do pierwszego równania układu wstawiamy liczbę 6 i obliczamy h:

$$6^2 + h^2 = 100$$
$$h^2 = 64$$
$$h = 8 \quad (\text{bo } h > 0)$$

Wysokość trapezu ma 8 cm.

Postępując podobnie, wyznacz wysokość trapezu, jeśli:

a) podstawy mają długość: 2 cm i 30 cm, a ramiona: 25 cm i 17 cm

b) obwód trapezu wynosi 72 cm, podstawy mają długość 30 cm i 9 cm, a jedno ramię jest dłuższe od drugiego o 7 cm.

3.22. Długości podstaw trapezu mają się do siebie jak 5 : 2, a ich różnica wynosi 9 cm. Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.

3.23. Kąty rozwarte trapezu mają 120° i 150°. Krótsza podstawa i krótsze ramię trapezu mają jednakową długość, równą 5 cm. Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu. Rozważ dwa przypadki.

3.24. W trapezie $ABCD$ punkty K, L są odpowiednio środkami ramion AD i BC. Odcinek KL przecina przekątną AC w punkcie M oraz przekątną DB w punkcie N. Wykaż, że:

a) $|AM| = |MC|$ oraz $|DN| = |NB|$

b) $|MN| = \dfrac{|AB| - |DC|}{2}$

3.25. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 10 cm, a odcinek łączący środki przekątnych ma długość 3 cm. Oblicz długości podstaw trapezu.

Równoległoboki

3.26. Oblicz miary kątów równoległoboku, w którym miara jednego z dwóch kolejnych kątów jest o $38°$ większa od miary drugiego kąta.

3.27. W równoległoboku $ABCD$ kąt przy wierzchołku D jest rozwarty. Z tego wierzchołka poprowadzono dwie wysokości równoległoboku. Wysokości te tworzą kąt o mierze $53°$. Oblicz miary kątów równoległoboku.

3.28. W równoległoboku $ABCD$ długość boku AB jest dwa razy większa od długości boku BC. Punkt M dzielący bok AB na połowy połączono z punktami C i D. Oblicz $|\sphericalangle CMD|$.

3.29. W rombie przekątne tworzą z jednym z boków kąty, których różnica miar wynosi $36°$. Oblicz miary kątów rombu.

3.30. W rombie symetralna boku przechodzi przez jeden z wierzchołków tego rombu. Oblicz miary kątów rombu.

3.31. Oblicz długość boku kwadratu, jeśli:
a) przekątna jest o 2 cm dłuższa od boku
b) odległość środka jednego boku od końców przeciwległego mu boku jest równa $3\sqrt{5}$ cm.

3.32. Dwusieczna kąta prostego C w trójkącie prostokątnym ABC przecina przeciwprostokątną w punkcie D. Równoległe do przyprostokątnych wykreślone przez punkt D wyznaczają na przyprostokątnych punkty M i N. Udowodnij, że czworokąt $CNDM$ jest kwadratem.

3.33. W prostokącie, którego obwód ma 44 cm, różnica odległości punktu przecięcia przekątnych od dwóch nierównych boków wynosi 8 cm. Oblicz długości boków prostokąta.

3.34. Obwód prostokąta jest równy 142 cm. Przekątna prostokąta jest o 1 cm dłuższa od dłuższego boku. Oblicz długości boków prostokąta.

3.35. Oblicz szerokość prostokątnej ramy obrazu, wiedząc, że obwód zewnętrzny ramy jest o 28 cm większy od obwodu wewnętrznego tej ramy.

3.36. W trójkącie równoramiennym dane są: długość podstawy $a = 12$ cm i wysokość $h = 18$ cm, poprowadzona na tę podstawę. W trójkąt ten wpisano prostokąt w taki sposób, że dwa wierzchołki prostokąta leżą na podstawie a, po jednym na każdym ramieniu trójkąta, a przekątne prostokąta są odpowiednio równoległe do ramion trójkąta. Oblicz długości boków prostokąta.

3.37. W prostokącie, który nie jest kwadratem, poprowadzono dwusieczne kątów:
a) wewnętrznych
b) zewnętrznych.
Udowodnij, że punkty przecięcia tych dwusiecznych są wierzchołkami kwadratu.

3.38. Kąt ostry rombu ma miarę 30°. Wysokość rombu ma 2 cm. Oblicz:
a) obwód rombu
b) długość krótszej przekątnej.

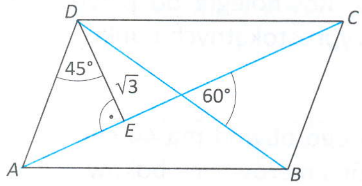
3.39. Krótsza przekątna rombu ma długość 12 cm, a bok jest o 2 cm dłuższy od połowy drugiej przekątnej. Oblicz długość boku rombu.

3.40. Bok rombu ma długość 41 cm. Wyznacz długości przekątnych tego rombu, wiedząc, że różnica ich długości jest równa 62 cm.

3.41. W równoległoboku o obwodzie 40 cm przekątne są dwusiecznymi kątów, a ich długości mają się do siebie jak 3 : 4. Oblicz długości tych przekątnych.

3.42. W równoległoboku $ABCD$ wysokość DE ma 8 cm i dzieli bok AB na odcinki długości: $|AE| = 4{,}5$ cm, $|EB| = 6$ cm. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.

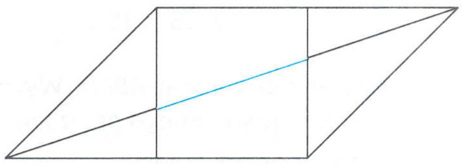
3.43. W równoległoboku $ABCD$ kąt przecięcia przekątnych AC i BD ma miarę 60°. Na dłuższej przekątnej AC zaznaczono punkt E w taki sposób, że odcinek DE jest prostopadły do przekątnej AC. Wiedząc, że $|DE| = \sqrt{3}$ oraz $|\sphericalangle ADE| = 45°$, oblicz długość przekątnych równoległoboku.



3.44. W równoległoboku $ABCD$ z wierzchołka D kąta rozwartego poprowadzono dwie różne wysokości DE i DF, przy czym $DE \perp AB$, $DF \perp BC$.
a) Wykaż, że trójkąty AED i FCD są podobne.
b) Wiedząc dodatkowo, że $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{4}{5}$, oblicz, o ile procent wysokość DF jest dłuższa od wysokości DE.

