

# ANALIZA MATEMATYCZNA

## LISTA ZADAŃ 2

18.10.2021

- Znajdź potęgi naturalne liczby  $\mathbf{i}$ , czyli wyznacz liczby zespolone postaci  $\mathbf{i}^n$  dla wszystkich liczb naturalnych  $n$ .
- Jakie muszą być argumenty liczb zespolonych  $z, w$ , różnych od zera, aby:
  - iloczyn  $zw$ ,
  - iloraz  $z/w$były rzeczywiste?
- Udowodnij następujące własności sprzężenia liczb zespolonych:
  - $\overline{(zw)} = \bar{z}\bar{w}$ ,
  - $\Re(z) = (z + \bar{z})/2$ ,  $\Im(z) = (z - \bar{z})/2\mathbf{i}$ .
- Znajdź moduły liczb zespolonych  $z = -2 - 3\mathbf{i}$  oraz  $z = 1 - \mathbf{i}$ .
- Udowodnij, że dla dowolnych liczb  $z, w \in \mathbb{C}$  mamy następujące własności:
  - $|z| \geq 0$  i  $|z| = 0$  wtedy i tylko wtedy gdy  $z = 0$ ,
  - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ ,
  - $|z + w| \leq |z| + |w|$ ,
  - $|z - w| \geq ||z| - |w||$ .
- Naszczuj na płaszczyźnie zbiory liczb  $z \in \mathbb{C}$  spełniających nierówności:
  - $|z| < 2$ ,
  - $|z + 3\mathbf{i}| < 1$ ,
  - $|z + 4 - 2\mathbf{i}| \leq 3$ .
- Wyznacz postać trygonometryczną następujących liczb zespolonych:
  - $-6 + 6\mathbf{i}$ ,
  - $2\mathbf{i}$ ,
  - $1 + \mathbf{i}$ .
- Oblicz:
  - $\frac{1 + \mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}}$ ,
  - $\frac{2\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}$ ,
  - $\frac{4 - 3\mathbf{i}}{4 + 3\mathbf{i}}$ ,
  - $\sqrt{-3 - 4\mathbf{i}}$ ,
  - $(2 + \mathbf{i}\sqrt{12})^5$ ,
  - $(1 + \cos \frac{1}{3}\pi + \mathbf{i} \sin \frac{1}{3}\pi)^6$ ,
  - $(1 + \mathbf{i})^{10}$ ,
  - $\left(\frac{1 + \mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right)^{26}$ ,
  - $\frac{(1 + \mathbf{i})^n}{(1 - \mathbf{i})^{n-2}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

9. Znajdź wszystkie wartości pierwiastków:

(a)  $\sqrt[4]{1}$ , (b)  $\sqrt[3]{-1}$ , (c)  $\sqrt[4]{1 + \mathbf{i}}$ , (d)  $\sqrt[3]{2 - 2\mathbf{i}}$ ,  
(e)  $\sqrt[6]{-27}$ , (f)  $\sqrt{3 + 4\mathbf{i}}$ , (g)  $\sqrt[3]{1}$ , (h)  $\sqrt[3]{\mathbf{i}}$ .

Pokaż ich położenie na płaszczyźnie.

10. Znajdź wszystkie pierwiastki równań:

(a)  $x^5 - 1024 = 0$ , (b)  $x^4 - \mathbf{i} = 0$ , (c)  $x^4 + 4 = 0$ .

11. Udowodnij równość  $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$ .

12. Niech  $a, b, c \in \mathbb{C}$  będą dowolne,  $a \neq 0$  i niech  $d \in \mathbb{C}$  będzie jednym z pierwiastków  $\sqrt{b^2 - 4ac}$ . Udowodnij, że pierwiastki równania  $az^2 + bz + c = 0$  są postaci

$$z = \frac{-b \pm d}{2a}.$$