ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 2

12.10.2020

1. Znajdź potęgi naturalne liczby $\mathbf{i}$, czyli wyznacz liczby zespolone postaci $\mathbf{i}^n$ dla wszystkich liczb naturalnych n.
2. Jakie muszą być argumenty liczb zespolonych z, w, różnych od zera, aby:
   (a) iloczyn zw,
   (b) iloraz z/w
   były rzeczywiste?
3. Udowodnij następujące własności sprzężenia liczb zespolonych:
   (a) $\overline{(z\,w)} = \overline{z}\,\overline{w}$,
   (b) $\Re(z) = (z + \overline{z})/2$, $\Im(z) = (z - \overline{z})/2\,\mathbf{i}$.
4. Znajdź moduły liczb zespolonych $z = -2 - 3\,\mathbf{i}$ oraz $z = 1 - \mathbf{i}$.
5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $z, w \in \mathbb{C}$ mamy następujące własności:
   (a) $|z| \geq 0$ i $|z| = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $z = 0$,
   (b) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
   (c) $|z + w| \leq |z| + |w|$,
   (d) $|z - w| \geq ||z| - |w||$.
6. Naszkicuj na płaszczyźnie zbiory liczb $z \in \mathbb{C}$ spełniających nierówności:
   (a) $|z| < 2$, (b) $|z + 3\,\mathbf{i}| < 1$, (c) $|z + 4 - 2\,\mathbf{i}| \leq 3$.
7. Wyznacz postać trygonometryczną następujących liczb zespolonych:
   (a) $-6 + 6\,\mathbf{i}$, (b) $2\,\mathbf{i}$, (c) $1 + \mathbf{i}$.
8. Oblicz:
   (a) $\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$, (b) $\dfrac{2\,\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$, (c) $\dfrac{4-3\,\mathbf{i}}{4+3\,\mathbf{i}}$,
   (d) $\sqrt{-3 - 4\,\mathbf{i}}$, (e) $(2 + \mathbf{i}\,\sqrt{12})^5$, (f) $(1 + \cos\frac{1}{3}\pi + \mathbf{i}\,\sin\frac{1}{3}\pi)^6$,
   (g) $(1 + \mathbf{i})^{10}$, (h) $\left(\dfrac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right)^{26}$, (i) $\dfrac{(1+\mathbf{i})^n}{(1-\mathbf{i})^{n-2}}$, $n \in \mathbb{N}$.
9. Znajdź wszystkie wartości pierwiastków:
   (a) $\sqrt[4]{1}$, (b) $\sqrt[3]{-1}$, (c) $\sqrt[4]{1+\mathbf{i}}$, (d) $\sqrt[3]{2 - 2\,\mathbf{i}}$,
   (e) $\sqrt[6]{-27}$, (f) $\sqrt{3 + 4\,\mathbf{i}}$, (g) $\sqrt[3]{1}$, (h) $\sqrt[3]{\mathbf{i}}$.

   Pokaż ich położenie na płaszczyźnie.
10. Znajdź wszystkie pierwiastki równań:
    (a) $x^5 - 1024 = 0$, (b) $x^4 - \mathbf{i} = 0$, (c) $x^4 + 4 = 0$.
11. Udowodnij równość $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.
12. Niech $a, b, c \in \mathbb{C}$ będą dowolne, $a \neq 0$ i niech $d \in \mathbb{C}$ będzie jednym z pierwiastków $\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$. Udowodnij, że pierwiastki równania $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ są postaci
$$z = \frac{-b \pm d}{2\,a}.$$