4. Geometria płaska – pole czworokąta

Pole prostokąta. Pole kwadratu

4.1. Pole pierścienia wyznaczonego przez okrąg wpisany w kwadrat i okrąg opisany na tym kwadracie jest równe π dm^2. Oblicz pole kwadratu.

4.2. W kwadrat $ABCD$ wpisano kwadrat $A_1B_1C_1D_1$ w taki sposób, że do każdego boku kwadratu $ABCD$ należy jeden wierzchołek kwadratu $A_1B_1C_1D_1$. Wyznacz stosunek pól tych kwadratów, jeśli boki kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ tworzą z bokami kwadratu $ABCD$:

a) kąt 45°

b) kąty odpowiednio 30° i 60°.

4.3. Oblicz długości boków dwóch kwadratów, wiedząc, że są one liczbami naturalnymi oraz że różnica pól tych kwadratów jest równa:

a) 5

b) 21

4.4. Przekątne prostokąta dzielą go na cztery trójkąty. Oblicz pole prostokąta, jeśli pole jednego z trójkątów rozwartokątnych jest:

a) równe 1

b) o 9 mniejsze od pola prostokąta.

4.5. Oblicz pole prostokąta, którego przekątne długości 10 cm przecinają się pod kątem

a) 60°

b) 45°

c) 30°

4.6. Pole prostokąta jest równe 9 cm^2, a średnica okręgu opisanego na tym prostokącie ma długość 6 cm. Oblicz miarę kąta ostrego między przekątnymi prostokąta.

4.7. W prostokącie $ABCD$ poprowadzono przekątną AC. Odcinek DE jest wysokością trójkąta ACD, a punkt E dzieli przekątną prostokąta na odcinki długości 3 cm i 12 cm. Oblicz:

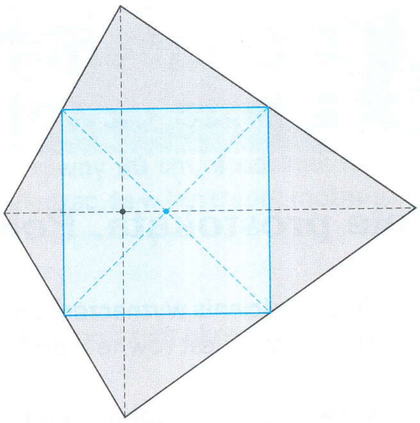
a) pole prostokąta $ABCD$

b) obwód trójkąta ACD.

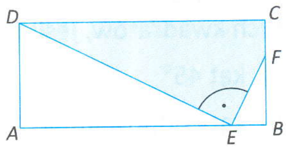
4.8. Z kawałka kartonu w kształcie deltoidu wycięto kwadrat o polu 1,44 m^2, którego wierzchołkami są środki boków deltoidu. Wiedząc, że punkt przecięcia przekątnych deltoidu leżał w odległości 20 cm od punktu przecięcia się przekątnych kwadratu (rysunek obok), oblicz:

a) pole powierzchni pozostałych skrawków kartonu

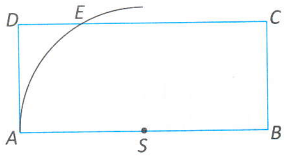
b) obwód deltoidu; wynik podaj z dokładnością do 0,01 m.



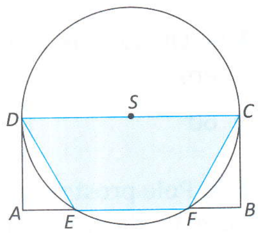
4.9. Dwa sąsiednie boki prostokąta $ABCD$ mają długość: $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 3$ cm. Z punktu D poprowadzono prostą, która przecięła bok AB w punkcie E, a następnie prostą prostopadłą do prostej DE, która przechodzi przez punkt E i przecina bok BC w punkcie F (zobacz rysunek obok). Wiedząc, że $|DE| = 3|EF|$, oblicz pole czworokąta $DEFC$.



4.10. W prostokącie $ABCD$ punkt S jest środkiem boku AB, $|AB| > 2|BC|$. Poprowadzono łuk okręgu o środku w punkcie S i promieniu $|AS|$, który przeciął bok DC w punkcie E (zobacz rysunek obok). Wykaż, że kwadrat o boku AD ma takie samo pole jak prostokąt, którego boki mają długość $|DE|$ i $|EC|$.



4.11. Boki prostokąta $ABCD$ mają długość: $|AB| = 10$ cm, $|AD| = 4$ cm. Punkt S jest środkiem odcinka DC. Okrąg o środku w punkcie S i promieniu 5 przecina bok AB w punktach E i F (zobacz rysunek obok). Oblicz pole czworokąta $EFCD$.



Pole równoległoboku. Pole rombu

4.12. Boki równoległoboku mają długość 12 cm i 9 cm, a jedna z wysokości ma długość 4 cm. Oblicz długość drugiej wysokości równoległoboku. Rozważ dwa przypadki.

4.13. W równoległoboku $ABCD$ krótsza przekątna DB ma długość 20 cm. Wysokość trójkąta ACD poprowadzona z wierzchołka D dzieli odcinek AC na odcinki mające długość 9 cm i 25 cm. Oblicz:
a) obwód równoległoboku
b) pole równoległoboku.

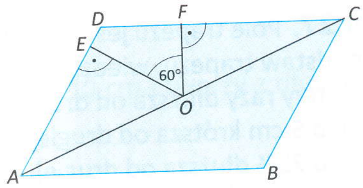
4.14. W równoległoboku $ABCD$, $|\sphericalangle ADC| > 90°$, poprowadzono wysokość DE mającą długość 6 cm i wysokość DF mającą długość $2\sqrt{21}$ cm ($F \in BC$). Przekątna DB równoległoboku ma długość 10 cm. Oblicz:
a) obwód i pole czworokąta $EBFD$ *b) obwód i pole równoległoboku $ABCD$.

4.15. Obwód równoległoboku jest równy 35 cm, a odległość punktu przecięcia przekątnych od dwóch sąsiednich boków równoległoboku jest odpowiednio równa 3 cm i 4 cm. Oblicz pole równoległoboku.

