

# ANALIZA MATEMATYCZNA

## LISTA ZADAŃ 8

29.11.2021

1. Niech  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ . Korzystając z definicji oblicz  $f'(8)$ .
2. Niech  $f(x) = x^5$ . Korzystając z definicji wyprowadź wzór na  $f'(x)$ .
3. Niech  $n \in \mathbb{N}$ . Dobierz stałe  $a, b, c$  tak, aby funkcja

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & : |x| \geq 1/n, \\ ax^2 + bx + c & : |x| < 1/n \end{cases}$$

była różniczkowalna. Oblicz pochodną  $f'_n(x)$ , naszkicuj wykres funkcji  $f_n(x)$  oraz wykres pochodnej.

4. Oblicz pochodną następujących funkcji. Podaj w jakim zbiorze istnieje pochodna:

- |  |   |
|--|---|
| (a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1,$                                    | (b) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right),$                               |
| (c) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3},$                          | (d) $f(x) = (1 + \sqrt{x})(1 + x^{1/3})(1 + x^{1/4}),$  |
| (e) $f(x) = (x^2 + 1)^4,$                                      | (f) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1},$   |
| (g) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1},$                                | (h) $f(x) = (1 + 2x)^{30},$   |
| (i) $f(x) = \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^{1/3},$             | (j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}},$  |
| (k) $f(x) = 2^{x+3},$  | (l) $f(x) = x10^x,$   |
| (m) $f(x) = \frac{x}{e^x},$                                    | (n) $f(x) = x^2(x + 1)e^x,$   |
| (o) $f(x) = e^x \log x,$                                       | (p) $f(x) = \frac{\log x}{e^x},$  |
| (q) $f(x) = e^{x^2},$  | (r) $f(x) = x^{10} \log x,$   |
| (s) $f(x) = e^{e^x},$  | (t) $f(x) = \log \log x,$   |
| (u) $f(x) = \log_{10}(x - 1),$                                 | (v) $f(x) = 10^{2x-3},$   |
| (w) $f(x) = 2^{3^x},$  | (x) $f(x) = \log_2  \log_3(\log_5 x) ,$   |
| (y) $f(x) = e^{\sqrt{\log x}},$                                | (z) $f(x) = x^{x^2},$   |
| (aa) $f(x) = x^{x^x},$   | (ab) $f(x) = x^{\sqrt{x}},$   |
| (ac) $f(x) = (\log x)^x,$                                      | (ad) $f(x) = e^{-x^2} \log x,$  |
| (ae) $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10},$ | (af) $f(x) = x^5(x^6 - 8)^{1/3},$   |
| (ag) $f(x) = e^{2x+3}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right),$      | (ah) $f(x) = \log \frac{1}{1 + x},$   |
| (ai) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}},$                    | (aj) $f(x) =  x ^3,$  |
| (ak) $f(x) = \operatorname{sgn} x,$                            | (al) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases},$ |

- |   |  |
|---|--|
| (am) $f(x) = e^{- x }$ ,<br>(ao) $f(x) = \{x\}$ ,<br>(aq) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^5 - x^3)$ ,<br>(as) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x < 0, \\ 1 + x & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$<br>(au) $f(x) = (x + e)^{20}$ , | (an) $f(x) = \sqrt{\sqrt{1 + x^2} - 1}$ ,<br>(ap) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 0, \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$<br>(ar) $f(x) = \frac{\pi^{10}}{\pi - e}$ ,<br>(at) $f(x) = x^7 + e^2$ ,<br>(av) $f(x) = e^e$ . |
|---|--|

5. Potrzebna jest kadź w kształcie walca, otwarta od góry, której dno i bok wykonane są z tego samego materiału. Kadź ma mieć pojemność 257 hektolitrow. Jaki powinien być stosunek średnicy dna do wysokości kadzi, aby do jej wykonania zużyć jak najmniej materiału?

6. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji określonej podanym wzorem w podanym przedziale:

- |   |  |
|---|--|
| (a) $f(x) = x^2 + 2x + 21$ , $[-2, 7]$ ,<br>(c) $f(x) =  x + 1  + x^2$ , $[-10, 10]$ ,<br>(e) $f(x) = \log(x) - \frac{x}{10}$ , $[1, e^3]$ ,<br>(g) $f(x) = x^{1/x}$ , $[2, 4]$ , | (b) $f(x) =  x^2 - 1  + 3x$ , $[-2, 2]$ ,<br>(d) $f(x) =  10x - 1  + x^3$ , $[0, 1]$ ,<br>(f) $f(x) =  \sin(x)  + \frac{x}{2}$ , $[0, 2\pi]$ ,<br>(h) $f(x) = 3\sin(x) + \sin(3x)$ , $[0, 2\pi]$ . |
|---|--|

7. Oblicz granice:

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$ ,<br>(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$ ,<br>(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$ ,<br>(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ,<br>(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ ,<br>(k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x) - x + 1}{(x - 1)^2}$ ,<br>(m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}$ , | (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$ ,<br>(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x) + x^2 - 2}{x \sin(x) - x^2}$ ,<br>(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x}$ ,<br>(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{e^x} - e}{x}$ ,<br>(j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x - 1}$ ,<br>(l) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log \log(x)}{x - e}$ ,<br>(n) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 4}{x - 2}$ . |
|---|---|