3.45. Wysokości równoległoboku, poprowadzone z wierzchołków kątów rozwartych na dłuższe boki, dzielą równoległobok na dwa trójkąty równoramienne i kwadrat.
a) Wykaż, że punkty przecięcia tych wysokości z dłuższą przekątną dzielą tę przekątną na trzy odcinki równej długości.

b) Wiedząc dodatkowo, że dłuższy bok równoległoboku ma długość 6 cm, oblicz długość odcinka przekątnej zawartego w kwadracie.



3.46. W trójkącie ABC prowadzimy dwusieczną kąta A i przez punkt D przecięcia dwusiecznej z bokiem BC prowadzimy równoległe do boków AC i AB, które przecinają te boki odpowiednio w punktach E i F. Wykaż, że czworokąt $AEDF$ jest rombem. Czy można uogólnić to twierdzenie na dwusieczne kątów zewnętrznych?

3.47. Wykaż, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Jaką figurę otrzymamy, łącząc kolejno środki boków:

a) równoległoboku
b) rombu
c) prostokąta
d) kwadratu?

3.48. W czworokącie $ABCD$ połączono środki boków i otrzymano czworokąt $EFGH$.

a) Jeżeli czworokąt $EFGH$ jest prostokątem, czy można twierdzić, że czworokąt $ABCD$ jest rombem?
b) Jeżeli czworokąt $EFGH$ jest rombem, czy można twierdzić, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem?
c) Jeżeli czworokąt $EFGH$ jest kwadratem, czy można twierdzić, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem?

Okrąg opisany na czworokącie

3.49. Czy kolejne kąty czworokąta wpisanego w okrąg mogą mieć następujące miary:

a) $72°, 72°, 108°, 108°$
b) $46°, 15°, 134°, 165°$
c) $58°, 81°, 123°, 98°$?

3.50. Czy czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg, jeżeli stosunek miar kątów przy wierzchołkach A, B, C, D wynosi odpowiednio:

a) $3 : 6 : 10 : 7$
b) $6 : 3 : 10 : 7$
c) $10 : 8 : 10 : 8$?

3.51. Wyznacz miary kątów czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg, wiedząc, że:

a) $|\sphericalangle B| = 2|\sphericalangle A|$ i $|\sphericalangle C| = 3|\sphericalangle A|$
b) $|\sphericalangle B| = \frac{1}{3}|\sphericalangle A|$ i $|\sphericalangle A| = 2|\sphericalangle C|$
c) $|\sphericalangle A| : |\sphericalangle B| : |\sphericalangle C| = 1 : 2 : 3$
d) $|\sphericalangle A| : |\sphericalangle B| : |\sphericalangle D| = 5 : 4 : 2.$

3.52. Wyznacz miary kątów czworokąta wpisanego w okrąg, wiedząc, że przedłużenia przeciwległych boków przecinają się, tworząc kąty:

a) 20° i 44° b) 25° i 35°.

3.53. W okrąg o środku O wpisano czworokąt $ABCD$. Wyznacz miary kątów tego czworokąta oraz miarę kąta ostrego utworzonego przez jego przekątne, jeśli:

a) $|\sphericalangle AOB| = 120^\circ$, $|\sphericalangle BOC| = 120^\circ$ i $|\sphericalangle COD| = 40^\circ$

b) $|\sphericalangle AOB| = 150^\circ$, $|\sphericalangle AOD| = 60^\circ$ i $|\sphericalangle COD| = 70^\circ$.

3.54. Oblicz długość boku kwadratu, wiedząc, że iloczyn długości promienia okręgu wpisanego w ten kwadrat i promienia okręgu opisanego na tym kwadracie (wyrażonych w tych samych jednostkach) jest równy $25\sqrt{2}$.

3.55. W prostokącie mniejszy bok ma długość 6 cm, a kąt ostry między przekątnymi ma miarę 30°. Jaka jest długość promienia okręgu opisanego na tym prostokącie?

3.56. W prostokącie $ABCD$ bok AB ma długość 10 cm. Odległość wierzchołka D od przekątnej AC jest równa 6 cm. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na prostokącie $ABCD$.

3.57. Na trapezie opisano okrąg o promieniu długości 25 cm. Dłuższa podstawa trapezu jest średnicą tego okręgu. Wiedząc, że przekątna trapezu ma długość 40 cm, oblicz obwód tego trapezu.

3.58. Na trapezie o podstawach długości 16 cm i 8 cm oraz wysokości 8 cm opisano okrąg; jego środek leży wewnątrz trapezu. Oblicz odległości środka okręgu od wszystkich boków tego trapezu.

3.59. Boki równoległoboku mają długość 6 cm i 10 cm, a kąt ostry ma miarę 60°. Z jednego wierzchołka kąta rozwartego poprowadzono dwie wysokości. Oblicz obwód czworokąta wyznaczonego przez spodki tych wysokości i przez wierzchołki kątów rozwartych. Wyznacz długość promienia okręgu opisanego na powstałym czworokącie.

Okrąg wpisany w czworokąt

3.60. Czy kolejne boki czworokąta opisanego na okręgu mogą mieć długość:

a) 11 cm, 7 cm, 4 cm, 8 cm

b) 8 cm, 6,5 cm, 10 cm, 10,5 cm

c) $9\frac{1}{3}$ cm, $3\frac{1}{3}$ cm, $11\frac{2}{3}$ cm, $5\frac{2}{3}$ cm?

3.61. Oblicz obwód czworokąta $ABCD$ opisanego na okręgu, mając dane:

a) $|AB| = 10$ cm, $|CD| = 11$ cm

b) $|AB| : |BC| : |CD| = 2 : 3 : 4$ oraz $|AD| = 15$ cm.

3.62. Długości trzech kolejnych boków czworokąta opisanego na okręgu mają się do siebie jak 1 : 2 : 3. Obwód tego czworokąta wynosi 48 cm. Oblicz długości jego boków.

3.63. W romb wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z bokiem dzieli bok na odcinki długości 4 cm i 9 cm. Oblicz długość przekątnych i wysokość rombu.

