3. Geometria analityczna

Wektor w układzie współrzędnych. Współrzędne środka odcinka

3.1. Dane są punkty A i B. Oblicz współrzędne i długość wektora $\overrightarrow{AB}$. Narysuj wektor $\overrightarrow{AB}$ w układzie współrzędnych.

a) $A(7, 2)$, $B(3, -1)$
b) $A(0, -3)$, $B(-1, 0)$
c) $A(-4, -7)$, $B(1, 5)$
d) $A(-5, 3)$, $B(0, -2)$

3.2. Dany jest punkt A oraz wektor $\overrightarrow{AB}$. Oblicz współrzędne punktu B.

a) $A(0, -3)$, $\overrightarrow{AB} = [2, -1]$
b) $A(-4, 0)$, $\overrightarrow{AB} = [3, 5]$
c) $A\left(7\frac{1}{2}, -6\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left[-4, 7\frac{3}{4}\right]$
d) $A(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AB} = [\sqrt{3}+3, 1-2\sqrt{3}]$

3.3. Dany jest punkt B oraz wektor $\overrightarrow{AB}$. Oblicz współrzędne punktu A.

a) $B(3, 2)$, $\overrightarrow{AB} = [-1, 0]$
b) $B(-7, 3)$, $\overrightarrow{AB} = [-4, 5]$
c) $B(0, -8)$, $\overrightarrow{AB} = [-3, -2]$
d) $B\left(2\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left[1\frac{1}{6}, -\sqrt{2}\right]$

3.4. Sprawdź, czy wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{CD}$ są równe:

a) $A(1, 2)$, $B(3, 6)$, $C(-1, 5)$, $D(1, 9)$
b) $A(-2, 6)$, $B(1, 2)$, $C(3, 1)$, $D(0, 5)$
c) $A(-2, -1)$, $B(4, 2)$, $C(7, -5)$, $D(1, -2)$
d) $A(3, 8)$, $B(-4, 2)$, $C(1, -10)$, $D(-6, -16)$

3.5. Sprawdź, czy wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{CD}$ są przeciwne:

a) $A(4, 3)$, $B(5, 2)$, $C(2, 2)$, $D(1, 3)$
b) $A(2, 5)$, $B(8, 7)$, $C(-4, -7)$, $D(2, -5)$
c) $A(2, -7)$, $B(5, 8)$, $C(-11, 3)$, $D(4, 6)$
d) $A(-4, 2)$, $B(3, -1)$, $C(-3, 1)$, $D(4, -4)$

3.6. Wykaż, że jeśli niezerowe wektory $\vec{a} = [a_1, a_2]$ oraz $\vec{b} = [b_1, b_2]$ są równoległe, to $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

3.7. Korzystając z równoległości wektorów, sprawdź, czy odcinki AB i CD są równoległe, jeśli:

a) $A(-10, -4)$, $B(-7, -2)$, $C(5, 1)$, $D(11, 4)$
b) $A(0, 2)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $D(0, 6)$
c) $A(-4, -1)$, $B(3, 6)$, $C(1, -3)$, $D(2, -2)$
d) $A\left(-\frac{1}{2}, 16\right)$, $B(1, -20)$, $C\left(\frac{1}{2}, -7\right)$, $D\left(\frac{1}{6}, 1\right)$

3.8. Wyznacz liczbę m, dla której wektory $\vec{u} = [m^2 - 1, -m]$ oraz $\vec{v} = [-1, m]$ są:

a) równe b) przeciwne c) równoległe.

3.9. Dane są wektory: $\vec{u} = [2, -4]$, $\vec{v} = [-3, 4]$, $\vec{z} = [10, -2]$. Oblicz współrzędne i długość wektora:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{z} - \vec{u}$ c) $3\vec{v}$ d) $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{z}$

3.10. Wyznacz współrzędne środka odcinka AB, jeśli:

a) $A(0, 4)$, $B(-2, 0)$, b) $A(-3, 1)$, $B(3, 5)$

c) $A(4, -1)$, $B(-10, 9)$ d) $A(\sqrt{2}, -3)$, $B(\sqrt{2}, 7)$

3.11. Wyznacz współrzędne punktu A_1 będącego obrazem punktu A w symetrii środkowej względem punktu P, jeśli:

a) $A(-3, 0)$, $P(-1, 2)$ b) $A(6, 2)$, $P(3, 0)$

c) $A(0, -2)$, $P(-2, 1)$ d) $A(-3, -3)$, $P(4, 5)$

3.12. Wyznacz współrzędne punktów podziału odcinka AB:

a) na dwa odcinki równej długości, jeśli $A(-3, 4)$, $B(2, -7)$

b) na cztery odcinki równej długości, jeśli $A(-5, -7)$, $B(3, 5)$

c) na trzy odcinki równej długości, jeśli $A(2, -3)$, $B(-10, 3)$

d) na sześć odcinków równej długości, jeśli $A(-1, 3)$, $B(5, 15)$.

3.13. Dane są dwa wierzchołki równoległoboku $ABCD$ i punkt P przecięcia się przekątnych. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków równoległoboku, jeśli:

a) $A(-3, 5)$, $B(-2, -1)$, $P(3, 1)$ b) $B(4, -2)$, $C(2, 7)$, $P(-1, 2)$.

Narysuj równoległobok $ABCD$ w układzie współrzędnych.

3.14. Dane są trzy wierzchołki równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne czwartego wierzchołka oraz współrzędne punktu P przecięcia przekątnych, jeśli:

a) $A(4, 1)$, $B(2, 6)$, $C(-8, 3)$ b) $A(-5, -2)$, $B(3, 1)$, $D(-2, 5)$.

Narysuj równoległobok $ABCD$ w układzie współrzędnych.

3.15. Oblicz współrzędne punktu S przecięcia środkowych w trójkącie ABC, jeśli:

a) $A(0, 0)$, $B(9, 0)$, $C(0, 6)$ b) $A(-4, 0)$, $B(-2, -5)$, $C(0, 2)$

c) $A(-2, 7)$, $B(1, 2)$, $C(4, 0)$ d) $A(-4, -6)$, $B(2, -11)$, $C(5, 5)$.

Kąt między ni

3.16. Oblicz sinus kąta α

a) $\vec{u} = [\sqrt{3}, \sqrt{6}]$, $\vec{v} = [2, 0$

c) $\vec{u} = [7, -1]$, $\vec{v} = [-2, 2]$

3.17. Oblicz cosinus kąta

a) $\vec{u} = [2\sqrt{2}, 1]$, $\vec{v} = [0, -5$

c) $\vec{u} = [-4, 8]$, $\vec{v} = [1, 2]$

3.18. Wyznacz miarę kąt

a) $\vec{u} = [1, 2]$, $\vec{v} = [4, -2]$

c) $\vec{u} = [-\sqrt{3}, 1]$, $\vec{v} = [1, 0]$

3.19. Oblicz długości bo

a) $A(-7, 1)$, $B(1, -1)$, $C(-$

b) $A(-4, -2\sqrt{3})$, $B(2, -2\sqrt{}$

c) $A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $B(3, \sqrt{3})$, C

d) $A(0, 3)$, $B(3\sqrt{3}, 6)$, $C($

3.20. Dane są wektory $\vec{u}$
rów prostopadłych, jeśli:

a) $\vec{u} = [2, 5]$, $\vec{v} = [\sqrt{28}, 5$

b) $\vec{u} = [2\sqrt{3}, -9]$, $\vec{v} = [9,$

c) $\vec{u} = [3a, -2a]$, $\vec{v} = [\frac{a}{4},$

d) $\vec{u} = [2a, \frac{a}{5}]$, $\vec{v} = [-\frac{1}{2}$

3.21. Wykaż, że przekątn
czworokąta, jeśli:

a) $A(-4, 1)$, $B(-2, 3)$, C

b) $A(-8, 0)$, $B(-1, 1)$, C

c) $A(-8, 3)$, $B(-3, 2)$, C

d) $A(-7, -7)$, $B(7, -7)$,

Kąt między niezerowymi wektorami

3.16. Oblicz sinus kąta α utworzonego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

a) $\vec{u}=[\sqrt{3}, \sqrt{6}], \vec{v}=[2, 0]$

b) $\vec{u}=[-3, 4], \vec{v}=[0, 5]$

c) $\vec{u}=[7, -1], \vec{v}=[-2, 2]$

d) $\vec{u}=[12, -5], \vec{v}=[6, 8]$

3.17. Oblicz cosinus kąta α utworzonego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

a) $\vec{u}=[2\sqrt{2}, 1], \vec{v}=[0, -5]$

b) $\vec{u}=[-\sqrt{5}, 2], \vec{v}=[\sqrt{5}, 0]$

c) $\vec{u}=[-4, 8], \vec{v}=[1, 2]$

d) $\vec{u}=[\sqrt{6}, 3\sqrt{2}], \vec{v}=[2\sqrt{2}, 4]$

3.18. Wyznacz miarę kąta α utworzonego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, jeśli:

a) $\vec{u}=[1, 2], \vec{v}=[4, -2]$

b) $\vec{u}=[-3, 3], \vec{v}=[2, 0]$

c) $\vec{u}=[-\sqrt{3}, 1], \vec{v}=[1, 0]$

d) $\vec{u}=[-\sqrt{3}, -1], \vec{v}=[2\sqrt{3}, -2]$

3.19. Oblicz długości boków oraz miary kątów trójkąta ABC, jeśli:

a) $A(-7, 1)$, $B(1, -1)$, $C(-2, 4)$

b) $A(-4, -2\sqrt{3})$, $B(2, -2\sqrt{3})$, $C(-4, 4\sqrt{3})$

c) $A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $B(3, \sqrt{3})$, $C(3+\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$

d) $A(0, 3)$, $B(3\sqrt{3}, 6)$, $C(-3\sqrt{3}, 6)$

3.20. Dane są wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Wskaż pary wektorów równoległych oraz pary wektorów prostopadłych, jeśli:

a) $\vec{u}=[2, 5], \vec{v}=[\sqrt{28}, 5\sqrt{7}]$

b) $\vec{u}=[2\sqrt{3}, -9], \vec{v}=[9, \sqrt{12}]$

c) $\vec{u}=[3a, -2a], \vec{v}=\left[\frac{a}{4}, -\frac{a}{6}\right], a \in \mathbf{R}-\{0\}$

d) $\vec{u}=\left[2a, \frac{a}{5}\right], \vec{v}=\left[-\frac{1}{2}, 5\right], a \in \mathbf{R}-\{0\}$

3.21. Wykaż, że przekątne czworokąta $ABCD$ są prostopadłe. Następnie oblicz pole czworokąta, jeśli:

a) $A(-4, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(-4, 5)$, $D(-6, 3)$

b) $A(-8, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(4, 6)$, $D(-3, 5)$

c) $A(-8, 3)$, $B(-3, 2)$, $C(0, 11)$, $D(-9, 8)$

d) $A(-7, -7)$, $B(7, -7)$, $C(4, 4)$, $D(-4, 4)$

3.22. Wyznacz wszystkie wartości parametru a ($a \in \mathbf{R}$), dla których wektory $\vec{u} = [a, -2]$ i $\vec{v} = [-4 - a, a]$ są równoległe.