4.16. W równoległoboku $ABCD$ poprowadzono przekątną DB oraz odcinek AM, gdzie M jest środkiem boku DC. Proste DB i AM przecinają się w punkcie P. Oblicz, jaką część pola równoległoboku $ABCD$ stanowi pole czworokąta $ABCP$.

4.17. Rozpatrujemy równoległoboki, których obwód jest równy 16 cm, a kąt ostry ma miarę 45°.
a) Wyznacz długości boków równoległoboku, którego pole jest równe $6\sqrt{2}$ cm^2.
b) Wyznacz długości boków równoległoboku, który ma największe pole. Oblicz to największe pole.

4.18. Punkt O jest środkiem przekątnej AC równoległoboku $ABCD$. Punkt E należy do boku AD, punkt F należy do boku DC oraz $|\sphericalangle AEO| = |\sphericalangle OFC| = 90°$ (zobacz rysunek obok). Wiedząc, że $|FO| = 3$ cm, $|EO| = 4{,}5$ cm oraz $|\sphericalangle EOF| = 60°$, oblicz pole równoległoboku $ABCD$.



4.19. Przekątne równoległoboku mające długość 24 cm i 10 cm są jednocześnie dwusiecznymi jego kątów. Oblicz pole i obwód równoległoboku.

4.20. Pole rombu, którego kąt rozwarty ma miarę trzy razy większą od miary kąta ostrego, wynosi 16 cm^2. Oblicz długość boku rombu.

4.21. Przekątne rombu mają długość 10 cm i 24 cm. Oblicz sinus kąta ostrego tego rombu i na tej podstawie ustal, czy kąt ostry rombu ma miarę większą czy mniejszą od 45°.

4.22. W rombie o polu 4,80 dm^2 poprowadzono odcinek mający długość 2,4 dm, który łączy środki sąsiednich boków rombu przy kącie rozwartym. Oblicz:
a) długość przekątnych rombu
b) obwód rombu
c) wysokość rombu
d) pole trójkąta wyciętego z rombu przez dany odcinek.

4.23. Oblicz pole rombu, którego bok ma długość 6 cm, a suma długości przekątnych jest równa 16 cm.

4.24. Pole rombu jest równe 156 cm^2. Wysokość rombu ma długość 12 cm. Oblicz sumę długości jego przekątnych.

4.25. Kąt ostry rombu ma miarę 30°, a suma długości jego przekątnych jest równa 20 cm. Wiedząc, że $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$, oblicz pole tego rombu.

Pole trapezu

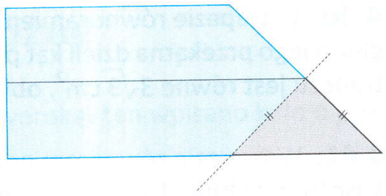
4.26. Oblicz pole trapezu, mając dane długości podstaw a, b i długości ramion c, d.
a) $a = 15$ cm, $b = 9$ cm, $c = d = 5$ cm
b) $a = 44$ cm, $b = 16$ cm, $c = 17$ cm, $d = 25$ cm
c) $a = 11$ cm, $b = 6$ cm, $c = 12$ cm, $d = 13$ cm
d) $a = 28$ cm, $b = 7$ cm, $c = 17$ cm, $d = 10$ cm

4.27. Pole trapezu jest równe 54 cm^2, a wysokość ma długość 9 cm. Oblicz długości podstaw trapezu, wiedząc, że jedna z nich jest:
a) trzy razy dłuższa od drugiej
b) o 5 cm krótsza od drugiej
c) o 25% dłuższa od drugiej.

4.28. W trapezie, którego podstawy mają długość 10 cm i 4 cm, miary kątów przy dłuższej podstawie wynoszą 45° i 30°. Oblicz pole tego trapezu.

4.29. Krótsza podstawa trapezu ma długość $3\sqrt{6}$ cm. Kąty przy tej podstawie mają miary 135° i 60°, a dłuższe ramię ma długość 18 cm. Oblicz pole tego trapezu.

4.30. W trapezie $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość $4\sqrt{5}$ cm, a ramię AD ma długość 4 cm. Odległość wierzchołka C od przekątnej DB jest równa 3 cm. Wiedząc, że $|\sphericalangle ADB| = 90°$, oblicz:
a) pole trapezu
b) wysokość trapezu
c) długość krótszej podstawy.

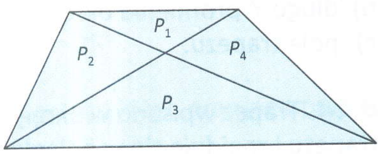


4.31. Drużyna harcerska miała do dyspozycji kawałek materiału w kształcie trapezu prostokątnego. Materiał ten przeznaczono na chorągiewkę. W tym celu złożono materiał wzdłuż linii łączącej środki ramion trapezu; miała ona długość 0,9 m. Potem odcięto skrawek w kształcie trójkąta równoramiennego, wyznaczony przez złożenie materiału (jak na rysunku obok). Trójkątny ścinek miał pole 600 cm^2, a jego podstawa miała długość 0,4 m. Oblicz:
a) obwód chorągiewki z dokładnością do 0,01 m
b) pole chorągiewki.

4.32. W trapezie *ABCD*, $AB \parallel CD$, przekątne przecinają się w punkcie *P*. Wykaż, że pola trójkątów *APD* i *BPC* są równe.

4.33. W trapezie *ABCD* ($AB \parallel DC$) przekątne przecinają się w punkcie *E*. Pole trójkąta *AED* jest równe 15 cm^2, a pole trójkąta *DEC* wynosi 10 cm^2. Oblicz:

a) $|EC| : |AE|$ b) pole trapezu *ABCD*.



4.34. Przekątne trapezu podzieliły trapez na cztery trójkąty. Niech P_1, P_2, P_3, P_4 oznaczają pola tych trójkątów. Oblicz pole trapezu, wiedząc, że:
a) $P_1 = 14$, $P_2 = 35$ b) $P_3 = 7$, $P_4 = 3$

4.35. W trapezie równoramiennym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego podzieliła dłuższą podstawę na odcinki, z których dłuższy ma 8 cm długości. Wiedząc, że wysokość ma 7 cm, oblicz pole tego trapezu.

4.36. Przekątna trapezu równoramiennego ma długość 10 cm i tworzy z dłuższą podstawą kąt o mierze 45°. Oblicz pole tego trapezu.