3.64. W romb o boku długości 10 cm i wysokości 8 cm wpisano okrąg o_1.

a) Oblicz, w jakiej odległości od środka boku znajduje się punkt styczności okręgu z tym bokiem.

b) Wykaż, że przez środki boków tego rombu można poprowadzić okrąg o_2 i wyznacz długość promienia tego okręgu.

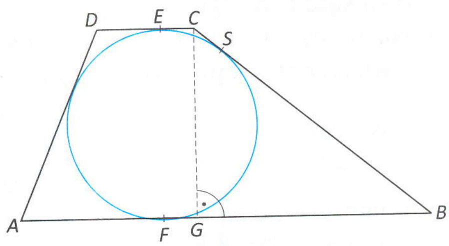
c) Korzystając z wyliczonych wielkości, narysuj ten romb wraz z okręgami o_1 i o_2 w skali 1 : 2.

3.65. W trapezie równoramiennym opisanym na okręgu ramiona mają po 6 cm długości, a jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz długości podstaw.

3.66. Na okręgu opisano trapez równoramienny. Kąt rozwarty trapezu ma miarę 150°, a odcinek łączący środki ramion ma 12 cm długości. Oblicz długość promienia okręgu.

3.67. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 8 cm. Wiedząc, że w ten trapez można wpisać okrąg, oblicz obwód trapezu.

3.68. W trapez $ABCD$ wpisano okrąg. Ramię BC trapezu zostało podzielone przez punkt styczności S na odcinki długości $|CS| = 1$ cm oraz $|BS| = 9$ cm. Obliczymy długość promienia okręgu w następujący sposób:



Niech E i F będą punktami styczności okręgu z podstawami trapezu, G będzie spodkiem wysokości trapezu poprowadzonej z wierzchołka C, r niech oznacza długość promienia okręgu wpisanego w ten trapez.

- Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|FB| = |BS|$ oraz $|EC| = |CS|$. Stąd $|FB| = 9$ cm, a $|EC| = 1$ cm. Ponieważ $|FG| = |EC| = 1$ cm, więc $|GB| = |FB| - |FG| = 8$ cm.

- Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta GBC, obliczamy długość wysokości CG:

$$|CG|^2 + |GB|^2 = |BC|^2$$
$$|CG|^2 + 8^2 = 10^2$$
$$|CG| = 6\ (\text{cm}) \quad (\text{bo } |CG| > 0)$$

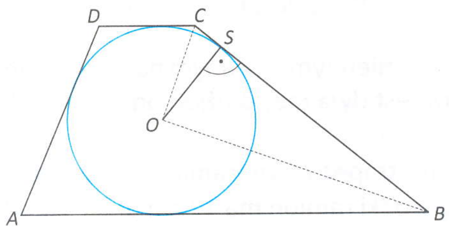
- Zauważamy, że $|CG| = 2r$.

$$6 = 2r$$
$$r = 3\ (\text{cm})$$

Promień okręgu wpisanego w dany trapez ma długość 3 cm.

Postępując podobnie, rozwiąż zadanie:
W trapez $ABCD$ wpisano okrąg o promieniu długości 12 cm. Ramię BC trapezu ma długość 25 cm. Jakie długości mają odcinki wyznaczone na ramieniu BC przez punkt styczności S?

3.69. W trapez $ABCD$ wpisano okrąg. Ramię BC trapezu zostało podzielone przez punkt styczności S na odcinki długości $|CS| = 1$ cm oraz $|BS| = 9$ cm. Obliczymy długość promienia okręgu, stosując następującą metodę:



- Prowadzimy promień OS, $OS \perp BC$. Trójkąt COB jest prostokątny, bo

$$|\sphericalangle OCB| + |\sphericalangle CBO| = \frac{1}{2}|\sphericalangle DCB| + \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| = \frac{1}{2}(|\sphericalangle DCB| + |\sphericalangle ABC|) = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°.$$

Promień OS jest wysokością w trójkącie prostokątnym OBC poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego.

- Na mocy twierdzenia o wysokości w trójkącie prostokątnym poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego otrzymujemy:

$$|OS|^2 = |CS| \cdot |BS|$$
$$|OS|^2 = 1 \cdot 9$$
$$|OS| = 3\ (\text{cm}) \quad (\text{bo } |OS| > 0)$$

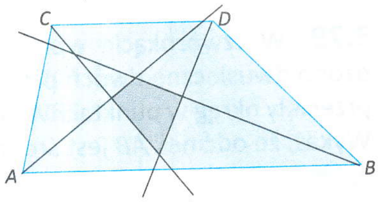
Promień okręgu wpisanego w dany trapez ma długość 3 cm.
Postępując podobnie, rozwiąż zadanie:
W trapez $ABCD$ wpisano okrąg. Punkty E i F są punktami styczności odpowiednio z podstawą AB i z podstawą DC. Wiedząc, że $|DF| = 5$ cm i $|AE| = 20$ cm, oblicz długość promienia tego okręgu.

3.70. W trapez prostokątny wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z dłuższym ramieniem dzieli to ramię na odcinki długości 6 cm i 24 cm. Oblicz obwód trapezu.

3.71. W trapez wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu z dłuższą podstawą trapezu dzieli tę podstawę na odcinki długości 2,5 dm i 4 dm. Wysokość trapezu ma długość 4 dm. Oblicz obwód tego trapezu.

Okrąg opisany na czworokącie, okrąg wpisany w czworokąt – zadania na dowodzenie

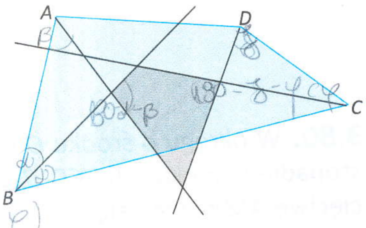
3.72. Wykaż, że jeśli dwusieczne kątów wewnętrznych trapezu *ABCD* wyznaczają czworokąt (zobacz rysunek obok), to można na nim opisać okrąg.