3.23. Wyznacz wszystkie wartości parametru a ($a \in \mathbf{R}$), dla których wektory $\vec{u} = [a - 2, 3]$ i $\vec{v} = [a - 2, a^2 + 2a + 4]$ są równoległe.

3.24. Dane są wektory $\vec{u} = [1, 2]$, $\vec{v} = [3, -6]$, $\vec{p} = \left[a, -\frac{1}{2}\right]$. Wyznacz wartość parametru a, jeśli wiadomo, że wektory $\vec{r} = (a + 1) \cdot \vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{p}$, są prostopadłe.

3.25. Dane są wektory $\vec{u} = [3, -1]$, $\vec{v} = [-2, 5]$, $\vec{p} = [1, -2]$. Wykaż, że jeśli wektory $\vec{p}$ i $\vec{r} = a \cdot \vec{u} - b \cdot \vec{v}$, są prostopadłe, to $12b + 5a = 0$.

Równanie kierunkowe prostej

3.26. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B, jeśli:

a) $A(2, -3)$, $B(6, 7)$
b) $A(-4, 1)$, $B(2, 7)$
c) $\left(-\frac{3}{4}, -1\right)$, $B\left(-\frac{1}{4}, 8\right)$
d) $A\left(\frac{1}{8}, 1\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

3.27. Prosta l przechodzi przez punkt A, a jej współczynnik kierunkowy jest równy m. Wyznacz równanie kierunkowe prostej l, jeśli:

a) $m = -3$, $A(5, 6)$
b) $m = 2$, $A(-10, 12)$
c) $m = \frac{1}{3}$, $A(-1, -9)$
d) $m = -\frac{3}{4}$, $A(24, -36)$

3.28. Napisz równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkty A i B, jeśli:

a) $A(-10, 58)$, $B(2, 22)$
b) $A(-8, -95)$, $B(4, 25)$
c) $A(-10, 7)$, $B(5, -3)$
d) $A(-6, -2)$, $B(24, 4)$

3.29. Prosta przechodzi przez punkty A i B. Podaj (z dokładnością do jednego stopnia) miarę kąta nachylenia prostej do osi OX, jeśli:

a) $A(-4, 2)$, $B(1, 8)$
b) $A(5, 6)$, $B(9, -4)$
c) $A(12, -3)$, $B(6, 15)$
d) $A(2, -3)$, $B(-1, -19)$

3.30. Dane jest równa
OX, jeśli:
a) k: $y = x - 1$
d) k: $y = -x + 2$

3.31. Wyznacz równan
chylonej do osi OX pod
a) $P(0, 0)$, $\alpha = 135°$
d) $P(3, -4)$, $\alpha = 45°$

3.32. Wyznacz równan
odciętych kąt o mierze c
a) k: $y = 3x + 1$, $A(16, -$

3.33. Dany jest trójkąt
a) długość środkowej A
b) równanie kierunkowe
c) współrzędne środka

3.34. W trójkącie ABC
i wektor $\vec{BC} = [-8, 4]$. Wy
się boki trójkąta ABC.

3.35. W trójkącie ABC p
boku BC. Wiedząc, że A
prostych, w których zawi

3.36. W trójkącie ABC d
$S\left(3\frac{1}{3}, -1\frac{1}{3}\right)$. Oblicz mia

3.37. Dwa wierzchołki
o równaniu $y = \frac{1}{4}(x - 4)^2$
boli. Wyznacz współrzęd
warty tego trójkąta ma m

3.30. Dane jest równanie prostej k. Podaj miarę kąta nachylenia tej prostej do osi OX, jeśli:

a) $k\colon y = x - 1$
b) $k\colon y = \sqrt{3}x + \sqrt{2}$
c) $k\colon y = 1 - \sqrt{3}x$
d) $k\colon y = -x + 2$
e) $k\colon y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{2}$
f) $k\colon y = -\frac{3 - 2\sqrt{3}x}{6}$

3.31. Wyznacz równanie kierunkowe prostej k przechodzącej przez punkt P i nachylonej do osi OX pod kątem α, jeśli:

a) $P(0, 0)$, $\alpha = 135^\circ$
b) $P(0, 6)$, $\alpha = 30^\circ$
c) $P(4, 0)$, $\alpha = 120^\circ$
d) $P(3, -4)$, $\alpha = 45^\circ$
e) $P(-2\sqrt{3}, 5)$, $\alpha = 60^\circ$
f) $P(\sqrt{6}, \sqrt{8})$, $\alpha = 150^\circ$

3.32. Wyznacz równanie prostej l przechodzącej przez punkt A, która tworzy z osią odciętych kąt o mierze dwa razy większej od kąta, jaki tworzy z tą osią prosta k, jeśli:

a) $k\colon y = 3x + 1$, $A(16, -1)$
b) $k\colon y = 0{,}5x + 3$, $A(6, -8)$

3.33. Dany jest trójkąt o wierzchołkach: $A(-4, 3)$, $B(4, -5)$ i $C(8, 1)$. Wyznacz:

a) długość środkowej AS
b) równanie kierunkowe prostej zawierającej środkową AS
c) współrzędne środka ciężkości trójkąta ABC.

3.34. W trójkącie ABC dany jest wierzchołek $A(-6, -2)$, środek $E(0, -1)$ boku AB i wektor $\overrightarrow{BC} = [-8, 4]$. Wyznacz równania kierunkowe prostych, w których zawierają się boki trójkąta ABC.

3.35. W trójkącie ABC punkt $K(-5, 1)$ jest środkiem boku AC, zaś punkt L – środkiem boku BC. Wiedząc, że $\overrightarrow{AK} = [1, 6]$ oraz $\overrightarrow{KL} = [8, 4]$, wyznacz równania kierunkowe prostych, w których zawierają się boki trójkąta ABC.

3.36. W trójkącie ABC dane są: $A(-3, -3)$, $\overrightarrow{AB} = [7, 0]$ oraz środek ciężkości $S\left(3\frac{1}{3}, -1\frac{1}{3}\right)$. Oblicz miarę kąta rozwartego ABC tego trójkąta.

3.37. Dwa wierzchołki trójkąta równoramiennego ABC znajdują się na paraboli o równaniu $y = \frac{1}{4}(x-4)^2$, zaś trzecim wierzchołkiem trójkąta jest wierzchołek paraboli. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta, jeśli wiadomo, że kąt rozwarty tego trójkąta ma miarę 120°.

Równanie ogólne prostej

3.38. Przedstaw równanie prostej k w postaci ogólnej:

a) $k\colon \frac{x}{3} = \frac{12-x}{3}$ b) $k\colon y = \frac{-x+5}{4}$ c) $k\colon y + \frac{x-1}{2} = \frac{x+2}{3}$

3.39. Wyznacz równanie ogólne prostej k, do której należą punkty A i B, jeśli:

a) $A(0, 8)$, $B(2, 4)$ b) $A(3, -4)$, $B(11, -4)$
c) $A(-3, 2)$, $B(4, 9)$ d) $A(-2, 6)$, $B(\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

3.40. Wyznacz równanie ogólne prostej k przechodzącej przez dwa punkty P i Q (skorzystaj bezpośrednio z równania ogólnego prostej), jeśli:

a) $P(0, -4)$, $Q(3, 1)$ b) $P(\sqrt{5}, -3)$, $Q(\sqrt{5}, 8)$
c) $P(2, 2)$, $Q(-1, 0)$ d) $P(3, 1)$, $Q(-1, -7)$

3.41. Wyznacz równanie ogólne i kierunkowe (o ile istnieje) prostej k prostopadłej do wektora $\vec{u}$ i przechodzącej przez punkt P, jeśli:

a) $\vec{u} = [-1, 2]$, $P(3, 4)$ b) $\vec{u} = [6, -1]$, $P(2, 5)$
c) $\vec{u} = [5, 0]$, $P(-7, 8)$ d) $\vec{u} = [0, -3]$, $P(12, -9)$

3.42. Wyznacz wartość parametru p, dla której proste k, l, m przecinają się w jednym punkcie, jeśli: $k\colon x + y + 1 = 0$, $l\colon x + p = 0$, $m\colon 3x - y - 9 = 0$.

3.43. Wyznacz wartość parametru m, dla której proste: k – prostopadła do wektora $u = [2, -3]$ i przechodząca przez punkt $P(-1, 6)$ oraz $p\colon x + y - 5 = 0$ i $n\colon -x + (m+2)^2y - 7 = 0$ przecinają się w jednym punkcie.

3.44. Dla jakiej wartości parametru m proste $k\colon mx + (m+4)y - 5 = 0$ oraz $l\colon (m+1)x - my - 10 = 0$ przecinają się na osi odciętych?

3.45. Dla jakiej wartości parametru m proste $k\colon x - my + m + 4 = 0$ oraz $l\colon 2mx + y - m - 1 = 0$ przecinają się na osi rzędnych?

3.46. Podaj miarę kąta, jaki tworzy z osią OX prosta dana równaniem ogólnym:

a) $x + y - 7 = 0$ b) $\sqrt{3}x - y + 90 = 0$ c) $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$
d) $\sqrt{3}x - 3y + 15 = 0$ e) $x - \sqrt{3} = 0$ f) $y - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$

3.47. Oblicz pole trójkąta
k prostopadłą do wektora

3.48. W prostokącie $ABCD$
znacz równanie ogólne pro
domo, że wierzchołek A na

3.49. W trójkącie równora
oraz wektory $\overrightarrow{CD} = [-6, 4]$ i
wadzoną z wierzchołka C.
się boki tego trójkąta.

Kąt między pro

3.50. Dane są równania o
wiedź uzasadnij.

a) $k\colon 2x - 3y + 6 = 0$
b) $k\colon 3x - 4 = 0$
c) $k\colon 7x + 21y - 3 = 0$
d) $k\colon 2x + 7 = 0$

3.51. Napisz równanie og

a) $k\colon 3x - 2y + \sqrt{3} = 0$ i prz
b) $k\colon 4x + 9y = 0$ i przecina
c) $k\colon 2x - 11 = 0$ i przecina
d) $k\colon y - 5 = 0$ i przechodz

3.52. Dane są równania
padłe? Odpowiedź uzasad

a) $k\colon 5x + 3y - 2 = 0$
b) $k\colon 5x + 7 = 0$
c) $k\colon 4x - 20y + 30 = 0$
d) $k\colon -\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + 1 = 0$

3.53. Napisz równanie og

a) $k\colon 5x - y + 3 = 0$ i przec

3.47. Oblicz pole trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych oraz prostą k prostopadłą do wektora $\vec{u} = [3, -1]$ i przechodzącą przez punkt $P(4, 2)$.

3.48. W prostokącie $ABCD$ dane są: wierzchołek $C(2, 4)$ i wektor $\overrightarrow{AB} = [4, 4]$. Wyznacz równanie ogólne prostej zawierającej przekątną AC tego prostokąta, jeśli wiadomo, że wierzchołek A należy do prostej $k\colon x - y - 4 = 0$.

3.49. W trójkącie równoramiennym ABC ($|AC| = |BC|$) dane są: wierzchołek $C(-6, 2)$ oraz wektory $\overrightarrow{CD} = [-6, 4]$ i $\overrightarrow{AB} = [-4, -6]$, gdzie CD jest wysokością trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C. Wyznacz równania ogólne prostych, w których zawierają się boki tego trójkąta.

