ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 4

1.11.2021

1. Udowodnij nierówność Bernoulliego: dla $x \geq 0$ oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi
$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

2. Pokaż, że dla $x > 0$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi
$$(1+x)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

3. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą równości

   (a) $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

   (b) $$\sum_{\substack{k=1 \\ \text{k-nieparzyste}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k\text{-parzyste}}}^{n} \binom{n}{k}.$$

4. Oblicz granice (wsk.: wykorzystaj definicję liczby e):
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

5. Znajdź granice ciągów:
   (a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$, (b) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$.

6. Dla jakich liczb rzeczywistych α istnieje granica
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n + n^\alpha} - \sqrt[3]{n}.$$
   Oblicz granicę dla tych α dla których istnieje.

7. Oblicz granicę:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}.$$

8. Oblicz granice ciągów:
   (a) $a_n = \frac{\sin^2 n}{n}$, (b) $a_n = \sqrt[n]{\log n}$, (c) $a_n = \frac{1}{n^2} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

9. Udowodnij, że jeżeli $a_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ to także $|a_n| \xrightarrow{n\to\infty} |g|$. Pokaż też, że powyższe twierdzenie nie działa w drugą stronę, to znaczy znajdź ciąg $\{a_n\}$ który nie jest zbieżny, chociaż $\{|a_n|\}$ jest zbieżny.

10. Udowodnij, że jeżeli $|a_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ to także $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

11. Udowodnij, że jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny i $a_n \geq 0$, to
$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0.$$

12. Udowodnij, że jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniają $a_n \leq b_n$ i są zbieżne, to
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

13. Pokaż, że jeżeli $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ oraz ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony, to
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

14. Pokaż, że jeżeli $a_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, oraz $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ to
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$$
(granica niewłaściwa).

15. Niech $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}$ oraz $\epsilon = \dfrac{1}{100}$. Znajdź $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geq n_0$ zachodzi $|a_n - 1| < \epsilon$.