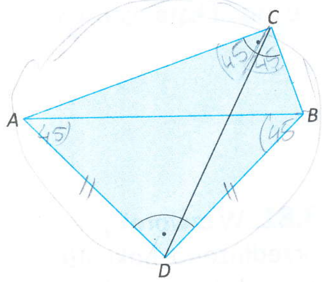
3.73. Wykaż, że jeśli w dowolnym czworokącie *ABCD* dwusieczne kątów wewnętrznych wyznaczają czworokąt (zobacz rysunek obok), to można na nim opisać okrąg.

$360-(\alpha+\beta+\gamma+\varphi)$

$180-(\alpha+\beta)+180-(\gamma+\varphi)$



3.74. Odcinek *AB* jest przeciwprostokątną w dwóch trójkątach prostokątnych *ACB* i *ADB*, przy czym trójkąt *ADB* jest równoramienny (zobacz rysunek obok). Wykaż, że odcinek *CD* zawiera się w dwusiecznej kąta prostego *ACB*.



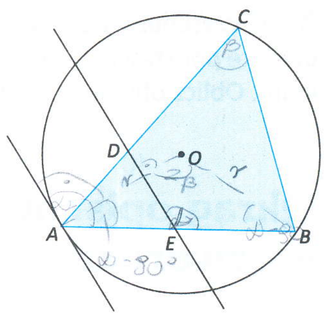
3.75. Wykaż, że jeśli czworokąt wpisany w okrąg ma jedną parę boków przeciwległych równej długości, to przekątne tego czworokąta mają taką samą długość.

3.76. Wielokąt o parzystej liczbie wierzchołków wpisano w okrąg i ponumerowano kolejno kąty tego wielokąta. Wykaż, że suma miar kątów o numerach parzystych równa się sumie miar kątów o numerach nieparzystych.

3.77. Wielokąt o parzystej liczbie boków opisano na okręgu i ponumerowano kolejno boki tego wielokąta. Wykaż, że suma długości boków o numerach parzystych jest równa sumie długości boków o numerach nieparzystych.

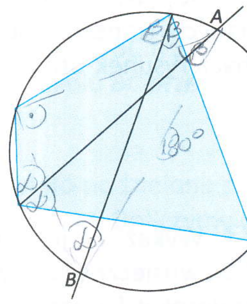
3.78. Trójkąt ABC wpisano w okrąg i przez punkt A poprowadzono styczną do okręgu. Następnie poprowadzono sieczną okręgu równoległą do stycznej, która przecięła boki AC i AB odpowiednio w punktach D i E (zobacz rysunek obok). Wykaż, że na $CDEB$ czworokącie można opisać okrąg.

$\alpha - 90 + \alpha - 90 + 2\beta = 180^\circ$
$\alpha + \beta = 180^\circ$



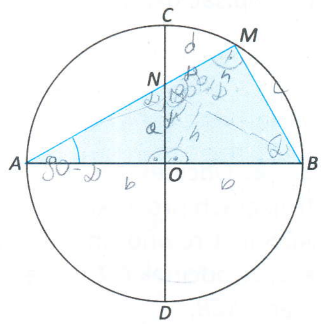
3.79. W czworokącie wpisanym w okrąg poprowadzono dwusieczne dwóch przeciwległych kątów, które przecięły okrąg w punktach A, B (zobacz rysunek obok). Wykaż, że odcinek AB jest średnicą tego okręgu.

$2\alpha + 2\beta = 180$
$\alpha + \beta = 80$

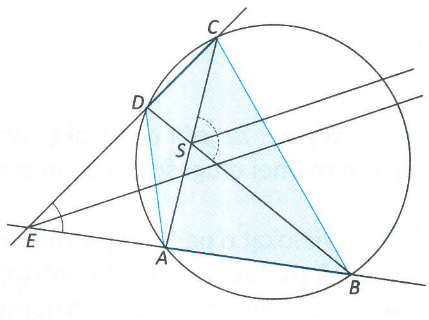


3.80. W okręgu o środku O poprowadzono dwie prostopadłe średnice AB i CD. Z punktu A poprowadzono cięciwę AM przecinającą średnicę CD w takim punkcie N, że w czworokąt $OBMN$ można wpisać okrąg. Wykaż, że miara kąta ostrego BAM jest równa 30°.

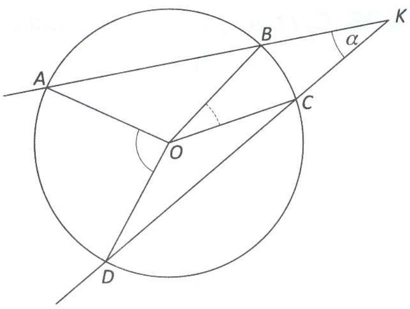
$a + c = b + d$



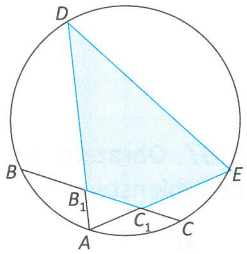
***3.81.** W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg przedłużono boki AB i CD aż do przecięcia w punkcie E. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S (zobacz rysunek obok). Wykaż, że dwusieczna kąta BEC jest równoległa do dwusiecznej kąta BSC.



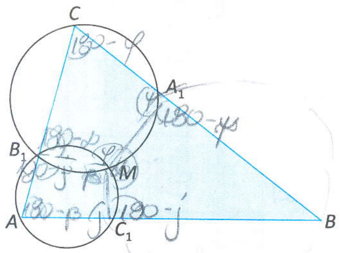
3.82. Sieczne AB i CD okręgu o środku O przecinają się w punkcie K (zobacz rysunek obok). Wykaż, że miara kąta α między tymi siecznymi równa się połowie różnicy miar kątów środkowych odpowiadających łukom AD i BC zawartym między tymi siecznymi.



3.83. W danym okręgu punkt A jest środkiem łuku BC i dwie dowolne cięciwy AD i AE przecinają cięciwę BC w punktach B_1 i C_1. Wykaż, że na czworokącie B_1C_1ED można opisać okrąg.



3.84. Na boku AB trójkąta ABC wybieramy dowolnie punkt C_1. Podobnie na boku BC wybieramy punkt A_1, a na boku AC wybieramy punkt B_1. Na trójkątach A_1B_1C i AB_1C_1 opisano okręgi, które przecięły się w punktach B_1 i M (zobacz rysunek obok). Wykaż, że do okręgu opisanego na trójkącie A_1BC_1 należy punkt M.