Kąt między prostymi

3.50. Dane są równania ogólne prostych k i l. Czy proste k i l są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.

a) $k\colon 2x - 3y + 6 = 0$ $\quad$ $l\colon -x + 1\frac{1}{2}y - 2 = 0$

b) $k\colon 3x - 4 = 0$ $\quad$ $l\colon 2y + 5 = 0$

c) $k\colon 7x + 21y - 3 = 0$ $\quad$ $l\colon x - 3y - 1 = 0$

d) $k\colon 2x + 7 = 0$ $\quad$ $l\colon 3x - 5 = 0$

3.51. Napisz równanie ogólne prostej l równoległej do prostej:

a) $k\colon 3x - 2y + \sqrt{3} = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(-1, 1)$

b) $k\colon 4x + 9y = 0$ i przecinającej oś OY w punkcie $P(0, 5)$

c) $k\colon 2x - 11 = 0$ i przecinającej oś OX w punkcie $P(-4, 0)$

d) $k\colon y - 5 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(7, \sqrt{2})$

3.52. Dane są równania ogólne prostych k i l. Czy proste k i l są do siebie prostopadłe? Odpowiedź uzasadnij.

a) $k\colon 5x + 3y - 2 = 0$ $\quad$ $l\colon -15x + 25y + 10 = 0$

b) $k\colon 5x + 7 = 0$ $\quad$ $l\colon 3y - 2 = 0$

c) $k\colon 4x - 20y + 30 = 0$ $\quad$ $l\colon 15x - 3y - 2 = 0$

d) $k\colon -\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + 1 = 0$ $\quad$ $l\colon 1{,}5x - 1\frac{1}{3}y + 2\frac{1}{5} = 0$

3.53. Napisz równanie ogólne prostej l prostopadłej do prostej:

a) $k\colon 5x - y + 3 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(-1, 2)$

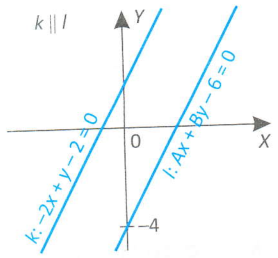
b) k: $y + 4 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(-\sqrt{7}, \sqrt{2})$
c) k: $10x - 7 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P(3, 8)$
d) k: $-3x + 2y = 0$ i przecinającej oś OY w punkcie $P(0, -2)$

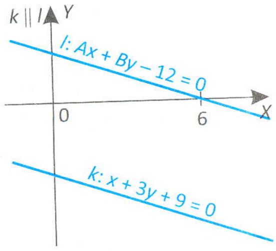
3.54. Oblicz brakujące współczynniki w równaniu ogólnym prostej l, wiedząc, że:
a) prosta l: $Ax - 2y + C = 0$ jest równoległa do prostej k: $5x + 14y - 1 = 0$ i przechodzi przez punkt $P(7, 0)$
b) prosta l: $x + By + C = 0$ jest równoległa do prostej k: $-3x + 4y - 5 = 0$ i przechodzi przez punkt $P(1, -3)$
c) prosta l: $3x + By + C = 0$ jest prostopadła do prostej k: $-20x + 15y - 7 = 0$ i przechodzi przez początek układu współrzędnych
d) prosta l: $Ax + y + C = 0$ jest prostopadła do prostej k: $2x + 4y - 13 = 0$ i przechodzi przez punkt $P\left(\frac{1}{2}, 7\right)$.

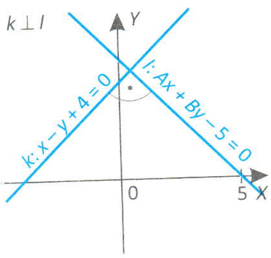
3.55. Wyznacz liczbę m, dla której proste k oraz l są równoległe, jeśli:
a) k: $(m - 1)x + (m + 1)y - 5m = 0$ l: $3x - 2y + 4 = 0$
b) k: $3mx + 4y - 8 = 0$ l: $(m + 3)x + 2y - 9 = 0$

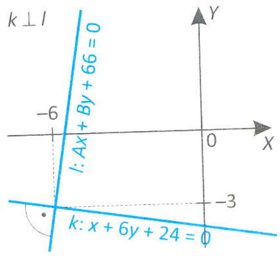
3.56. Wyznacz liczbę a, dla której proste k i l są prostopadłe, jeśli:
a) k: $-x + (2a - 1)y - 10 = 0$ l: $(a + 7)x + 2y + 8 = 0$
b) k: $-ax + (3 - a)y + 6 = 0$ l: $(a + 1)x + y + 2 = 0$

3.57. Na podstawie danych z rysunku poniżej wyznacz współczynniki A, B w równaniu ogólnym prostej l:

a) $k \parallel l$


b) $k \parallel l$


c) $k \perp l$


d) $k \perp l$


3.58. Wyznacz równanie o
a) $A(-4, 5)$, $B(6, 1)$
c) $A(-1, -2)$, $B(3, 2)$

3.59. Dane są punkty $A(1,$
i przechodzącej przez punkt
odległy od punktów A i B. W

3.60. Punkty $A(1, -1)$, $B(3,$
rzędne środka okręgu opisa

3.61. Oblicz odległość śro
$A(1, 7)$, $B(-5, 1)$, $C(7, -5)$, o

3.62. Wyznacz współrzędn
dem prostej k: $5x + 4y - 20$

3.63. Dwa boki równoległo
i l: $x + 2y + 5 = 0$. Punkt
Wyznacz równania ogólne
tego czworokąta.

3.64. Punkty $A(-2, -1)$ oraz
jest zawarta w prostej o rów
wierzchołków tego rombu.

3.65. Jedna z przekątnych
dząc, że $A(1, -3)$, wyznacz w

3.66. W trójkącie ABC dan
równanie prostej, w której
chołka C.

3.67. Dwie wysokości trójk
l: $x + y - 1 = 0$. Wiedząc po
w których zawierają się boki

3.68. Punkty $A(-4, 4)$, $B(4,$
punktem przecięcia wysoko
wierzchołka C.

3.58. Wyznacz równanie ogólne symetralnej odcinka AB, jeśli:

a) $A(-4, 5)$, $B(6, 1)$

b) $A(0, 7)$, $B(0, -3)$

c) $A(-1, -2)$, $B(3, 2)$

d) $A(-1, 8)$, $B(-5, 8)$

3.59. Dane są punkty $A(1, 0)$ oraz $B(5, 2)$. Na prostej k równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt $P(4, 4)$ wyznacz współrzędne punktu C, który jest równo odległy od punktów A i B. Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

3.60. Punkty $A(1, -1)$, $B(3, 5)$ i $C(-7, 11)$ są wierzchołkami trójkąta. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trójkącie.

3.61. Oblicz odległość środka okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach: $A(1, 7)$, $B(-5, 1)$, $C(7, -5)$, od środka ciężkości tego trójkąta.

3.62. Wyznacz współrzędne punktu Q symetrycznego do punktu $P(-1, -4)$ względem prostej k: $5x + 4y - 20 = 0$.

3.63. Dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych k: $5x - 2y - 11 = 0$ i l: $x + 2y + 5 = 0$. Punkt $S\left(0, \frac{1}{2}\right)$ jest środkiem symetrii tego równoległoboku. Wyznacz równania ogólne prostych, w których zawierają się dwa pozostałe boki tego czworokąta.

3.64. Punkty $A(-2, -1)$ oraz $D(2, 2)$ są wierzchołkami rombu, którego przekątna AC jest zawarta w prostej o równaniu $x - 3y - 1 = 0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.

3.65. Jedna z przekątnych kwadratu $ABCD$ zawiera się w prostej k: $2x - y = 0$. Wiedząc, że $A(1, -3)$, wyznacz współrzędne wierzchołka C i oblicz pole tego kwadratu.

3.66. W trójkącie ABC dane są: $A(2, 1)$, $\overrightarrow{AB} = [7, 3]$ oraz $\overrightarrow{BC} = [-6, 1]$. Wyznacz równanie prostej, w której zawiera się wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka C.

3.67. Dwie wysokości trójkąta ABC zawierają się w prostych k: $5x - 3y + 5 = 0$ oraz l: $x + y - 1 = 0$. Wiedząc ponadto, że $A(-2, 1)$, wyznacz równania ogólne prostych, w których zawierają się boki tego trójkąta.

3.68. Punkty $A(-4, 4)$, $B(4, 0)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, a punkt $M(3, 4)$ jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta (ortocentrum). Wyznacz współrzędne wierzchołka C.

3.69. Punkty $A(2, -3)$ i $B(5, 1)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Bok BC zawiera się w prostej k: $x + 2y - 7 = 0$, zaś środkowa AM zawiera się w prostej m: $5x - y - 13 = 0$. Wyznacz równanie ogólne prostej, w której zawiera się wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka C.

3.70. Punkty $A(0, -5)$ oraz $D(-3, -1)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, którego osią symetrii jest prosta o równaniu $x + 2y = 0$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków oraz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu.

3.71. Wyznacz miarę kąta ostrego, jaki tworzą dwie proste k i l o równaniach:

a) k: $x - 8 = 0$ oraz l: $x - y - 200 = 0$

b) k: $y = x - 10$ oraz l: $y = \left(2 - \sqrt{3}\right)x + 15$

3.72. Wyznacz miarę kąta rozwartego, jaki tworzą dwie proste k i l o równaniach:

a) k: $y = 3x + 5$ oraz l: $y = -2x + 4$

b) k: $\sqrt{3}x - 3y - 3 = 0$ oraz l: $\sqrt{3}x + 3y - 6 = 0$

3.73. Wyznacz równania prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych, które tworzą z prostą k: $2x - y + 5 = 0$ kąt o mierze 45°.

3.74. Wyznacz równania prostych przechodzących przez punkt $A(-2, 4)$, które tworzą z prostą k: $-3x + 2y + 1 = 0$ kąt o mierze 45°.

3.75. Wyznacz równania prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych, które tworzą z prostą k: $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ kąt o mierze 60°.

3.76. Wyznacz równania prostych przechodzących przez punkt $A(1, -1)$, które tworzą z prostą k: $x - y + 1 = 0$ kąt o mierze 30°.

***3.77.** Trójkąt ABC jest równoramienny, w którym $|AC| = |BC|$. Podstawa AB zawiera się w prostej k: $3x - 7y + 35 = 0$, zaś ramię BC zawiera się w prostej l: $5x - 2y - 19 = 0$. Wyznacz równanie prostej, w której zawiera się bok AC tego trójkąta, jeśli wiadomo, że punkt $P(-2, 0)$ należy do boku AC.