4.37. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 38 cm, a ramię ma długość 5 cm. Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli dłuższą podstawę na odcinki, z których jeden jest o 10 cm krótszy od drugiego. Oblicz:
a) długości podstaw trapezu b) pole trapezu.

4.38. W trapezie równoramiennym *ABCD* wysokość *DE* ma taką samą długość jak krótsza podstawa *DC* i dzieli dłuższą podstawę *AB* na odcinki w stosunku 1 : 2.
a) Oblicz miary kątów trapezu.
b) Wiedząc, że pole trapezu jest równe 162 cm^2, oblicz $|AB|$ i $|DC|$.

4.39. W trapezie równoramiennym, którego ramię ma długość 12 cm, kąt ostry ma miarę dwa razy mniejszą od kąta rozwartego trapezu. Wiedząc, że przekątna jest prostopadła do ramienia, oblicz pole trapezu.

4.40. W trapezie równoramiennym jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej, a jego przekątna dzieli kąt przy dłuższej podstawie na połowy. Wiedząc, że pole trapezu jest równe $3\sqrt{3}$ cm^2, oblicz długości boków tego trapezu.

4.41. W trapezie równoramiennym dłuższa podstawa ma długość 15 cm, a wysokość 9 cm. Odcinek łączący środki przekątnych trapezu ma 4 cm długości. Oblicz pole tego trapezu.

4.42. Rozpatrujemy trapezy równoramienne, w których jedna z podstaw jest 3 razy dłuższa od drugiej oraz suma długości podstaw i wysokości trapezu jest równa 24 cm.

a) Wyznacz długości boków trapezu, wiedząc, że jego pole jest równe 64 cm^2.
b) Wyznacz długości boków trapezu, który ma największe pole. Oblicz to pole.

4.43. Dłuższa podstawa trapezu jest średnicą okręgu opisanego na tym trapezie. Przekątna trapezu ma długość $6\frac{2}{3}$ cm, a ramię 5 cm. Oblicz:

a) długość wysokości trapezu
b) długość promienia okręgu
c) pole trapezu.

4.44. Trapez wpisano w okrąg o promieniu długości 5 cm. Środek okręgu należy do trapezu i znajduje się w odległości 4 cm od krótszej podstawy oraz 3 cm od dłuższej podstawy. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

4.45. Trapez, na którym można opisać okrąg i w który można wpisać okrąg, ma podstawy długości 12 cm i 3 cm. Oblicz pole tego trapezu.

4.46. Na okręgu, którego długość promienia wynosi 2 cm, opisano trapez równoramienny o polu 20 cm^2. Oblicz długości boków trapezu.

4.47. Pole trapezu równoramiennego jest równe 156, a jego ramię ma długość 13. W trapez wpisano koło. Oblicz pole tego koła.

4.48. Na okręgu o promieniu długości 5 cm opisano trapez prostokątny, którego najkrótszy bok ma długość 7,5 cm. Oblicz pole tego trapezu.

4.49. Na okręgu opisano trapez prostokątny. Odległości środka okręgu od końców dłuższego ramienia wynoszą 3 cm i 7 cm. Oblicz pole trapezu.

4.50. Na okręgu opisano trapez, którego pole jest równe 100 cm^2. Ramiona trapezu tworzą z dłuższą podstawą kąty o miarach $30°$ i $45°$. Oblicz długość promienia okręgu.

Pole czworokąta – zadania różne

4.51. Obwód czworokąta jest równy 54 cm. W czworokąt ten wpisano koło o promieniu 4 cm. Oblicz pole danego czworokąta.

4.52. Pole trapezu jest równe 72 cm^2, zaś pole koła wpisanego w ten trapez wynosi 16π cm. Oblicz długość ramion trapezu w przypadku, gdy trapez jest:

a) równoramienny
b) prostokątny.

4.53. Dane są długości d_1 i d_2 przekątnych czworokąta wypukłego oraz miara kąta między tymi przekątnymi. Oblicz pole czworokąta, jeśli:

a) $d_1 = 10$, $d_2 = 6$, $\alpha = 30^\circ$
b) $d_1 = 8\sqrt{3}$, $d_2 = 4$, $\alpha = 60^\circ$
c) $d_1 = 21$, $d_2 = 6\frac{2}{3}$, $\alpha = 120^\circ$
d) $d_1 = 12$, $d_2 = 5\sqrt{2}$, $\alpha = 135^\circ$

4.54. W czworokącie wypukłym przekątne mają długość 12 cm oraz 15 cm i tworzą z jednym z boków kąty miary odpowiednio α i β. Oblicz pole tego czworokąta, jeśli:

a) $\alpha = 70^\circ, \beta = 80^\circ$
b) $\alpha = 35^\circ, \beta = 25^\circ$

4.55. Dane są długości d_1 i d_2 przekątnych czworokąta wypukłego oraz jego pole P. Oblicz miarę kąta przecięcia przekątnych, jeśli:

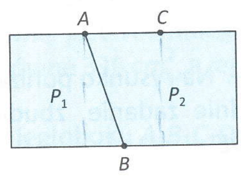
a) $P = 20$ cm^2, $d_1 = 8$ cm, $d_2 = 10$ cm
b) $P = 3$ m^2, $d_1 = \sqrt{6}$ m, $d_2 = \sqrt{8}$ m
c) $P = 5\sqrt{2}$ dm^2, $d_1 = d_2 = 2\sqrt{5}$ dm
d) $P = 60$ cm^2, $d_1 = 1$ dm, $d_2 = 0{,}12$ m

4.56. W czworokącie wypukłym suma długości przekątnych jest równa 20 cm, a kąt ostry między przekątnymi ma miarę 45°. Wyznacz długości przekątnych, dla których pole tego czworokąta jest największe z możliwych.

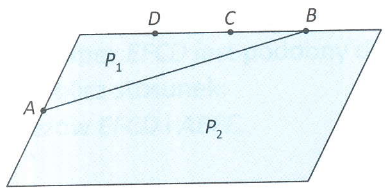
4.57. Rozpatrujemy czworokąty, których przekątne przecinają się pod kątem 60°. Suma długości przekątnych każdego czworokąta jest równa 52 cm. Ile jest równe największe pole takiego czworokąta?