$\varphi + \beta + \alpha = 360°$

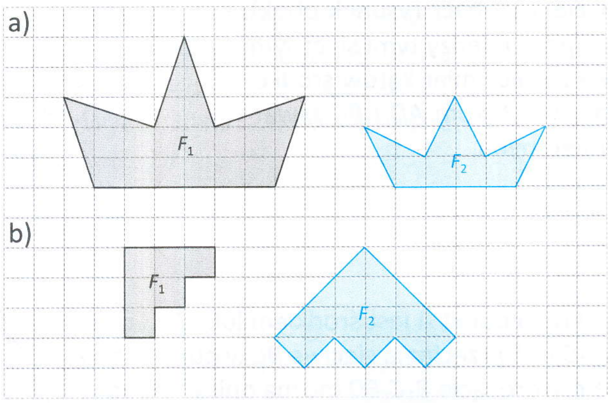
$180 - \alpha + 180 - \gamma = 180°$

Podobieństwo. Figury podobne

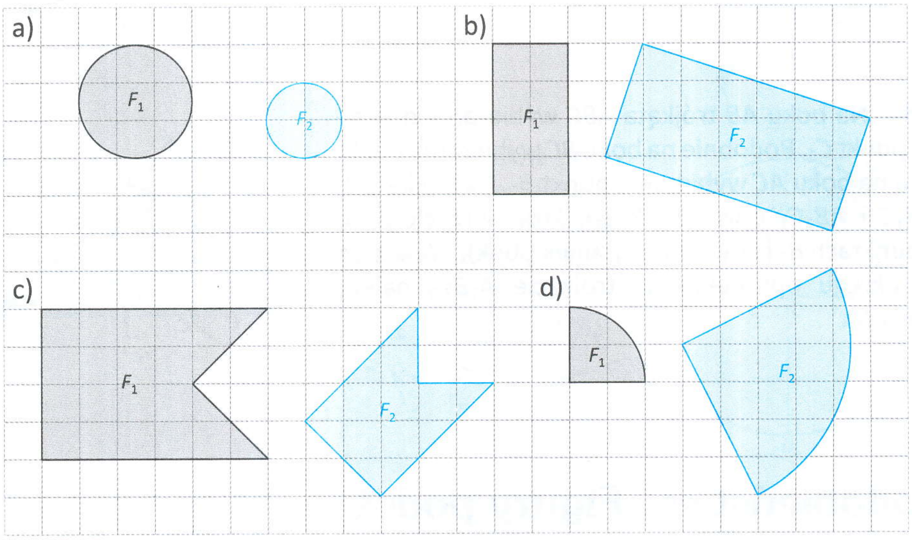
3.85. Czy podane figury są podobne? Odpowiedź uzasadnij.

a) dowolne dwa odcinki
b) dowolne dwie proste
c) dowolne dwa prostokąty
d) dowolne dwa kwadraty
e) dowolne dwa kąty ostre
f) dowolne dwa wycinki jednego koła

3.86. Czy figury F_1 i F_2 na rysunku poniżej są podobne? Odpowiedź uzasadnij.



3.87. Obrazem figury F_1 w pewnym podobieństwie jest figura F_2. Podaj skalę tego podobieństwa.



3.88. Obrazem okręgu o_1 o promieniu r_1 w pewnym podobieństwie jest okrąg o_2 o promieniu r_2. Wyznacz skalę tego podobieństwa, jeśli:

a) promień r_1 jest sześć razy dłuższy od promienia r_2

b) promień r_2 jest o 20% krótszy od promienia r_1

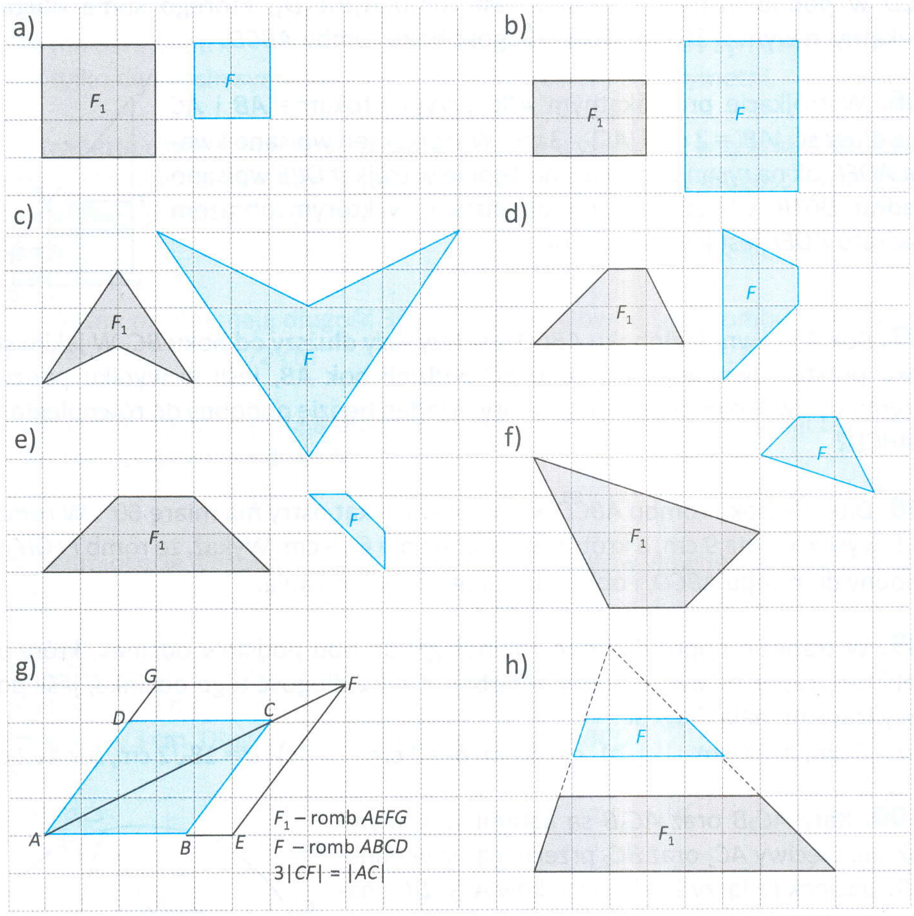
c) długość promienia r_1 stanowi 68% długości promienia r_2.