Odległość punkt… dwiema prostym…

3.78. Oblicz odległość punk…

a) k: $x - 7 = 0$

c) k: $7x - y + 17 = 0$

3.79. Oblicz odległość międ…

a) k: $x + y + 2 = 0$ l: x…

b) k: $x + 6 = 0$ l: 5…

c) k: $2x - y + 3 = 0$ l: $-$…

d) k: $5y + 7 = 0$ l: 3…

3.80. Wykaż, że prosta k: 2…
m: $2x - y + 9 = 0$ oraz n: $2x$…

3.81. Figura F jest sumą d…
$3x - 4y - 2 = 0$. Sprawdź, cz…

a) k: $3x - 4y + 6 = 0$

c) n: $3x - 4y + 14 = 0$

3.82. Dana jest prosta k: 4…
której odległość punktu P o…

a) 1 b) 15…

3.83. Dana jest prosta k: …
punktu $P(a, 3)$ od prostej k…

a) 2 b) 0…

3.84. Dana jest prosta k: …
w odległości $2\sqrt{5}$ od prost…

a) $P(1, a)$ b) $P($…

3.85. Dany jest trójkąt AB…

a) równania ogólne prost…

b) długości wysokości teg…

3.86. Dany jest trapez AB…

a) Które boki trapezu są r…

b) Oblicz długość wysoko…

Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi

3.78. Oblicz odległość punktu $P(-2, 3)$ od prostej k, jeśli:

a) $k: x - 7 = 0$

b) $k: y + 1 = 0$

c) $k: 7x - y + 17 = 0$

d) $k: 3x + 4y + 5 = 0$

3.79. Oblicz odległość między prostymi równoległymi k i l, jeśli:

a) $k: x + y + 2 = 0$ $\quad l: x + y - 4 = 0$

b) $k: x + 6 = 0$ $\quad l: 5x - 10 = 0$

c) $k: 2x - y + 3 = 0$ $\quad l: -3x + 1{,}5y - 2 = 0$

d) $k: 5y + 7 = 0$ $\quad l: 3y - 20 = 0$

3.80. Wykaż, że prosta $k: 2x - y - 1 = 0$ jest równo oddalona od prostych $m: 2x - y + 9 = 0$ oraz $n: 2x - y - 11 = 0$.

3.81. Figura F jest sumą dwóch prostych o równaniach: $3x - 4y + 14 = 0$ oraz $3x - 4y - 2 = 0$. Sprawdź, czy podana prosta jest osią symetrii tej figury, jeśli:

a) $k: 3x - 4y + 6 = 0$

b) $m: 4x + 3y + 5 = 0$

c) $n: 3x - 4y + 14 = 0$

d) $p: 2x + y - 1 = 0$

3.82. Dana jest prosta $k: 4x - 3y + C = 0$ oraz punkt $P(-1, 1)$. Wyznacz liczbę C, dla której odległość punktu P od prostej k jest równa:

+ a) 1   + b) 15   c) 0   d) $\sqrt{7}$

3.83. Dana jest prosta $k: 8x - 15y + 7 = 0$. Wyznacz liczbę a, dla której odległość punktu $P(a, 3)$ od prostej k jest równa:

+ a) 2   + b) 0   c) 13   d) 10

3.84. Dana jest prosta $k: -2x + y + 3 = 0$. Wyznacz liczbę a, dla której punkt P leży w odległości $2\sqrt{5}$ od prostej k, jeśli:

+ a) $P(1, a)$ + b) $P(3a, 4)$ c) $P(a, 2a)$ d) $P(a + 2, a - 1)$

3.85. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A(-2, 3)$, $B(-2, 2)$, $C(2, 0)$. Wyznacz:

a) równania ogólne prostych zawierających boki tego trójkąta

b) długości wysokości tego trójkąta.

3.86. Dany jest trapez $ABCD$, gdzie $A(3, -2)$, $B(3, 3)$, $C(0, 4)$, $D(-15, 4)$.

a) Które boki trapezu są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.

b) Oblicz długość wysokości tego trapezu.

3.87. Na osi OX wyznacz punkt P, który jest równoodległy od prostych k: $x - y + 3 = 0$ oraz m: $7x + y - 1 = 0$.

3.88. Na osi OY wyznacz punkt P, który jest równoodległy od prostych k: $2x + y - 1 = 0$ oraz m: $11x - 2y + 1 = 0$.

3.89. Wyznacz równanie prostej, do której należy punkt $P(1, -1)$ i takiej, że odległość punktu $Q(8, -2)$ od tej prostej wynosi 5.

3.90. Wyznacz równanie prostej, do której należy punkt $P(-6, 15)$ i takiej, że odległość punktu $Q(4, -5)$ od tej prostej wynosi 10.

3.91. Wyznacz równania prostych, w których zawierają się dwusieczne kątów, pod jakimi przecinają się proste k: $4x + 2y + 1 = 0$ i m: $11x - 2y + 7 = 0$.

3.92. Wyznacz równanie prostej, zawierającej dwusieczną tego kąta, utworzonego przez proste k: $x + 3y - 1 = 0$ oraz m: $6x - 2y + 1 = 0$, do obszaru którego należy punkt $P(3, 1)$.

Pole trójkąta. Pole wielokąta

3.93. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A(1, 1)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 3)$.

3.94. Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach: $3x - y - 9 = 0$, $2x + y - 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$. Oblicz pole tego trójkąta.

3.95. W równoległoboku $ABCD$ dane są wierzchołki: $A(2, 4)$, $B(6, 3)$, $C(4, -1)$. Oblicz:

a) pole tego równoległoboku

b) współrzędne wierzchołka D

c) miarę kąta α utworzonego przez wektory $\overrightarrow{AK}$ i $\overrightarrow{AL}$, gdzie K – środek boku BC, L – środek boku CD.

3.96. Prosta k: $3x - y - 3 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = -x^2 - 2x + 3$ w punktach A i B.

a) Oblicz współrzędne punktów A i B.

b) Oblicz pole trójkąta ABW, gdzie W jest wierzchołkiem paraboli.

c) Oblicz odległość punktu W od prostej k.

3.97. Na płaszczyźnie dane są punkty: $A(1, 2)$, $B(5, 4)$, $C(3, 6)$, $D(0, 8)$. Przez punkt D poprowadzono prostą k prostopadłą do prostej AB. Wyznacz na prostej k taki punkt E, aby pola trójkątów ABC i ABE były równe.

3.98. Punkty $A(6, 2)$ i $C(-4, -4)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Wysokość poprowadzona z wierzchołka C zawiera się w prostej k: $x - y = 0$. Oblicz:

a) współrzędne wierzchołka B

b) pole trójkąta ABC.

3.99. Na osi OY wyznacz taki punkt C, aby pole trójkąta ABC, gdzie $A(-2, -4)$, $B(8, -1)$, było równe 32.

3.100. Na osi OX wyznacz taki punkt B, aby pole trójkąta ABC, gdzie $A(2, -3)$, $C(6, 3)$, było równe 12.

3.101. Na prostej k o równaniu $x - 3y - 3 = 0$ wyznacz punkt B tak, aby pole trójkąta ABC, gdzie $A(-4, 1)$, $C(4, 8)$ było równe 35.

3.102. W rombie $ABCD$, którego pole jest równe 10, dane są przeciwległe wierzchołki $A(1, 1)$ i $C(3, 5)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków rombu.

3.103. W trójkącie prostokątnym ABC ($|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$) dwa wierzchołki mają współrzędne $A(4, -5)$ i $C(-8, 5)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka B, wiedząc, że pole trójkąta ABC jest równe 61.

Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło

3.104. Napisz postać kanoniczną równania okręgu o środku $S(x_S, y_S)$ i promieniu r, jeśli:

a) $S(0, 0)$, $r = 4$

b) $S(0 ,4)$, $r = \sqrt{2}$

c) $S(-1, 0)$, $r = 1$

d) $S(-1, 2)$, $r = \sqrt{3}$

e) $S(4, -3)$, $r = \frac{1}{2}$

f) $S\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right)$, $r = 8$

3.105. Poniższe równania opisują okrąg o środku w punkcie $S(x_S, y_S)$ i promieniu r ($r > 0$). Podaj współrzędne środka okręgu i jego promień, jeśli:

a) $x^2 + y^2 = 1$

b) $(x - 1)^2 + y^2 = 2{,}25$

c) $(1 + x)^2 + (2 - y)^2 = 25$

d) $(-x - 3)^2 + (-1 - y)^2 = 81$

3.106. Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu opisanego równaniem:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 10x + 24 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 33 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 16 = 0$
e) $x^2 + y^2 - x - 0{,}5y - \frac{59}{16} = 0$
f) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y - 6 = 0$

3.107. Dane jest równanie okręgu w postaci zredukowanej: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, gdzie $a^2 + b^2 > 4c$. Wykaż, że środek tego okręgu ma współrzędne $S\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, a długość promienia tego okręgu można obliczyć ze wzoru: $r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$.

3.108. Korzystając z własności omówionej w zadaniu 3.107., wyznacz współrzędne środka i długość promienia okręgu:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}y - 6 = 0$
c) $x^2 + y^2 + x - \frac{1}{2}y - \frac{11}{16} = 0$
d) $x^2 + y^2 - 3x + y - 1{,}5 = 0$

3.109. Sprawdź, które z poniższych równań opisują okrąg.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 10x + 2y + 25 = 0$

3.110. Udowodnij, że równanie $x^2 + y^2 - ax + 2by - 0{,}75a^2 + 2ab = 0$ opisuje okrąg dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych a i b. Podaj współrzędne środka i długość promienia okręgu.

3.111. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt A, o środku w punkcie S, jeśli:

a) $A(3, 4)$, $S(0, 0)$
b) $A(4, 2)$, $S(2, 1)$
c) $A(3, 10)$, $S(-3, 2)$
d) $A(4, 7)$, $S(-2, 1)$

3.112. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty A, B, C, jeśli:

a) $A(-1, 0)$, $B(7, 0)$, $C(0, 1)$
b) $A(1, 3)$, $B(5, 1)$, $C(4, 4)$
c) $A(1, 5)$, $B(8, -2)$, $C(9, 1)$
d) $A(-14, -1)$, $B(3, 16)$, $C(11, 4)$

3.113. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty A i B, którego środek znajduje się na prostej k, jeśli:

a) $k\colon y = -2x - 2$; $A(5, 10)$, $B(3, 12)$
b) $k\colon y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$; $A(6, 4)$, $B(-1, 3)$
c) $k\colon y = 2x + 4$; $A(3, 0)$, $B(4, 1)$
d) $k\colon y = x - 5$; $A(7, 4)$, $B(-5, -12)$

3.114. Dany jest okrąg
będącego obrazem okrę
a) $O(0, 0)$ b)

3.115. Dany jest okrąg
cego obrazem okręgu o
a) $k\colon x - 4 = 0$ b)

3.116. Napisz równanie
względem prostej $k\colon x -$
chołkami są środki tych

3.117. Napisz równanie
$o_1\colon x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 =$

3.118. Dany jest okrąg
go obrazem okręgu o w
a) $\vec{u} = [-3, 0]$ b)

3.119. Dane jest przeks
$P((x, y)) = (-x, y + 1)$, gdz
a) Wykaż, że przekształc
b) Wyznacz równanie ob
c) Wyznacz równania o
w przekształceniu P.