4.58. Oblicz stosunek pól $P_1 : P_2$ figur, na które odcinek AB dzieli dany:

a) prostokąt, jeśli punkty A, C wyznaczają na jednym boku trzy równe odcinki, a punkt B jest środkiem przeciwległego boku



b) równoległobok, jeśli A jest środkiem krótszego boku, a punkty B, C, D wyznaczają na dłuższym boku cztery równe odcinki.

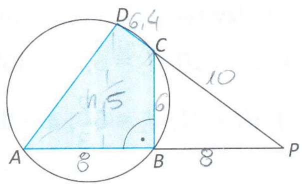


4.59. W czworokącie połączono kolejno środki boków. Wykaż, że powstały w ten sposób równoległobok ma pole dwa razy mniejsze od pola danego czworokąta.

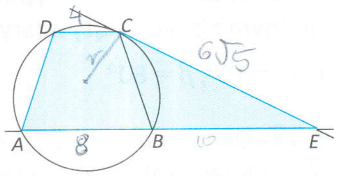
4.60. Oblicz pole czworokąta, wiedząc, że środki kolejnych boków tego czworokąta tworzą:

a) prostokąt o obwodzie 20 cm, którego jeden z boków jest o 3 cm dłuższy od drugiego
b) romb, którego krótsza przekątna ma długość 17 cm, a wysokość ma długość 8 cm
c) równoległobok, którego boki mają długość 12 cm i 7 cm, a kąt rozwarty ma miarę 150°.

4.61. Na czworokącie *ABCD* opisano okrąg. Prosta *DC* przecina prostą *AB* w punkcie *P* (zobacz rysunek obok), przy czym $|AB| = |BP| = 8$ cm. Wiedząc, że $|\sphericalangle ABC| = 90°$ oraz $|BC| = 6$ cm, oblicz pole czworokąta *ABCD*.

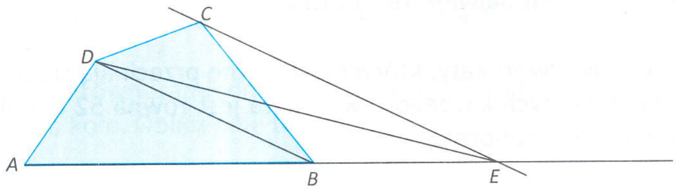


4.62. Podstawy trapezu równoramiennego *ABCD* mają długość: $|AB| = 8$ cm, $|DC| = 4$ cm. Na tym trapezie opisano okrąg. Styczna do okręgu w punkcie *C* przecina prostą *AB* w punkcie *E* (zobacz rysunek obok). Wiadomo, że $|CE| = 6\sqrt{5}$ cm oraz pole trapezu *ABCD* jest o 6 cm^2 większe od pola trójkąta *BEC*. Wyznacz promień okręgu opisanego na trapezie *ABCD*.

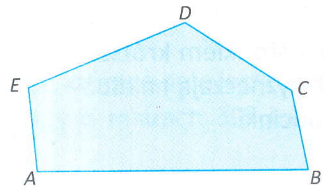


$P_{ABCD} = P_{BEC} + 6$

4.63. Na rysunku poniżej przedstawiony jest czworokąt *ABCD*. Przez wierzchołek *C* poprowadzono prostą równoległą do prostej *DB*, która przecięła prostą *AB* w punkcie *E*. Wykaż, że pole czworokąta *ABCD* jest równe polu trójkąta *AED*.



4.64. Na rysunku poniżej przedstawiony jest pięciokąt *ABCDE*. Wykorzystując poprzednie zadanie, zbuduj czworokąt, którego pole jest równe polu pięciokąta *ABCDE*.



Pola figur podobnych

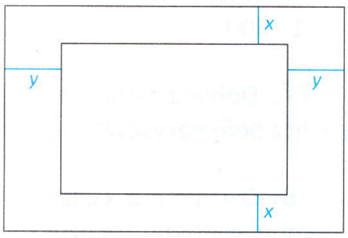
4.65. Obrazem figury F w podobieństwie o skali 0,2 jest figura F_1. Wiedząc, że pole figury F_1 jest o 72 cm^2 mniejsze od pola figury F, oblicz pola figur F_1 i F.

4.66. Figura F_1 jest podobna do figury F w skali 1,5. Oblicz pola tych figur, wiedząc, że różnica tych pól wynosi 85 cm^2.

4.67. Figura F_1 jest podobna do figury F w skali k. Oblicz k, jeśli:
a) pole figury F_1 stanowi 144% pola figury F
b) pole figury F_1 jest o 21% większe od pola figury F
c) pole figury F_1 jest o 36% mniejsze od pola figury F
d) pole figury F stanowi 56,25% pola figury F_1.

4.68. Figury F_1 i F są podobne. O ile procent pole figury F_1 jest mniejsze od pola figury F, jeśli:
a) obwód figury F_1 stanowi $\frac{3}{4}$ obwodu figury F
b) obwód figury F_1 jest o 20% mniejszy od obwodu figury F
c) obwód figury F stanowi $\frac{5}{3}$ obwodu figury F_1
d) obwód figury F jest o 40% większy od obwodu figury F_1.

4.69. Do zdjęcia o wymiarach 15 cm na 10 cm zakupiono antyramę o powierzchni większej niż powierzchnia zdjęcia. Zdjęcie i brzeg ramy wyznaczają dwa prostokąty, z których jeden jest podobny do drugiego w skali 1,4. Zdjęcie umieszczono w centralnym miejscu antyramy, a jego boki są równoległe do krawędzi antyramy. Oblicz:



a) odległość x i y zdjęcia od krawędzi antyramy
b) jaki procent pola zdjęcia stanowi pole widocznego tła.

4.70. W równoległoboku $ABCD$ nierównoległe boki mają długość 7 cm i 8 cm. Obrazem równoległoboku $ABCD$ w pewnym podobieństwie jest równoległobok $A_1B_1C_1D_1$. Wiedząc, że pole równoległoboku $A_1B_1C_1D_1$ jest równe 336 cm^2, a jego kąt rozwarty ma miarę 150°, oblicz:
a) skalę tego podobieństwa
b) obwód równoległoboku $A_1B_1C_1D_1$.

4.71. W trapezie $ABCD$ odcinki AB i DC są podstawami. Na ramieniu AD zaznaczono punkt E, a na ramieniu BC – punkt F w taki sposób, że trapez $EFCD$ jest podobny do trapezu $ABFE$. Wiedząc, że $|AB| = 12$ cm i $|DC| = 3$ cm, oblicz stosunek:
a) wysokości trapezów $EFCD$ i $ABFE$
b) pól trapezów $EFCD$ i $ABFE$.

4.72. W trapezie *ABCD* zaznaczono punkt *E* na ramieniu *AD* oraz punkt *F* na ramieniu *BC* i otrzymano trapezy *CDEF* oraz *ABFE*, które są do siebie podobne. Wiedząc, że stosunek pól trapezów podobnych wynosi 4 : 9, a długość odcinka *EF* jest równa 18 cm, oblicz długość podstaw trapezu *ABCD*.

Mapa. Skala mapy

4.73. Długość Wisły wynosi 1047 km. Oblicz, jaką długość (w centymetrach) ma niebieska linia obrazująca Wisłę na mapie, która została wykonana w skali 1 : 3 000 000.

4.74. Droga z Rzeszowa do Radomia, zaznaczona na mapie wykonanej w skali 1 : 250 000, ma długość 80 cm. Oblicz, ile kilometrów ma ta trasa w rzeczywistości.

4.75. Oblicz skalę, w jakiej został wykonany plan, jeśli:
a) 1 cm na mapie odpowiada 4 m w rzeczywistości
b) 1 cm^2 na mapie odpowiada 4 m^2 w rzeczywistości.

4.76. Budynek o powierzchni użytkowej 150 m^2 zaznaczono na planie zagospodarowania terenu jako prostokąt o wymiarach 20 cm na 30 cm.
a) oblicz skalę tego planu
b) wyznacz wymiary prostokąta przedstawiającego dany budynek na mapie w skali 1 : 500.

4.77. Dobierz odpowiednią skalę i narysuj w zeszycie plan swojego mieszkania. Oblicz pole narysowanej figury.

4.78. Działka ma kształt prostokąta o wymiarach 50 m na 40 m. Ile cm^2 będzie zajmować obszar tej działki na planie sporządzonym w skali 1 : 2000?

4.79. Prostokątna działka na planie, sporządzonym w skali 1 : 1000, ma wymiary 15 cm na 20 cm. Ile hektarów ma ta działka w rzeczywistości?

4.80. Puszcza Solska zajmuje na mapie w skali 1 : 2 000 000 powierzchnię równą 3,1 cm^2. Ile wynosi rzeczywista powierzchnia tej puszczy (w km^2)?

4.81. Jezioro Dąbie ma powierzchnię równą 5600 ha. Oblicz, jaką powierzchnię zajmuje to jezioro na mapie wykonanej w skali 1 : 400 000.

Test sprawdzający do rozdziału 4.

1. Przekątna kwadratu ma długość 6 cm. Pole tego kwadratu jest równe:

A. 12 cm^2 B. 18 cm^2 C. 24 cm^2 D. 36 cm^2.

2. Wysokości równoległoboku są równe 12 cm i 8 cm, a dłuższy bok ma długość 15 cm. Krótszy bok ma długość:

A. 6 cm B. 9 cm C. 10 cm D. 11 cm.

3. Obwód kwadratu K jest o 40% większy od obwodu kwadratu K_1. Pole kwadratu K jest większe od pola kwadratu K_1 o:

A. 16% B. 20% C. 40% D. 96%.

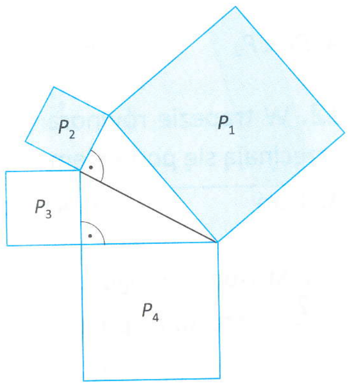
4. Sąsiednie boki równoległoboku mają długość 4 cm i 5 cm. Pole takiego czworokąta nie może być równe:

A. 21 cm^2 B. $17\frac{8}{9}$ cm^2 C. $6\sqrt{7}$ cm^2 D. $4\sqrt{5}$ cm^2.

5. Pole trapezu jest równe 40 cm^2, a odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 5 cm. Wysokość tego trapezu jest równa:

A 16 cm B. 12 cm C. 8 cm D. 4 cm.

6. Przeciwprostokątna jednego trójkąta prostokątnego jest jednocześnie przyprostokątną drugiego trójkąta prostokątnego. Na bokach tych trójkątów zbudowano cztery kwadraty, których pola są odpowiednio równe P_1, P_2, P_3, P_4 (zobacz rysunek obok). Prawdziwa jest zależność:



A. $P_1 + P_2 = P_3 + P_4$

B. $P_1 - P_2 = P_3 + P_4$

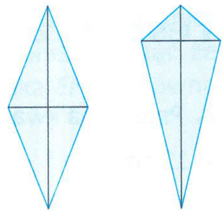
C. $P_2 + P_3 = P_1 + P_4$

D. $P_4 - P_3 = P_1 - P_2$.

7. Punkty K, L, M, N są środkami boków prostokąta $ABCD$. Pole czworokąta $KLMN$ wynosi 6. Zatem pole prostokąta $ABCD$ jest równe:

A. 8 B. 9 C. 12 D. 15.

8. Odpowiednie przekątne rombu i deltoidu mają równe długości (zobacz rysunek obok). Niech P_1 oznacza pole rombu, a P_2 – pole deltoidu. Wówczas:



A. $P_1 > P_2$

B. $P_1 = P_2$

C. $P_1 < P_2$

D. jest za mało danych, aby porównać pola P_1 i P_2.

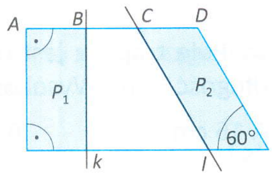
9. W trapezie równoramiennym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego podzieliła dłuższą podstawę na odcinki mające długość 7 cm i 15 cm. Wysokość tego trapezu jest równa 8 cm. Zatem pole trapezu jest równe:

A. 120 cm^2 B. 60 cm^2 C. 88 cm^2 D. 56 cm^2.

10. Pole pewnego czworokąta wypukłego wynosi 35, a jego przekątne mają długość 10 i 14. Miara kąta przecięcia przekątnych jest równa:

A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°.

11. Na rysunku obok kąt ostry trapezu prostokątnego ma miarę 60°. Prosta k jest prostopadła do podstaw trapezu, zaś prosta l jest równoległa do dłuższego ramienia. Ponadto $|AB| = |CD|$. Niech P_1 i P_2 oznaczają pola figur odciętych z trapezu przez te proste. Wówczas:



A. $P_1 < P_2$ B. $P_1 = \sqrt{2}P_2$ C. $P_1 = P_2$ D. $P_1 = \sqrt{3}P_2$.

12. W trapezie równoramiennym, którego pole jest równe $16\sqrt{2}$ cm^2, przekątne przecinają się pod kątem 45°. Przekątne w tym trapezie mają długość:

A. 4 cm B. $4\sqrt{2}$ cm C. 8 cm D. $8\sqrt{2}$ cm.

13. Stosunek długości przekątnych dwóch prostokątów podobnych jest równy $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$. Stosunek pól tych prostokątów wynosi:

A. $2(\sqrt{2}+1)$ B. 4 C. $4(\sqrt{2}+1)$ D. $4(2\sqrt{2}+3)$.

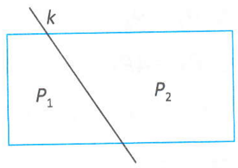
14. W trapezie $ABCD$, $AB \parallel CD$, wysokość jest równa 5 cm oraz $|AB| = 12$ cm. Stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta BCD jest równy 3 : 1. Pole trapezu $ABCD$ jest więc równe:

A. 37,5 cm^2 B. 40 cm^2 C. 45 cm^2 D. 55 cm^2.

15. W trapezie $ABCD$ o polu równym 180 cm^2 podstawy AB i CD mają odpowiednio długość: 20 cm i 10 cm. Wysokość trapezu jest równa 12 cm. Punkt przecięcia się przekątnych trapezu $ABCD$ dzieli jego wysokość na odcinki mające długość:

A. 4 cm i 8 cm B. 3 cm i 9 cm C. 2,4 cm i 9,6 cm D. 2 cm i 10 cm.

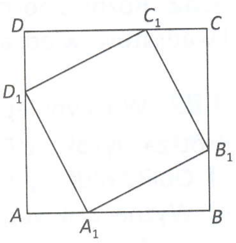
16. Na rysunku obok prosta k dzieli jeden dłuższy bok prostokąta na odcinki, których długości pozostają w stosunku 1 : 5, a drugi dłuższy bok dzieli na połowy. Stosunek pól $P_1 : P_2$ powstałych w ten sposób trapezów wynosi:



A. 1 : 2 B. 2 : 5

C. 3 : 7 D. 5 : 9.

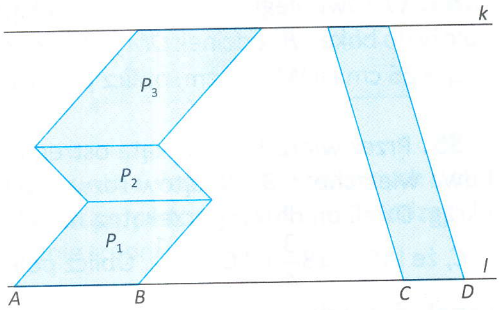
17. W kwadrat $ABCD$ o boku 6 wpisano kwadrat $A_1B_1C_1D_1$, jak na rysunku obok. Wierzchołki A_1, B_1, C_1, D_1 dzielą boki kwadratu $ABCD$ w stosunku 1 : 2. Pole kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ jest równe:



A. 16 B. 18

C. 20 D. 24.

18. Na rysunku obok dane są dwie figury: jedna jest równoległobokiem o podstawach mających długość $|CD|$, zawartych w prostych równoległych k, l; druga figura jest zbudowana z trzech równoległoboków o podstawach mających długość $|AB|$. Podstawa pierwszego równoległoboku leży na prostej l, trzeciego – na prostej k. Pola równoległoboków są równe odpowiednio P_1, P_2, P_3, P_4.

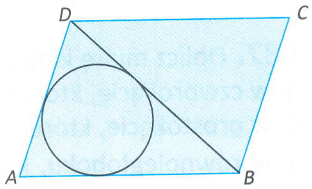


Jeśli $|AB| = 2 \cdot |CD|$, to:

A. $P_1 + P_2 + P_3 = P_4$ B. $P_1 + P_2 + P_3 = 2 \cdot P_4$

C. $P_1 + P_2 + P_3 = 3 \cdot P_4$ D. $P_1 + P_2 + P_3 = 4 \cdot P_4$.

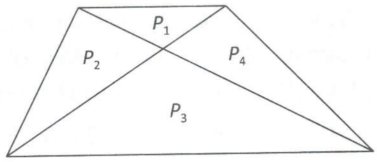
19. W równoległoboku $ABCD$ poprowadzono przekątną BD i w trójkąt ABD wpisano okrąg o promieniu 6 cm. Jeśli obwód trójkąta ABD jest równy 80 cm, to pole równoległoboku $ABCD$ wynosi:



A. 240 cm^2 B. 320 cm^2

C. 400 cm^2 D. 480 cm^2.

20. Przekątne trapezu podzieliły trapez na cztery trójkąty. Niech P_1, P_2, P_3, P_4 oznaczają pola tych trójkątów (rysunek obok). Wiadomo, że stosunek długości podstaw trapezu jest równy 3 : 1. Wówczas:



A. $P_2 = P_4$ B. $P_3 = 3P_1$

C. $P_3 = 4P_1$ D. $P_3 = 6P_1$.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

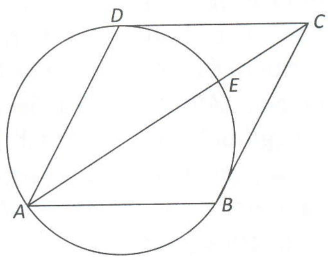
4.82. Różnica pól dwóch kwadratów jest równa 13 cm^2. Oblicz długości boków tych kwadratów, wiedząc, że wyrażają się one liczbami naturalnymi.

4.83. W równoległoboku $ABCD$ boki mają długość: $|AB| = 2\sqrt{5}$ cm, $|BC| = 5$ cm. Krótsza wysokość DE równoległoboku jest równa 4 cm.

a) Oblicz dłuższą wysokość DF tego równoległoboku.
b) Wyznacz obwód i pole czworokąta $BFDE$.

4.84. W równoległoboku $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie O. Punkt M należy do boku AB i odcinek OM jest równoległy do boku AD. Wiedząc, że $|AM| = 8$ cm, $|AC| = 26$ cm i $|OM| = 7$ cm, oblicz pole równoległoboku $ABCD$.

4.85. Przez wierzchołek A kąta ostrego rombu $ABCD$ i dwa wierzchołki B i D kątów rozwartych przechodzi okrąg. Dzieli on dłuższą przekątną na takie odcinki AE i EC, że $|AE| = 18\frac{3}{4}$ i $|EC| = 5\frac{1}{4}$. Oblicz pole rombu oraz wysokość rombu.



4.86. W romb, którego bok ma długość 5 cm, a kąt ostry ma miarę 60°, wpisano okrąg. Oblicz pole czworokąta otrzymanego przez połączenie kolejnych punktów styczności tego okręgu z bokami rombu.

4.87. Oblicz miarę kąta przecięcia przekątnych:

a) w czworokącie, którego pole jest równe 35, a przekątne mają długość 10 i 14
b) w prostokącie, którego pole jest równe $16\sqrt{3}$, a jeden bok ma długość 4
c) w równoległoboku, którego dłuższy bok ma długość $5\sqrt{5}$, wysokość poprowadzona na ten bok ma długość $2\sqrt{5}$, a długości przekątnych wynoszą $10\sqrt{2}$ oraz 10
d) w trapezie prostokątnym, którego podstawy mają długość 6 cm i 15 cm, a krótsze ramię ma długość 8.

4.88. Dane są długości przekątnych czworokąta wypukłego: 12 cm i 5 cm. Oblicz, jakie największe pole może mieć ten czworokąt. Odpowiedź uzasadnij.

4.89. W trapezie kąty ostre przy dłuższej podstawie mają miary $45°$ i $60°$. Krótsza podstawa ma długość 3 cm, a długość krótszego ramienia wynosi $4\sqrt{3}$ cm. Oblicz pole tego trapezu. Wynik podaj w przybliżeniu dziesiętnym z dokładnością do 0,1 cm^2.

4.90. Pole trapezu równoramiennego jest równe $\sqrt{3}$ dm^2, a suma długości podstaw wynosi 1 dm. Oblicz długość przekątnej trapezu.

4.91. W trapezie równoramiennym $ABCD$ ($AB \parallel DC$) linia łącząca środki ramion ma długość 1,1 dm. Odcinek DE jest wysokością trapezu, $|AE| = 0{,}5$ dm. Pole trapezu jest równe 1,32 dm^2. Oblicz:

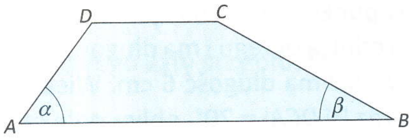
a) wysokość trapezu

b) obwód trapezu.

4.92. Pole trapezu $ABCD$ jest równe 100 cm^2, a krótsza podstawa DC tego trapezu ma 2 cm długości. Kąty ostre trapezu przy dłuższej podstawie AB oznaczmy przez α i β (zobacz rysunek poniżej). Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i $\operatorname{tg}\beta = \frac{8}{15}$, oblicz:

a) obwód trapezu

b) długość przekątnych tego trapezu.



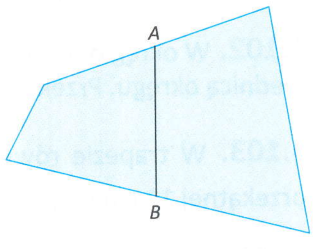
4.93. W trapezie $ABCD$ ($AB \parallel DC$, $|AB| > |DC|$) punkt E przecięcia przekątnych dzieli przekątną AC na odcinki, których długości pozostają w stosunku $3 : 10$. Wiedząc, że pole trójkąta CDE jest równe 18 cm^2, oblicz pole trapezu $ABCD$.

4.94. Pole trapezu wynosi 169 cm^2. Punkt przecięcia przekątnych dzieli każdą przekątną na dwa odcinki, których długości pozostają w stosunku $5 : 8$. Oblicz pola trójkątów, na jakie przekątne podzieliły trapez.

4.95. Na rysunku obok znajduje się plan czworokątnej działki, wykonany w skali $1 : 3000$. Wiedząc, że na planie droga AB ma długość 2 cm, a powierzchnia czworokąta wynosi 7 cm^2, oblicz:

a) rzeczywistą długość drogi (w m)

b) rzeczywistą powierzchnię działki (w m^2).



4.96. W trapezie prostokątnym wysokość ma długość 4 cm, a krótsza podstawa ma długość 3 cm. Przekątna poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego trapezu dzieli trapez na dwa trójkąty podobne. Oblicz obwód i pole trapezu.

4.97. Obwody trzech figur podobnych pozostają w stosunku 2 : 3 : 4. Suma pól tych figur wynosi 58 cm^2. Oblicz pole każdej z tych figur.

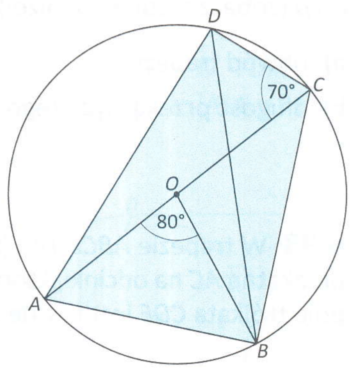
4.98. Dany jest równoległobok *ABCD*, którego kąt ostry ma miarę 45°. Skonstruuj równoległobok do niego podobny, którego pole będzie:

a) 4 razy większe
b) 9 razy mniejsze
c) 2 razy mniejsze
d) 3 razy większe

od pola równoległoboku *ABCD*.

4.99. Na trójkącie równobocznym T_1 opisano okrąg o_1. Następnie w trójkąt równoboczny T_2 o boku dwa razy krótszym od boku trójkąta T_1 wpisano okrąg o_2. Oblicz:
a) skalę podobieństwa, w którym obrazem okręgu o_1 jest okrąg o_2
b) ile razy pole koła wyznaczonego przez okrąg o_1 jest większe od pola koła wyznaczonego przez okrąg o_2.

4.100. Punkty *A*, *B*, *C*, *D* należą do okręgu o środku w punkcie *O*, jak na rysunku poniżej. Odcinek *AC* jest średnicą okręgu i ma długość 10 cm, natomiast cięciwa *BD* ma długość 6 cm. Wiedząc, że $|\sphericalangle AOB| = 80°$ oraz $|\sphericalangle DCA| = 70°$, oblicz pole czworokąta *ABCD*.



4.101. Na czworokącie *ABCD* można opisać okrąg. Cięciwy *AB* i *AD* tego okręgu mają odpowiednio długość 7 i 8, zaś kąt *BAD* jest równy 120°. Wiedząc, że $|DC| = |BC|$, oblicz pole czworokąta *ABCD*.

4.102. W okrąg o promieniu długości 5 cm wpisano trapez, którego podstawa jest średnicą okręgu. Przekątna trapezu ma długość 8 cm. Oblicz pole tego trapezu.

4.103. W trapezie równoramiennym dane są: długość ramienia 5 cm, długość przekątnej 12 cm i długość wysokości trapezu $4\frac{8}{13}$ cm. Oblicz:

a) pole trapezu
b) pole koła opisanego na tym trapezie.

4.104. Dany jest kawałek materiału w kształcie czworokąta, którego suma długości dwóch przeciwległych boków jest równa 2,7 m. Z tego kawałka wycinamy koło o średnicy 1 m, styczne do wszystkich boków czworokąta. Oblicz, jaki procent całego materiału stanowią niewykorzystane skrawki. Wynik zaokrąglij do 0,1 procenta.

4.105. W czworokąt *ABCD* można wpisać okrąg. Ponadto boki tego czworokąta spełniają warunek: $|AB| - |CD| = |BC| - |AD|$. Wiedząc, że przekątne czworokąta mają długość 5 cm i 8 cm, oblicz jego pole.

4.106. W trapez równoramienny wpisano koło. Krótsza podstawa trapezu ma 4 cm długości, a ramię 20 cm długości. Oblicz:

a) pole koła wpisanego w ten trapez

b) pole tego trapezu.

4.107. W trapez prostokątny wpisano koło. Punkt styczności koła z dłuższym ramieniem dzieli to ramię na odcinki długości 8 cm i 18 cm. Oblicz:

a) pole koła

b) długości podstaw trapezu

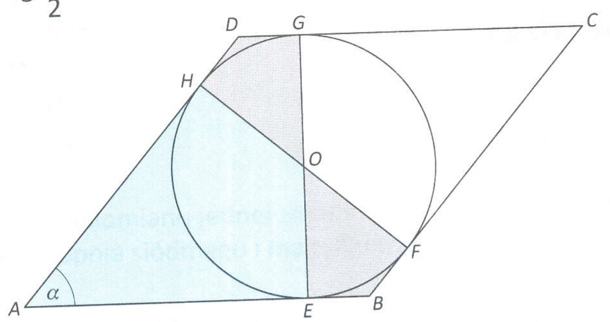
c) pole trapezu.

4.108. Na okręgu o promieniu 3 cm opisano trapez, którego kąty przy dłuższej podstawie mają miary 30° i 60°. Oblicz pole trapezu.

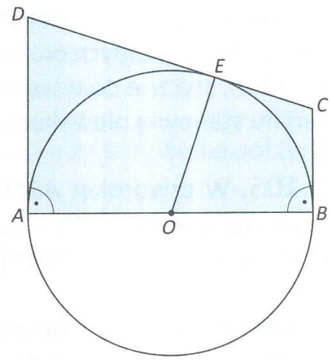
4.109. W romb *ABCD*, którego kąt ostry ma miarę α, wpisano okrąg o środku w punkcie *O*. Z punktu *O* poprowadzono promienie do punktów styczności *E*, *F*, *G*, *H* okręgu z rombem. Wykaż, że:

a) czworokąty *DHOG* i *BFOE* są przystające

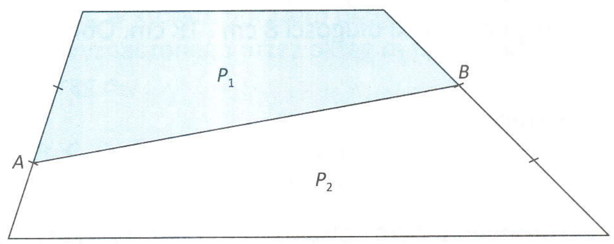
b) czworokąt *DHOG* jest obrazem czworokąta *AEOH* w podobieństwie, którego skala jest równa $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$.



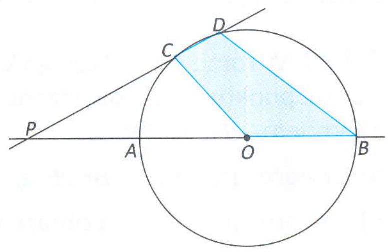
4.110. Z trapezu prostokątnego $ABCD$ odcięto półkole o polu 8π dm^2, wyznaczone przez okrąg o środku w punkcie O, styczny do obu podstaw trapezu i do dłuższego ramienia trapezu odpowiednio w punktach A, B i E. Wiedząc, że pole czworokąta $AOED$ jest cztery razy większe od pola czworokąta $BCEO$, wyznacz pole trapezu $ABCD$.



4.111. W trapezie podstawy mają długość a i b ($a > b$). Każde ramię trapezu podzielono na trzy równe odcinki, następnie połączono punkty A i B tego podziału, zaznaczone na rysunku. Oblicz stosunek pól otrzymanych czworokątów.



4.112. Dany jest okrąg o środku w punkcie O i średnicy AB. Punkt P należy do prostej AB i leży w odległości 7 od środka okręgu, poza punktem A. Przez punkt P poprowadzono sieczną okręgu, która przecięła okrąg w punktach C i D, jak na rysunku obok. Wiedząc, że $|PC| = 3\sqrt{2}$ i $|CD| = \sqrt{2}$, oblicz:



a) miarę kąta OPC

b) pole czworokąta $OBDC$.