3.89. Obrazem półkola F w podobieństwie o skali $\frac{6}{5}$ jest półkole F_1, którego obwód wynosi 12 cm. Oblicz długość promienia półkola F.

3.90. Długości boków jednego pięciokąta mają się do siebie jak 2 : 5 : 1 : 3 : 4, a jego obwód jest równy 30 cm. Oblicz długość boków drugiego pięciokąta, będącego obrazem pierwszego w podobieństwie o skali $\frac{5}{2}$.

Podobieństwo czworokątów

3.91. Czy na rysunku poniżej czworokąt F_1 jest podobny do czworokąta F? Jeśli tak, podaj skalę tego podobieństwa.



3.92. Obrazem czworokąta $ABCD$ w podobieństwie o skali k ($k > 0$) jest czworokąt $A_1B_1C_1D_1$. O ile procent obwód czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ jest mniejszy od obwodu czworokąta $ABCD$, jeśli:

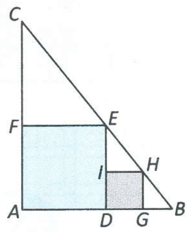
a) $k = \frac{1}{5}$ b) $k = \frac{17}{20}$ c) $k = \frac{3}{8}$?

3.93. W deltoidzie $ABCD$ mamy dane: $|AB| = 5$ cm i $|CD| = 13$ cm. Obrazem deltoidu $ABCD$ w podobieństwie o skali $\frac{1}{4}$ jest deltoid $A_1B_1C_1D_1$. Oblicz obwód czworokąta $A_1B_1C_1D_1$.

3.94. W prostokącie $ABCD$ długości boków pozostają w stosunku 3 : 4. Obrazem prostokąta $ABCD$ w podobieństwie o skali $\frac{2}{3}$ jest prostokąt, którego przekątna ma długość 7,5 cm. Oblicz różnicę obwodów tych prostokątów.

3.95. Jedna przekątna rombu $ABCD$ jest o 25 % krótsza od drugiej. Obrazem rombu $ABCD$ w podobieństwie o skali 2 jest romb $A_1B_1C_1D_1$, którego suma długości przekątnych wynosi 56 cm. Oblicz długość boku rombu $ABCD$.

3.96. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne AB i AC mają długość: $|AB| = 2$ cm i $|AC| = 3$ cm. W trójkąt ten wpisano kwadrat $ADEF$ jak na rysunku obok, a następnie w trójkąt DBE wpisano kwadrat $DGHI$. Oblicz skalę podobieństwa, w którym obrazem kwadratu $ADEF$ jest kwadrat $DGHI$.



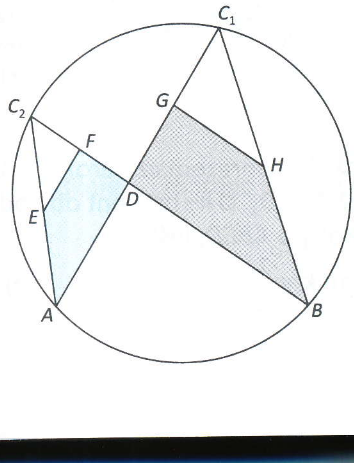
3.97. Bok AB równoległoboku $ABCD$ jest trzy razy dłuższy od boku BC. W jakim stosunku prosta równoległa do boku BC podzieli bok AB, jeśli w wyniku podziału otrzymamy dwa równoległoboki, z których jeden będzie podobny do równoległoboku $ABCD$?

3.98. Długość boku rombu $ABCD$ wynosi 4 cm, a kąt ostry ma miarę 60°. W rombie $EFGH$ wysokość ma 9 cm, a krótsza przekątna ma $6\sqrt{3}$ cm. Wykaż, że romb $EFGH$ jest podobny do rombu $ABCD$, i oblicz skalę tego podobieństwa.

3.99. W trapezie poprowadzono równoległy do obu podstaw odcinek, który podzielił ten trapez na dwa trapezy podobne. Oblicz długość tego odcinka, jeśli podstawy trapezu mają długość:

a) $a = 9$ cm, $b = 4$ cm   b) $a = 8$ cm, $b = 2$ cm   c) $a = 18\sqrt{2}$ cm, $b = 4\sqrt{2}$ cm

3.100. Kąty AC_2B oraz AC_1B są kątami wpisanymi w okrąg. Cięciwy AC_1 oraz BC_2 przecinają się w punkcie D. Odcinek EF łączy środki odcinków AC_2 i DC_2, natomiast odcinek GH łączy środki odcinków BC_1 oraz DC_1. Wykaż, że trapezy $ADFE$ i $DBHG$ są podobne.



Test sprawdzający do rozdziału 3.

1. Deltoid:
A. nie ma osi symetrii
B. ma tylko jedną oś symetrii
C. ma tylko dwie osie symetrii
D. ma cztery osie symetrii.

2. W pewnym czworokącie wypukłym przekątne są prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy. Zatem czworokąt ten jest:
A. rombem
B. deltoidem
C. prostokątem
D. trapezem.

3. Kwadrat:
A. nie ma osi symetrii
B. ma tylko jedną oś symetrii
C. ma tylko dwie osie symetrii
D. ma cztery osie symetrii.

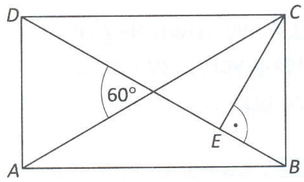
4. W trapezie równoramiennym poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta rozwartego, która podzieliła dłuższą podstawę na odcinki mające długość 7 cm i 23 cm. Zatem krótsza podstawa tego trapezu ma długość równą:
A. 15 cm
B. 16 cm
C. 23 cm
D. 7 cm.

5. Przekątne rombu mają długość 30 cm i 16 cm. Obwód tego rombu jest równy:
A. 76 cm
B. 72 cm
C. 68 cm
D. 46 cm.

6. W trapezie podstawy mają długość 12 cm i 2 cm. Zatem odcinek łączący środki ramion tego trapezu ma długość:
A. 7 cm
B. 10 cm
C. 10,5 cm
D. 11 cm.

7. W siedmiokącie wypukłym suma miar wszystkich kątów wewnętrznych jest równa:
A. 1260°
B. 1080°
C. 900°
D. 720°.

8. W prostokącie *ABCD* na rysunku obok kąt między przekątnymi ma miarę 60°, a wysokość *CE* trójkąta *DBC* jest równa $5\sqrt{3}$ cm. Długość przekątnej prostokąta *ABCD* wynosi:
A. 10 cm
B. 15 cm
C. $10\sqrt{3}$ cm
D. 20 cm.



9. W trapezie *ABCD*, $AB \parallel CD$, mamy zależność $|\sphericalangle D| = |\sphericalangle A| + 36°$. Zatem:
A. $|\sphericalangle A| = 79°$ i $|\sphericalangle D| = 101°$
B. $|\sphericalangle A| = 59°$ i $|\sphericalangle D| = 95°$
C. $|\sphericalangle A| = 62°$ i $|\sphericalangle D| = 98°$
D. $|\sphericalangle A| = 72°$ i $|\sphericalangle D| = 108°$.

10. Liczba przekątnych siedmiokąta wypukłego jest równa:
A. 9
B. 12
C. 14
D. 21.

11. W trapezie jedna z przekątnych zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego tego trapezu. Zatem:

A. każdy bok w tym trapezie ma inną długość
B. co najmniej dwa boki w tym trapezie mają taką samą długość
C. trzy boki w tym trapezie mają taką samą długość
D. trapez jest prostokątny.

12. W dziesięciokącie foremnym kąt wewnętrzny ma miarę:

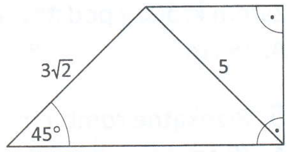
A. $144°$ B. $145°$ C. $147°$ D. $148°$.

13. W czworokącie wypukłym *ABCD* połączono kolejno środki boków i otrzymano prostokąt. Z tego wynika, że czworokąt *ABCD* jest:

A. prostokątem
B. kwadratem
C. rombem
D. czworokątem, w którym przekątne są prostopadłe.

14. Trapez na rysunku obok jest prostokątny. Dłuższa podstawa tego trapezu ma długość:

A. $3+4\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}+4$
C. 7 D. $\sqrt{43}$.



15. Z wierzchołka kąta rozwartego równoległoboku poprowadzono dwie różne wysokości, które utworzyły kąt o mierze $26°$. Kąt ostry równoległoboku ma miarę:

A. $26°$ B. $52°$ C. $64°$ D. $78°$.

16. W pewnym czworokącie wypukłym przekątne są jednocześnie dwusiecznymi kątów wewnętrznych. Zatem czworokąt ten jest:

A. deltoidem B. prostokątem C. rombem D. trapezem.

17. W równoległoboku poprowadzono dwusieczne dwóch kątów wewnętrznych leżących przy tym samym boku. Dwusieczne te przecięły się pod kątem:

A. $60°$ B. $70°$ C. $80°$ D. $90°$.

18. Kwadrat K_1 jest obrazem kwadratu K w podobieństwie o skali 1,25. Przekątna kwadratu K_1 ma długość 15 cm. Zatem długość boku kwadratu K jest równa:

A. $18{,}75\sqrt{2}$ cm B. $12\sqrt{2}$ cm C. $6\sqrt{2}$ cm D. 12 cm.

19. Czworokąt *ABCD* jest trapezem prostokątnym o podstawach *AB* i *DC*, przy czym $|AB| > |DC|$. Wówczas **fałszywe** jest zdanie:

A. Krótsze ramię trapezu jest wysokością trapezu.
B. Jeśli kąt *ABC* jest kątem ostrym o mierze α, to $|\sphericalangle BCD| = 90° + \alpha$.

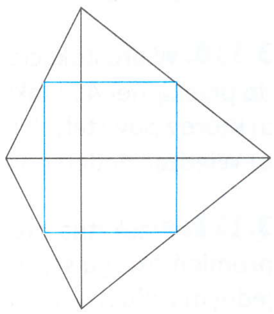
C. Punkt S przecięcia przekątnych dzieli przekątną DB w taki sposób, że $\frac{|DS|}{|SB|} = \frac{|DC|}{|AB|}$.

D. Jeśli punkt P jest punktem przecięcia prostych zawierających ramiona trapezu $ABCD$, to kąt APB jest ostry.

20. W kwadracie o boku 8 cm odcięto cztery naroża (cztery trójkąty prostokątne równoramienne) i otrzymano ośmiokąt foremny. Bok tego ośmiokąta ma długość:
A. $4(\sqrt{2} - 1)$ cm B. $8(\sqrt{2} - 1)$ cm C. $2(\sqrt{2} + 1)$ cm D. $4\sqrt{2}$ cm.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

3.101. Krótsza przekątna deltoidu zawiera się w jego osi symetrii. Druga przekątna jest o 2 cm dłuższa od krótszej przekątnej i dzieli krótszą przekątną w stosunku 2 : 5. W deltoidzie połączono środki kolejnych boków i powstał czworokąt o obwodzie 58 cm.
a) Wykaż, że powstały czworokąt jest prostokątem i oblicz stosunek długości jego boków.
b) Oblicz obwód deltoidu.



3.102. W równoległoboku, którego obwód jest równy 60 cm, stosunek wysokości wynosi 2 : 3. Oblicz długości boków tego równoległoboku.

3.103. Wysokość rombu jest równa 4,8 cm, a krótsza przekątna ma długość 6 cm. Oblicz:
a) długość dłuższej przekątnej
b) sinus kąta ostrego rombu.

3.104. W okrąg, którego promień ma długość 10 cm, wpisano prostokąt. Środki kolejnych boków prostokąta połączono odcinkami. Oblicz obwód otrzymanego czworokąta.

3.105. W trapezie równoramiennym podstawy mają długość 25 cm i 7 cm, a przekątna ma długość 20 cm. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych od obu podstaw.

3.106. W trapezie równoramiennym wysokość ma 16 cm, przekątne są do siebie prostopadłe, a ich punkt wspólny dzieli każdą z nich na odcinki, których stosunek wynosi 3 : 5. Oblicz obwód tego trapezu.

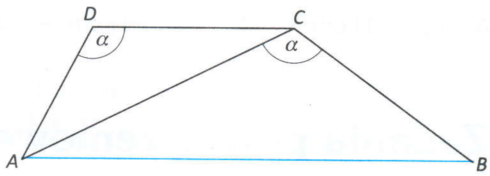
3.107. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 134 cm. Wysokość trapezu wynosi 30 cm, a ramię jest dwa razy dłuższe od krótszej podstawy. Oblicz długości boków tego trapezu.

3.108. W trapezie prostokątnym $ABCD$, w którym $AB \perp AD$ i $|AB| = 12$ cm oraz $|AD| = |CD| = 4$ cm, przedłużono boki AD i BC do przecięcia w punkcie E. Oblicz obwód trójkąta CDE.

3.109. W trapezie $ABCD$ trzy boki mają długość: $|AD| = 6$ cm, $|DC| = 8$ cm, $|BC| = 9$ cm. Ponadto $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ACB|$.

a) Wykaż, że trójkąty ACD i BCA są podobne.

b) Oblicz długość boku AB.



3.110. W prostokącie $ABCD$ poprowadzono przekątną AC. Odcinek DE prostopadły do przekątnej AC i taki, że $E \in AB$, przecina się z przekątną AC w punkcie F.

a) Które z powstałych trójkątów są podobne do trójkąta ACD? Odpowiedź uzasadnij.

b) Wiedząc dodatkowo, że $|DF| = 12$ cm, $|EF| = 3$ cm, oblicz długość przekątnej AC.

3.111. Przekątna prostokąta ma długość 25 cm, a dłuższy bok – 20 cm. Wyznacz promień okręgu stycznego do obu przekątnych prostokąta, którego środek leży na jednym z dłuższych boków tego prostokąta.

3.112. Boki równoległoboku mają długość 1 dm i 2 dm. Wyznacz długości przekątnych, jeśli kąt ostry tego równoległoboku jest równy:

a) $60°$ b) $45°$ c) $30°$

3.113. W trapezie równoramiennym ramię ma długość 7 cm, zaś przekątna trapezu ma długość 13 cm. Wiedząc, że kąt ostry trapezu jest równy $60°$, oblicz długości podstaw tego trapezu.

3.114. Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne BMC i CND leżące na zewnątrz równoległoboku. Wykaż, że trójkąt AMN jest równoboczny.

3.115. Udowodnij, że środki kwadratów zbudowanych na bokach równoległoboku i leżących na zewnątrz tego równoległoboku są wierzchołkami nowego kwadratu.

3.116. W sześciokącie foremnym poprowadzono sześć przekątnych równej długości.

a) Wykaż, że punkty przecięcia tych przekątnych są wierzchołkami sześciokąta foremnego.

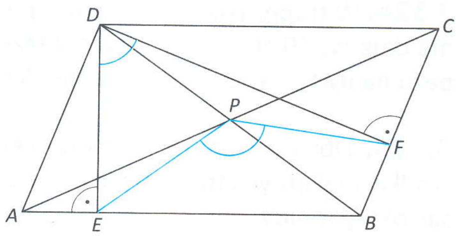
b) Oblicz stosunek obwodów obu sześciokątów foremnych.

3.117. W równoległoboku $ABCD$ na rysunku obok odcinki DE i DF są wysokościami poprowadzonymi z wierzchołka D. Kąt ostry równoległoboku ma miarę α. Wykaż, że:

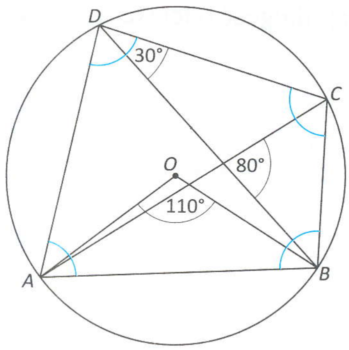
a) na czworokącie $DEBF$ można opisać okrąg

b) $|\sphericalangle EDF| = \alpha$

c) jeśli P jest punktem przecięcia przekątnych AC i BD, to $|\sphericalangle EPF| = 2\alpha$.



3.118. Na rysunku obok punkt O jest środkiem okręgu. Przekątne DB i AC czworokąta $ABCD$ przecinają się pod kątem ostrym o mierze $80°$. Wiedząc, że $|\sphericalangle AOB| = 110°$ oraz $|\sphericalangle BDC| = 30°$, oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$.



3.119. Wykaż, że jeśli bok ośmiokąta foremnego ma długość a, to promień okręgu opisanego na tym ośmiokącie jest równy $\frac{a}{2}\sqrt{4+\sqrt{8}}$.

3.120. Różnica między długością dłuższej i krótszej przekątnej sześciokąta foremnego wynosi 2 cm. Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten sześciokąt. Wynik podaj w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi i $c > 0$.

3.121. Kąt ostry rombu ma miarę $60°$, a długość promienia okręgu wpisanego w ten romb wynosi $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz:

a) długość przekątnych rombu

b) długość odcinków, na jakie punkt styczności okręgu z rombem dzieli bok tego rombu.

3.122. Na okręgu opisano trapez, którego obwód wynosi 52 cm. Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu.

3.123. W dany trapez można wpisać okrąg i na danym trapezie można opisać okrąg. Wysokość tego trapezu poprowadzona z wierzchołka przy krótszej podstawie dzieli dłuższą podstawę na dwa odcinki. Dłuższy odcinek ma długość 10 cm. Oblicz obwód tego trapezu.

3.124. W trapez równoramienny wpisano okrąg o promieniu 4 cm. Ramię trapezu ma długość 10 cm. Punkty styczności okręgu z ramionami trapezu dzielą brzeg trapezu na dwie części. Oblicz długość każdej części.

3.125. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 30 cm, a odcinek łączący środki przekątnych trapezu ma długość 1,5 cm. Wiedząc, że w ten trapez można wpisać okrąg, oblicz:

a) długości podstaw trapezu
b) długość średnicy okręgu wpisanego w ten trapez
c) długość odcinka łączącego punkty styczności ramion z tym okręgiem.