3.120. Przekształcenie
$x, y \in \mathbf{R}$.
a) Wykaż, że przekształc
b) Wyznacz równanie ob
niu P.
c) Oblicz pole trójkąta, k
S' – obrazu okręgu w

3.121. Napisz równanie
$o_1\colon x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 =$
gami o_1 i o_2.

3.122. Prosta $k\colon x - y + 1$
tach A i B. Napisz równan
nek AB.

3.114. Dany jest okrąg o: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$. Wyznacz równanie okręgu o_1 będącego obrazem okręgu o w symetrii środkowej względem punktu:
a) $O(0, 0)$ b) $A(-4, 6)$ c) $B(5, 1)$ d) $C(3, -2)$

3.115. Dany jest okrąg o: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 7$. Wyznacz równanie okręgu o_1 będącego obrazem okręgu o w symetrii osiowej względem prostej k, jeśli:
a) k: $x - 4 = 0$ b) k: $y + 2 = 0$ c) k: $y = x - 2$ d) k: $2x + y - 1 = 0$

3.116. Napisz równanie okręgu symetrycznego do okręgu o: $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ względem prostej k: $x - 3y - 4 = 0$, a następnie oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są środki tych okręgów i początek układu współrzędnych.

3.117. Napisz równanie ogólne wspólnej osi symetrii okręgów o_1: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ oraz o_2: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

3.118. Dany jest okrąg o: $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$. Wyznacz równanie okręgu o_1 będącego obrazem okręgu o w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$, jeśli:
a) $\vec{u} = [-3, 0]$ b) $\vec{u} = [0, 2]$ c) $\vec{u} = [1, -3]$ d) $\vec{u} = [-4, 5]$

3.119. Dane jest przekształcenie P płaszczyzny określone wzorem: $P((x, y)) = (-x, y + 1)$, gdzie $x, y \in \mathbf{R}$.
a) Wykaż, że przekształcenie P jest izometrią.
b) Wyznacz równanie obrazu okręgu o: $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ w tym przekształceniu.
c) Wyznacz równania osi symetrii figury, która jest sumą okręgu o i jego obrazu w przekształceniu P.

3.120. Przekształcenie P określone jest wzorem $P((x, y)) = (y + 2, -x + 1)$, gdzie $x, y \in \mathbf{R}$.
a) Wykaż, że przekształcenie P jest izometrią.
b) Wyznacz równanie obrazu okręgu o: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ w przekształceniu P.
c) Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są: środek S danego okręgu, środek S' – obrazu okręgu w przekształceniu P oraz punkt $A(2, 0)$.

3.121. Napisz równanie okręgu o_2 o promieniu $r = 4$, współśrodkowego z okręgiem o_1: $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$. Oblicz pole P pierścienia kołowego ograniczonego okręgami o_1 i o_2.

3.122. Prosta k: $x - y + 1 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = -x^2 + 2x + 3$ w punktach A i B. Napisz równanie okręgu o promieniu $r = \sqrt{5}$, którego cięciwą jest odcinek AB.

3.123. Podaj nierówność opisującą koło o środku $S(x_S, y_S)$ i promieniu r $(r > 0)$, jeśli:

a) $S(1, -3),\ r = \sqrt{2}$ b) $S\left(-4, \sqrt{2}\right),\ r = \frac{1}{2}$ c) $S(2, -5),\ r = 6$

3.124. W prostokątnym układzie współrzędnych zilustruj zbiór punktów, których współrzędne spełniają podane nierówności:

a) $x^2 + y^2 \le \frac{9}{4}$ b) $(x-1)^2 + y^2 \le 1$

c) $x^2 + (y+3)^2 \le 4$ d) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 11 \le 0$

3.125. W prostokątnym układzie współrzędnych zilustruj zbiory:

$A = \{(x, y)\colon x \in \boldsymbol{R} \land y \in \boldsymbol{R} \land x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0\}$

$B = \{(x, y)\colon x \in \boldsymbol{R} \land y \in \boldsymbol{R} \land x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0\}$,

a następnie wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $A \cap B$.

3.126. W prostokątnym układzie współrzędnych zilustruj zbiory:

$A = \{(x, y)\colon x \in \boldsymbol{R} \land y \in \boldsymbol{R} \land x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 \le 0\}$

$B = \{(x, y)\colon x \in \boldsymbol{R} \land y \in \boldsymbol{R} \land x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 \le 0\}$,

a następnie wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $A \cap B$.

3.127. Dla jakich wartości parametru m $(m \in \boldsymbol{R})$ proste $k\colon 2x - 5y - m - 6 = 0$ i $p\colon x + y - m + 3 = 0$ przecinają się w punkcie, który należy do okręgu o środku $S(2, 1)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$?

3.128. Dla jakich wartości parametru m $(m \in \boldsymbol{R})$ proste $k\colon x + y - m - 1 = 0$ i $p\colon 2x + y - 2m = 0$ przecinają się w punkcie, który należy do koła o środku $S(0, 1)$ i promieniu $r = \sqrt{10}$?

Wzajemne położenie prostej i okręgu. Styczna do okręgu

3.129. Określ wzajemne położenie prostej l i okręgu o, jeśli:

a) $o\colon (x-1)^2 + (y+4)^2 = 16$ $l\colon y = \frac{3}{4}x + 3$

b) $o\colon (x+5)^2 + y^2 = 1$ $l\colon y = 1$

c) $o\colon x^2 + y^2 - 8x + 10y + 33 = 0$ $l\colon y = x - 5$

d) $o\colon x^2 + y^2 + 8x - 2y + 13 = 0$ $l\colon y = x$

3.130. Wyznacz współ

a) $o\colon x^2 + y^2 = 9$

b) $o\colon x^2 + y^2 = 41$

c) $o\colon x^2 + y^2 + 6x + 2y =$

d) $o\colon x^2 + y^2 + 8x + 4y +$

3.131. Prosta o równa
w punktach A i B.

a) Wyznacz równanie

b) Wyznacz współrzędn
stokątny.

3.132. Dany jest okrąg
stej k, która jest styczna

a) $A(9, 1)$ b)

3.133. Napisz równan
do prostej k, jeśli:

a) $o\colon (x-2)^2 + (y-1)^2$

b) $o\colon (x+3)^2 + (y-5)^2$

c) $o\colon x^2 + y^2 - 2x - 15 =$

d) $o\colon x^2 + y^2 - 8x - 6y +$

3.134. Napisz równani
do prostej k, jeśli:

a) $o\colon (x+2)^2 + (y-3)^2$

b) $o\colon (x-5)^2 + y^2 = 9$

c) $o\colon x^2 + y^2 - 2x + 12y$

d) $o\colon x^2 + y^2 - 14x + 24$

3.135. Napisz równan
do osi OX pod kątem α,

a) $x^2 + y^2 = 1;\quad \alpha = 60^\circ$

c) $x^2 + y^2 - 10x = 0;\quad \alpha$

3.136. Napisz równan
przez punkt A, jeśli:

a) $o\colon x^2 + y^2 = 4,\ A(6, -$

c) $o\colon x^2 + y^2 - 6x - 4y +$

e) $o\colon x^2 + y^2 + 10x - 6y$

3.130. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych (o ile istnieją) prostej l i okręgu o.

a) $o\colon x^2 + y^2 = 9$ $l\colon y = \frac{1}{3}x - 1$

b) $o\colon x^2 + y^2 = 41$ $l\colon x - y = 1$

c) $o\colon x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0$ $l\colon x + y = -8$

d) $o\colon x^2 + y^2 + 8x + 4y + 19 = 0$ $l\colon \frac{1}{2}x + y + 2 = 0$

3.131. Prosta o równaniu $x - 2y + 2 = 0$ przecina okrąg $o\colon x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ w punktach A i B.

a) Wyznacz równanie ogólne symetralnej m cięciwy AB.

b) Wyznacz współrzędne takiego punktu $M \in m$, dla którego trójkąt ABM jest prostokątny.

3.132. Dany jest okrąg $o\colon x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$. Wyznacz równanie ogólne prostej k, która jest styczna do tego okręgu w punkcie:

a) $A(9, 1)$ b) $B(4, -4)$ c) $C(0, 4)$ d) $D(7, 5)$

3.133. Napisz równanie kierunkowe stycznych do danego okręgu o i równoległych do prostej k, jeśli:

a) $o\colon (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ $k\colon y = 2x$

b) $o\colon (x+3)^2 + (y-5)^2 = 16$ $k\colon y = x$

c) $o\colon x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$ $k\colon y = -3x$

d) $o\colon x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ $k\colon y = -x$

3.134. Napisz równania kierunkowe stycznych do danego okręgu o i prostopadłych do prostej k, jeśli:

a) $o\colon (x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$ $k\colon y = x$

b) $o\colon (x-5)^2 + y^2 = 9$ $S(5,0)\ r=3$ $k\colon y = -x$

c) $o\colon x^2 + y^2 - 2x + 12y + 28 = 0$ $k\colon y = -0{,}5x$

d) $o\colon x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0$ $k\colon y = -0{,}75x$

3.135. Napisz równania kierunkowe stycznych do danego okręgu o i nachylonych do osi OX pod kątem α, jeśli:

a) $x^2 + y^2 = 1$; $\alpha = 60^\circ$

$S(1,0)\ r=2 \quad \alpha = \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$

b) $(x-1)^2 + y^2 = 4$; $\alpha = 120^\circ$

c) $x^2 + y^2 - 10x = 0$; $\alpha = 150^\circ$

d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$; $\alpha = 135^\circ$

3.136. Napisz równania ogólne stycznych do danego okręgu o i przechodzących przez punkt A, jeśli:

a) $o\colon x^2 + y^2 = 4$, $A(6, -2)$

b) $o\colon x^2 + y^2 = 9$, $A(-5, 3)$

c) $o\colon x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$, $A(-4, 3)$

d) $o\colon x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$, $A(-2, 2)$

e) $o\colon x^2 + y^2 + 10x - 6y + 30 = 0$, $A(-7, 9)$

f) $o\colon x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$, $A(5, -1)$

3.137. Sieczna k: $x + y - 1 = 0$ przecięła okrąg o: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ w punktach A i B. Następnie w punktach A i B poprowadzono styczne do danego okręgu. Wykaż, że styczne te tworzą kąt prosty.

3.138. Sieczna k: $x - y + 1 = 0$ przecina okrąg o: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ w punktach A i B. Przez punkty A i B poprowadzono styczne do okręgu, które przecinają się w punkcie C. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

3.139. Oblicz tangens kąta ostrego, jaki tworzą styczne do okręgu o: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$, przechodzące przez punkt $P(2, -1)$.

3.140. Zbadaj liczbę punktów wspólnych okręgu o z prostą l, w zależności od wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$), jeśli:

a) o: $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 2$; l: $y = -x + m$
b) o: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 8$; l: $y = x + m$
c) o: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = m$; l: $x + y - 1 = 0$
d) o: $x^2 + y^2 = 25$; l: $4x + 3y - m = 0$

***3.141.** Dane są zbiory: $A = \{(x, y): x \in \boldsymbol{R} \wedge y \in \boldsymbol{R} \wedge x + y - 2 \leq 0\}$, $B = \{(x, y): x \in \boldsymbol{R} \wedge y \in \boldsymbol{R} \wedge x^2 + y^2 - 2mx + 2y + m^2 - 1 = 0\}$. Wyznacz te wartości parametru $m \in \boldsymbol{R}$, dla których zbiór $A \cap B$ jest jednopunktowy.

***3.142.** Dane są zbiory: $A = \{(x, y): x \in \boldsymbol{R} \wedge y \in \boldsymbol{R} \wedge y \geq x - 2\}$, $B = \{(x, y): x \in \boldsymbol{R} \wedge y \in \boldsymbol{R} \wedge x^2 + y^2 + 2x - 2ky + k^2 - 1 = 0\}$. Wyznacz te wartości parametru $k \in \boldsymbol{R}$, dla których zbiór $A \cap B$ jest jednopunktowy.

3.143. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt A i stycznego do obu osi układu współrzędnych, jeśli:

a) $A(2, 0)$
b) $A(0, 3)$
c) $A(2, 1)$
d) $A(1, 2)$

3.144. Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S(3, -2)$ i stycznego do prostej k: $3x - 4y - 12 = 0$.

3.145. Wyznacz współrzędne środka okręgu stycznego do prostej k: $\sqrt{3}x - y - 2 - 2\sqrt{3} = 0$ i jednocześnie stycznego do dodatnich półosi układu współrzędnych.

3.146. Okrąg przechodzi przez punkt $A(4, 1)$, zaś jego środek należy do prostej k: $x - y = 0$. Wiedząc, że okrąg ten jest styczny do prostej l: $y - 5 = 0$, wyznacz jego równanie.

3.147. Wyznacz równanie okręgu o promieniu 5, który jest styczny do osi OY i jednocześnie styczny do prostej k: $3x + 4y - 6 = 0$.

3.148. Wyznacz równani
jednocześnie do prostych

Wzajemne poło

3.149. Określ wzajemne
a) o_1: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 =$
b) o_1: $x^2 + y^2 - 10x + 4y +$
c) o_1: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 =$
d) o_1: $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 =$
e) o_1: $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$
f) o_1: $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5$

3.150. Wyznacz współrzę
W każdym przypadku wyk

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 4y + 16 = \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = \end{cases}$

3.151. Dla jakich warto
o_1: $(x - m)^2 + (y - 2m)^2 = 1$

3.152. Dla jakich warto
o_1: $(x - m)^2 + (y + 1)^2 = 8$ o
znalezionych wartości pa
styczności A.

3.153. Dla jakich warto
o_1: $(x - m)^2 + (y + 2)^2 = 20$
Dla znalezionych wartości
tu styczności A.

3.154. Dla jakich warto
o_1: $(x + 1)^2 + (y - m)^2 = 4$ o
wspólny?

3.148. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A(1, 2)$ i stycznego jednocześnie do prostych k: $2x + y = 0$ i m: $2x + y - 20 = 0$.

Wzajemne położenie dwóch okręgów

3.149. Określ wzajemne położenie okręgów danych równaniami:
a) o_1: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$; o_2: $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$
b) o_1: $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0$; o_2: $x^2 + (y+2)^2 = 4$
c) o_1: $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 8$; o_2: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$
d) o_1: $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$; o_2: $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 2$
e) o_1: $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$; o_2: $x^2 + (y-3)^2 = 4$
f) o_1: $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$; o_2: $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 5$

3.150. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów (o ile istnieją). W każdym przypadku wykonaj rysunek.

a) $\begin{cases} x^2+y^2-6y+5=0 \\ x^2+y^2-6x-6y+17=0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y+9=0 \\ x^2+y^2+2x-2y-3=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+8x-4y+16=0 \\ x^2+y^2+2x+2y-8=0 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x^2+y^2-10x-4y-7=0 \\ x^2+y^2-6x-8y+24=0 \end{cases}$

3.151. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$) okręgi opisane równaniami: o_1: $(x-m)^2 + (y-2m)^2 = 1$ oraz o_2: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$ są wzajemnie zewnętrzne?

3.152. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$) okręgi opisane równaniami: o_1: $(x-m)^2 + (y+1)^2 = 8$ oraz o_2: $(x+1)^2 + (y-m)^2 = 2$ są zewnętrznie styczne? Dla znalezionych wartości parametrów wykonaj rysunek. Oblicz współrzędne punktu styczności A.

3.153. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$) okręgi opisane równaniami: o_1: $(x-m)^2 + (y+2)^2 = 20$ oraz o_2: $(x+1)^2 + (y-2m)^2 = 5$ są wewnętrznie styczne? Dla znalezionych wartości parametrów wykonaj rysunek. Oblicz współrzędne punktu styczności A.

3.154. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$) okręgi opisane równaniami: o_1: $(x+1)^2 + (y-m)^2 = 4$ oraz o_2: $(x+m)^2 + (y-2)^2 = 1$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?

3.155 Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$) okręgi opisane równaniami: o_1: $(x+5)^2 + (y+m)^2 = 16$ oraz o_2: $(x-2m)^2 + (y+m)^2 = 9$ przecinają się w dwóch punktach?

3.156. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$) okręgi opisane równaniami: o_1: $(x-m)^2 + (y+1)^2 = 1$ oraz o_2: $(x+2)^2 + (y-m+3)^2 = 25$ są rozłączne wewnętrznie?

3.157. Wykaż, że obrazem okręgu o: $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$ w przekształceniu P określonym wzorem $P((x, y)) = (1 + 3x, -3y - 2)$, gdzie $x, y \in \mathbf{R}$, jest okrąg. Zbadaj wzajemne położenie okręgu i jego obrazu.

3.158. Wykaż, że obrazem okręgu o: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ w przekształceniu P określonym wzorem $P((x, y)) = \left(\frac{1}{2}y+1,\ 2-\frac{1}{2}x\right)$, gdzie $x, y \in \mathbf{R}$, jest okrąg. Zbadaj wzajemne położenie okręgu i jego obrazu.

3.159 Wyznacz równanie prostej k, względem której okręgi o_1: $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 19 = 0$ oraz o_2: $x^2 + y^2 - 12x + 35 = 0$ są wzajemnie symetryczne.

3.160. Wyznacz równanie okręgu o najmniejszym promieniu, stycznego zewnętrznie do okręgu o: $(x+3)^2 + y^2 = 25$ i jednocześnie stycznego do prostej k: $4x + 3y - 38 = 0$.

***3.161.** Wyznacz równanie zbioru środków wszystkich okręgów zewnętrznie stycznych do okręgu o: $x^2 + y^2 = 4$ i jednocześnie stycznych do prostej k: $y + 2 = 0$.

Jednokładność. Jednokładność w układzie współrzędnych

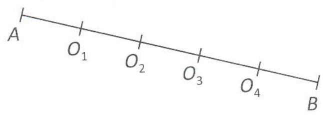
3.162. Dany jest odcinek AB. Punkty O_1, O_2, O_3, O_4 dzielą ten odcinek na pięć równych części (patrz rysunek poniżej). Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe?

a) $J_{O_1}^{-4}(A) = B$

b) $J_{O_2}^{-\frac{2}{3}}(B) = A$

c) $J_{O_3}^{\frac{3}{2}}(A) = B$

d) $J_{O_4}^{-0,25}(B) = A$



3.163. Zaznacz na płaszczyźnie dwa różne punkty S oraz X. Następnie wyznacz obraz punktu X w jednokładności o środku w punkcie S i skali k, jeśli:

a) $k = 2$ b) $k = -1$ c) $k = -\frac{1}{3}$

d) $k = \frac{m}{n}$, gdzie m i n oznaczają długości dwóch odcinków oraz $m > n > 0$.

3.164. Na płaszczyźnie zaznacz dowolne dwa różne punkty X oraz X_1. Następnie wyznacz środek S jednokładności J, wiedząc, że $X_1 = J_S^k(X)$, gdzie:
a) $k = -3$ b) $k = -0{,}75$ c) $k = -0{,}5$ d) $k = 2$

3.165. Narysuj dwa okręgi $o_1(A_1;\ 1{,}5\text{ cm})$ i $o_2(A_2;\ 3\text{ cm})$ tak, aby $|A_1A_2| = 6$ cm. Znajdź środek S takiej jednokładności, która przekształca okrąg o_1 na okrąg o_2 (pamiętaj, że istnieją dwa rozwiązania). Wyznacz odległość punktu S od środków okręgów.

3.166. Wyznacz współrzędne punktu A_1, który jest obrazem punktu A w jednokładności J o środku w punkcie $O(0, 0)$ i skali k, jeśli:

a) $A(-2, 4)$, $k = 0{,}5$ b) $A(-9, 12)$, $k = -\frac{1}{3}$

c) $A\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{15}\right)$, $k = 15$ d) $A\left(\sqrt{2}, 16\sqrt{2}\right)$, $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.167. Wyznacz współrzędne punktu B_1, który jest obrazem punktu B w jednokładności J o środku w punkcie $S(-4, 5)$ i skali k, jeśli:

a) $B(-10, -8)$, $k = \frac{2}{3}$ b) $B(5, 7)$, $k = -2$

c) $B(1, 20)$, $k = 6$ d) $B(-4, 9)$, $k = -\frac{1}{2}$

3.168. Odcinek A_1B_1 jest obrazem odcinka AB w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali k. Wyznacz współrzędne środka E odcinka A_1B_1, jeśli:
a) $A(-20, 6)$, $B(10, 4)$, $k = 3$ b) $A(13, -1)$, $B(5, 7)$, $k = -2$
c) $A(-8, -27)$, $B(-12, -13)$, $k = 0{,}1$ d) $A(27, 108)$, $B(-2, -3)$, $k = -0{,}2$

3.169. Odcinek A_1B_1 jest obrazem odcinka AB w jednokładności J o środku w punkcie $S(-2, -1)$ i skali k. Wyznacz współrzędne końców odcinka A_1B_1, jeśli:
a) $A(10, -6)$, $B(-1, 4)$, $k = -5$ b) $A(0, 6)$, $B(-4, 0)$, $k = 3$
c) $A(-8, 4)$, $B(0, 0)$, $k = 0{,}5$ d) $A(3, 8)$, $B(-5, 13)$, $k = -0{,}3$

3.170. Dane są punkty $A(3, 2)$ i $A_1(-3, 5)$. Wiadomo, że $A_1 = J_S^k(A)$. Wyznacz współrzędne środka S tej jednokładności, jeśli skala k jest równa:

a) -2 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $-\frac{1}{4}$

3.171. Punkty A i A_1 są jednokładne, przy czym środkiem jednokładności jest punkt $O(0, 0)$. Oblicz skalę k tej jednokładności, jeśli:

a) $A(-3, 1)$, $A_1(6, -2)$
b) $A(5, 5)$, $A_1(-1, -1)$
c) $A(-2, 0)$, $A_1(5, 0)$
d) $A(0, 3)$, $A_1(0, -3)$

3.172. Sprawdź, czy odcinki AB i CD są jednokładne, jeśli:

a) $A(2, -3)$, $B(5, 6)$, $C(0, -1)$, $D(1, 2)$
b) $A(-2, -1)$, $B(4, 2)$, $C(2, 1)$, $D(10, 5)$

W przypadku odpowiedzi twierdzącej wyznacz środek S i skalę jednokładności, w której obrazem odcinka AB jest odcinek CD.

3.173. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A(-5, -5)$, $B(2, -3)$, $C(-4, -1)$. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności J o środku $S(2, 0)$ i skali k, gdzie $k < 0$. Wiedząc, że środkowa trójkąta $A_1B_1C_1$ poprowadzona na bok B_1C_1 ma długość 10, oblicz:

a) skalę tej jednokładności
b) współrzędne wierzchołków trójkąta $A_1B_1C_1$
c) pole trójkąta $A_1B_1C_1$.

3.174. Dana jest prosta m o równaniu $y = 2x - 3$ oraz punkt $O(0, 0)$. Wyznacz równanie prostej, która jest obrazem prostej m w jednokładności J_O^k, jeśli:

a) $k = -3$ b) $k = 2$ c) $k = \frac{1}{3}$ d) $k = -\frac{1}{2}$

***3.175.** Prosta k przechodząca przez punkt $P(2, 6)$ ogranicza wraz z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt o polu 25.

a) Wyznacz równanie prostej k.
b) Wyznacz równanie prostej m, która jest obrazem prostej k w jednokładności o środku w punkcie $O(0, 0)$ i skali $s = 1\frac{1}{2}$.
c) Oblicz pole trapezu ograniczonego przez proste k i m oraz osie układu współrzędnych.

3.176. Wyznacz środek S i skalę k jednokładności J, która okrąg $o_1: x^2 + y^2 + 10x - 10y + 41 = 0$ przekształca na okrąg $o_2: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

3.177 Wyznacz środ
$o_1: x^2 + y^2 + 12x + 2y$

3.178. Dana jest fun
w jednokładności o śr

a) $f(x) = -2x^2$, $k = -\frac{1}{2}$

c) $f(x) = \frac{x-2}{x}$, $k = -1$

Naszkicuj wykresy fun

Zastosowani zywaniu zada

3.179. Wyznacz wsp
w punkcie A jest równ

a) $f(x) = -2x^2 + x + 1$,

c) $f(x) = -\frac{3}{x^4}$, k: $12x$

3.180. Wyznacz wsp
w punkcie A jest prosto

a) $f(x) = 3x^2 + x - 2$, k

c) $f(x) = \frac{-2}{x^5}$, k: $x + 10$

3.181. Wykaż, że stycz
punkcie P o odciętej 2,
równym 8.

3.177 Wyznacz środek S i skalę k jednokładności J, która okrąg o_1: $x^2 + y^2 + 12x + 2y + 36 = 0$ przekształca na okrąg o_2: $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 96 = 0$.

3.178. Dana jest funkcja $y = f(x)$. Wykres funkcji g jest obrazem wykresu funkcji f w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali k. Wyznacz wzór funkcji g, jeśli:

a) $f(x) = -2x^2$, $k = -\frac{1}{2}$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, $k = 3$

c) $f(x) = \frac{x-2}{x}$, $k = -1$

d) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $k = \frac{1}{2}$

Naszkicuj wykresy funkcji f i g.

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej

3.179. Wyznacz współrzędne takiego punktu A, że styczna do wykresu funkcji f w punkcie A jest równoległa do prostej k, jeśli:

a) $f(x) = -2x^2 + x + 1$, k: $5x - y - 2 = 0$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$, k: $x - 5y + 5 = 0$

c) $f(x) = -\frac{3}{x^4}$, k: $12x - y - 8 = 0$

d) $f(x) = \frac{3x^2}{2x-1}$, k: $4x - 3y - 21 = 0$

3.180. Wyznacz współrzędne takiego punktu A, że styczna do wykresu funkcji f w punkcie A jest prostopadła do prostej k, jeśli:

a) $f(x) = 3x^2 + x - 2$, k: $x - 5y - 10 = 0$

b) $f(x) = \frac{3-x}{1-x}$, k: $2x + y - 5 = 0$

c) $f(x) = \frac{-2}{x^5}$, k: $x + 10y = 0$

d) $f(x) = \frac{2x^2+3x}{4x+2}$, $k : 2x + 3y - 3 = 0$

3.181. Wykaż, że styczna do paraboli o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2$, poprowadzona w punkcie P o odciętej 2, ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu równym 8.

3.182. Wykaż, że styczna do hiperboli o równaniu $y = \frac{2x-1}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$, poprowadzona w punkcie P o odciętej -2, ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu $20\frac{1}{6}$.

3.183. Oblicz pole trójkąta ograniczonego dodatnimi półosiami układu współrzędnych i tą styczną do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$, która jest prostopadła do prostej o równaniu $2x - y - 3 = 0$.

3.184. Oblicz pole trójkąta ograniczonego ujemnymi półosiami układu współrzędnych i tą styczną do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2-x}{x+2}$, która jest równoległa do prostej o równaniu $4x + y - 11 = 0$.

3.185. Do paraboli o równaniu $y = x^2$ poprowadzono styczną w punkcie o odciętej ujemnej, która wraz z osiami układu współrzędnych ograniczyła trójkąt o polu równym 16. Wyznacz równanie tej stycznej.

3.186. W którym punkcie wykresu funkcji $f(x) = -x^3$ należy poprowadzić styczną do tego wykresu, aby pole trójkąta ograniczonego tą styczną i osiami układu współrzędnych było równe 54?

3.187. W którym punkcie wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$, gdzie $x \neq 0$, należy poprowadzić styczną do tego wykresu, aby pole trójkąta ograniczonego tą styczną i osiami układu współrzędnych było równe $1\frac{1}{8}$?

3.188. Na paraboli o równaniu $y = -x^2 + 2x$ wyznacz taki punkt P, aby styczna do tej paraboli poprowadzona w punkcie P ograniczała, wraz z prostymi o równaniach: $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, trapez o najmniejszym polu.

3.189. Wyznacz wymiary prostokąta o maksymalnym polu powierzchni, którego dwa wierzchołki należą do osi OX, a dwa pozostałe, o rzędnych dodatnich, należą do paraboli o równaniu $y = 3 - \frac{1}{3}x^2$.

3.190. Prosta k: $y = ax +$
na osiach układu współrz
Wyznacz równanie tej pro

3.191. Na paraboli o rów
punktu $A(4, 1)$ jest najmni

3.192. Na gałęzi hiperbol
P, którego odległość od pu

3.193. Rozpatrujemy od
wykresie funkcji $f(x) = -\sqrt{}$
$x \in (0, +\infty)$. Wykaż, że naj

3.194. Na hiperboli o rów
Wyznacz na tej hiperboli t
najmniejsze.

Test sprawdza

1. Trójkąt ABC jest równo
boku BC. Zatem obwód tr

A. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ B. 10

2. Wektory $\vec{u} = [3 + a, a]$ i
A. $a = 0$ i $b = 0$ B. a

3. Pole czworokąta $ABCD$,
A. 54 B. 53

3.190. Prosta k: $y = ax + b$, gdzie $a > 0$, przechodząca przez punkt $P(-1, 2)$, odcina na osiach układu współrzędnych odcinki, których suma długości jest najmniejsza. Wyznacz równanie tej prostej.

3.191. Na paraboli o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2$ wyznacz taki punkt P, którego odległość od punktu $A(4, 1)$ jest najmniejsza.

3.192. Na gałęzi hiperboli o równaniu $y = \frac{8}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$, wyznacz taki punkt P, którego odległość od punktu $A(2, -2)$ jest najmniejsza.

3.193. Rozpatrujemy odcinki równoległe do osi OY, których jeden koniec leży na wykresie funkcji $f(x) = -\sqrt{x}$, zaś drugi koniec na wykresie funkcji $g(x) = \frac{1}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$. Wykaż, że najkrótszy z tych odcinków ma długość $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

3.194. Na hiperboli o równaniu $y = \frac{6}{x}$, gdzie $x \neq 0$, obrano punkty $A(2, 3)$ i $B(6, 1)$. Wyznacz na tej hiperboli taki punkt C o ujemnej odciętej, aby pole trójkąta ABC było najmniejsze.

Test sprawdzający do rozdziału 3.

1. Trójkąt ABC jest równoboczny, w którym $A(-4, 5)$. Punkt $D(-7, 1)$ jest środkiem boku BC. Zatem obwód trójkąta ABC jest równy:

A. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ B. $10\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$.

2. Wektory $\vec{u} = [3 + a, a]$ i $\vec{v} = [b + 1, b]$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

A. $a = 0$ i $b = 0$ B. $a + 3 = b$ C. $a = 3b$ D. $3b + a = 0$.

3. Pole czworokąta $ABCD$, gdzie $A(-5, -2)$, $B(4, 1)$, $C(-2, 8)$, $D(-6, 3)$, jest równe:

A. 54 B. 53 C. D. 51.

4. W trójkącie ABC dane są: $\overrightarrow{AB}=[1,3]$ i $\overrightarrow{CA}=\left[-\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$ oraz $|\sphericalangle BAC|=\alpha$. Wówczas:
A. $\alpha=30^\circ$ B. $\alpha=60^\circ$ C. $\alpha=45^\circ$ D. $\alpha=135^\circ$.

5. Odległość punktu $K(-3, 2)$ od prostej k: $y=\frac{4}{3}x-10\frac{2}{3}$ jest:
A. liczbą niewymierną
B. kwadratem liczby naturalnej
C. liczbą podzielną przez 3
D. iloczynem dwóch liczb pierwszych.

6. Wektor $\vec{u}=[-2, 7]$ jest prostopadły do prostej k. Punkt $A(3, 8)$ należy do prostej k. Zatem:
A. k: $2x-7y+50=0$
B. k: $2x+7y-62=0$
C. k: $7x+2y-37=0$
D. k: $7x-2y-5=0$.

7. Okręgi o równaniach o_1: $x^2+y^2-2y-3=0$ i o_2: $(x-3)^2+(y-3)^2=2$:
A. są styczne zewnętrznie
B. przecinają się
C. są rozłączne zewnętrznie
D. są rozłączne wewnętrznie.

8. Obrazem punktu $P(4, -8)$ w jednokładności o środku $S(-3, -2)$ jest punkt $P_1\left(-5\frac{1}{3}, 0\right)$. Zatem skala tej jednokładności jest równa:
A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{4}$ D $-\frac{2}{3}$.

9. Styczna do paraboli o równaniu $y=\frac{1}{4}x^2+2x+8$ poprowadzona w punkcie o odciętej -2 jest równoległa do prostej o równaniu:
A. $3x+3y+19=0$ B. $2x-2y+15=0$ C. $x+2y=0$ D. $2y-x+7=0$.

10. Kąt ostry utworzony przez proste o równaniach k: $3x-7y-875=0$ i l: $5x+7y-350=0$ ma miarę α taką, że:
A. $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ B. $\alpha\in\left\langle\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ C. $\alpha\in\left\langle\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ D. $\alpha\in\left\langle\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

11. Styczna do okręgu $x^2+y^2=5$ może mieć równanie:
A. $x=5$ B. $2x+y-5=0$ C. $y=-5$ D. $2x+y=\sqrt{5}$.

12. Dwa boki trójkąta ABC zawierają się w prostych: k: $4x-3y=0$ i l: $5x-12y=0$. Dwusieczna kąta trójkąta przy wierzchołku $A(0, 0)$ może mieć równanie:
A. $y=x$ B. $y=\frac{5}{6}x$ C. $y=\frac{3}{4}x$ D. $y=\frac{7}{9}x$.

13. Symetralna odcinka
współczynnik kątowy jes
A. $-0,5$ B. (

14. Punkt K jest środkie
Zatem wektor CK ma wsp
A. $[4, -9]$ B. [

15. Najdłuższy bok AB tr
i $\overrightarrow{CA}=[-3, -3]$. Wobec te
A. $54,5\pi$ B.

16. Promień okręgu o ró
długość:
A. $a+b$ B.

17. Obrazem prostej k:
$k=-0,75$ jest prosta o ró
A. $8x-4y+9=0$ B.

18. Dany jest punkt $E(0,$
odległość od punktu E je
naniu:
A. $y=\frac{1}{9}x^2-1$ B.

19. Odległość między p
i tylko wtedy, gdy:
A. $m=-1$ B.

20. Obrazem okręgu o:
$P((x, y))=(2x-1, 4-2y$
A. $S(3, 4)$, $r=12$ B.

13. Symetralna odcinka PR, gdzie $P(4, 7)$ i $R(-2, 10)$, zawiera się w prostej, której współczynnik kątowy jest równy:

A. $-0{,}5$ B. $0{,}5$ C. 2 D. -2.

14. Punkt K jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, gdzie $A(1, -9)$, $B(7, 6)$, $C(-2, 12)$. Zatem wektor CK ma współrzędne:

A. $[4, -9]$ B. $[-9, 4]$ C. $[4, 9]$ D. $[-4, -9]$.

15. Najdłuższy bok AB trójkąta ABC ma długość $\sqrt{218}$ oraz $\overrightarrow{CB} = [10, -10]$ i $\overrightarrow{CA} = [-3, -3]$. Wobec tego pole koła opisanego na trójkącie ABC wynosi:

A. $54{,}5\pi$ B. 109π C. $\frac{218\pi}{3}$ D. 54π.

16. Promień okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2ax - 4by + 2ab + 3b^2 = 0$, gdzie $a \neq b$, ma długość:

A. $a + b$ B. $a - b$ C. $|a + b|$ D. $|b - a|$.

17. Obrazem prostej k: $2x - y - 3 = 0$ w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali $k = -0{,}75$ jest prosta o równaniu:

A. $8x - 4y + 9 = 0$ B. $y = 2x - 0{,}75$ C. $y = 2x + \frac{3}{4}$ D. $8x - 4y - 9 = 0$.

18. Dany jest punkt $E(0, 2)$ i prosta p: $y = -4$. Wszystkie punkty płaszczyzny, których odległość od punktu E jest równa odległości od prostej p, należą do paraboli o równaniu:

A. $y = \frac{1}{9}x^2 - 1$ B. $y = \frac{2}{15}x^2 - 1$ C. $y = \frac{1}{12}x^2 - 1$ D. $y = \frac{1}{8}x^2 - 1$.

19. Odległość między punktami $A(1 - m, 2)$, $B(3, m + 1)$ jest najmniejsza wtedy i tylko wtedy, gdy:

A. $m = -1$ B. $m = -2$ C. $m = \frac{1}{2}$ D. $m = -\frac{1}{2}$.

20. Obrazem okręgu o: $(x - 2)^2 + y^2 = 3$, w przekształceniu P określonym wzorem $P((x, y)) = (2x - 1, 4 - 2y)$, gdzie $x, y \in \mathbf{R}$, jest okrąg o środku S i promieniu r. Zatem:

A. $S(3, 4)$, $r = 12$ B. $S(2, 0)$, $r = 2\sqrt{3}$ C. $S(3, 4)$, $r = \sqrt{6}$ D. $S(3, 4)$, $r = 2\sqrt{3}$.

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

3.195. W trójkącie ABC dwie wysokości zawierają się w prostych $k\colon x+y-4=0$ oraz $l\colon 2x-y=0$. Wyznacz równania ogólne prostych, w których zawierają się boki tego trójkąta, wiedząc, że $A(0, 2)$.

3.196. Punkt $A(-4, 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC, którego dwie środkowe zawierają się w prostych o równaniach: $x=0$ oraz $x+y-2=0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

3.197. Punkty $A(2, 3)$ i $B(4, -1)$ są dwoma kolejnymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego kwadratu.

3.198. W okrąg o środku $S(6, 4)$ wpisano trójkąt równoboczny ABC, którego jednym z wierzchołków jest punkt $A(2, 6)$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

3.199. W trójkącie ABC współrzędne wierzchołków wynoszą: $A(-2, 1)$, $B(3, 0)$, $C(1, 2)$.
a) Oblicz pole trójkąta ABC.
b) Oblicz długość wysokości trójkąta poprowadzonej na bok BC.
c) Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

3.200. W rombie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie $S(2, -1)$. Dwa kolejne wierzchołki rombu mają współrzędne $A(m, -3)$ oraz $B(m+6, m-5)$, gdzie $m \in \mathbf{R}$. Wyznacz:
a) współrzędne wierzchołków rombu
b) pole rombu
c) cosinus kąta rozwartego rombu
d) równanie okręgu wpisanego w romb $ABCD$.

3.201. Dane są punkty $A(3, 0)$ i $B(-3, 0)$. Wyznacz równanie linii utworzonej przez te wszystkie punkty płaszczyzny, których odległość od punktu A jest 2 razy większa od odległości od punktu B. Jaką figurę geometryczną opisuje ta linia?

3.202. Wykres funkcji $y=|x-2|$ przecina okrąg $o\colon x^2+y^2-4x-4=0$ w punktach A i B.
a) Oblicz współrzędne punktów A i B.
b) Wykaż, że trójkąt ABS, gdzie S jest środkiem danego okręgu, jest prostokątny.
c) Oblicz pole figury $F=F_1 \cap F_2$, jeśli $F_1=\{(x, y)\colon x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge x^2+y^2-4x-4 \le 0\}$, $F_2=\{(x, y)\colon x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge y \le |x-2|\}$.

3.203. Wyznacz wszys
naniu $y=(m-1)x+m$
$S(1, 2)$ i promieniu $r=1$

3.204. Pod jakim kąte

3.205. Styczne do okr
przecinają oś rzędnych
a) Wyznacz równania t
b) Oblicz, z dokładnośc
c) Oblicz współrzędne
d) Oblicz pole trójkąta

3.206. W zbiorze wszy
niu $x^2+y^2=25$ i styczny
o najmniejszym promie

3.207. Wyznacz współr
i $B(3, 8)$ oraz od prostej

3.208. Wyznacz równa
$k\colon x-7y+29=0$ cięciw

***3.209.** Napisz równani
jednocześnie styczny do

***3.210.** Napisz równanie
o długości 16, wiedząc, ż

3.211. Dane są odcinki
taką jednokładność J_S^k, a

3.212. Prosta k o równa
$P(-3, 2)$ przecina dodatn
cie B. Pole trójkąta OAB,
a) Wyznacz równanie kie
b) Prosta m, która jest o
$k=6$, przecina oś OY
$ADCB$.

3.203. Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$), dla których prosta o równaniu $y = (m - 1)x + m + 2$ ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku $S(1, 2)$ i promieniu $r = 1$.

3.204. Pod jakim kątem widać okrąg o: $x^2 + y^2 - 8y + 11 = 0$ z punktu $P(1, 1)$?

3.205. Styczne do okręgu o: $x^2 + (y + 2)^2 = 3{,}2$ poprowadzone przez punkt $A(-2, 1)$ przecinają oś rzędnych w punktach B i C.
a) Wyznacz równania tych stycznych.
b) Oblicz, z dokładnością do $1°$, miarę kąta ostrego, jaki wyznaczają te styczne.
c) Oblicz współrzędne punktów B i C.
d) Oblicz pole trójkąta ABC.

3.206. W zbiorze wszystkich okręgów stycznych zewnętrznie do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 25$ i stycznych jednocześnie do prostej k: $3x - 4y - 50 = 0$ istnieje okrąg o najmniejszym promieniu. Wyznacz jego równanie.

3.207. Wyznacz współrzędne punktu P równoodległego od punktów $A(-9, 2)$ i $B(3, 8)$ oraz od prostej k: $2x - y - 4 = 0$.

3.208. Wyznacz równanie okręgu o środku $S(3, 1)$, który odcina na prostej k: $x - 7y + 29 = 0$ cięciwę o długości $5\sqrt{2}$.

***3.209.** Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A(0, -1)$, który jest jednocześnie styczny do prostych k: $y = 0$ oraz l: $4x - 3y + 22 = 0$.

***3.210.** Napisz równanie okręgu o promieniu $2\sqrt{17}$, który odcina na osi OX cięciwę o długości 16, wiedząc, że do tego okręgu należy punkt $A(-3, 4)$.

3.211. Dane są odcinki AB oraz CD, gdzie $A(3, 1)$, $B(1, 3)$, $C(6, 3)$, $D(3, 6)$. Wyznacz taką jednokładność J_S^k, aby $J_S^k(AB) = CD$.

3.212. Prosta k o równaniu $y = ax + b$, gdzie $a \in (0, 1)$, przechodząca przez punkt $P(-3, 2)$ przecina dodatnią półoś osi OY w punkcie A i ujemną półoś osi OX w punkcie B. Pole trójkąta OAB, gdzie $O(0, 0)$ jest równe 12,5.
a) Wyznacz równanie kierunkowe prostej k.
b) Prosta m, która jest obrazem prostej k w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali $k = 6$, przecina oś OY w punkcie D, zaś oś OX w punkcie C. Oblicz pole trapezu $ADCB$.

3.213. Do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{2-x}{x+4}$ poprowadzono w punkcie A styczną, która jest prostopadła do prostej l: $6x - y + 4 = 0$. Wyznacz współrzędne punktu A.

3.214. Do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 2x - 3$ poprowadzono w punkcie A styczną, która jest równoległa do prostej k: $2x + y + 7 = 0$. Napisz równanie kierunkowe prostej l, która jest prostopadła do tej stycznej i przechodzi przez punkt A.

3.215. Na paraboli o równaniu $y = -\dfrac{1}{4}x^2$ wyznacz taki punkt P, którego odległość od punktu $A(12, 0)$ jest najmniejsza.

3.216. Na gałęzi hiperboli o równaniu $y = \dfrac{2}{x}$, gdzie $x \in (-\infty, 0)$, wyznacz taki punkt P, którego odległość od punktu $A(1, -1)$ jest najmniejsza.

3.217. Na wykresie funkcji określonej wzorem $y = \dfrac{1}{2}x^3$ wyznacz taki punkt P o odciętej dodatniej, którego odległość od punktu $A\left(4, -1\dfrac{1}{2}\right)$ jest najmniejsza.

3.218. Wśród prostokątów, których dwa wierzchołki należą do paraboli o równaniu $y = (x + 3)^2$, zaś dwa pozostałe na prostej k: $y = 4$, znajduje się taki, którego pole jest największe. Oblicz współrzędne wierzchołków tego prostokąta i jego pole.

***3.219.** Do paraboli o równaniu $y = -x^2 - 9$ poprowadzono styczne k i l, które przecinają się w punkcie $A(4, 0)$. Wyznacz:
a) równania stycznych k i l
b) pole trójkąta ABC, gdzie punkty B i C są punktami styczności prostych k i l i paraboli.

***3.220.** Styczna do wykresu funkcji $f(x) = 16x^2 + \dfrac{1}{x}$, gdzie $x \neq 0$, przechodząca przez początek układu współrzędnych ma z parabolą o równaniu $y = 3x^2 + 12x - 12$ dwa punkty wspólne A i B. Napisz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB.