MATEMATYKA OBLICZENIOWA

LISTA ZADAŃ 5 - UKŁADY LINIOWE

10.01.2022

1. Rozważamy następujący eksperyment mechaniczny przeprowadzony przez Galileusza (Galileo Galilei), kiedy w wolnej chwili badał on spadające ciała. Wyobraźmy sobie, że mamy stół o wysokości 0.778 metra (taki stół miał Galileusz). Na stole umieszczona jest równia pochyła (o ustalonym kącie nachylenia). Galileusz puszczał metalowe kulki po równi pochyłej, zaczynając na wysokości h (pionowej) nad powierzchnią stołu. Kulka staczała się po równi pochyłej, nabierając prędkości, następnie wytaczała się na stół, zamieniając prędkość wzdłuż równi na prędkość poziomą po powierzchni stołu. W końcu wylatywała z krawędzi stołu i spadała na ziemię. Galileusz mierzył poziomą odległość d, jaką przebyła kulka od krawędzi stołu do momentu uderzenia w ziemię. Galileusz (podobno) uzyskał następujące pomiary:

Wysokość startu h (m)	Odległość pozioma d (m)
0.282	0.752
0.564	1.102
0.752	1.248
0.940	1.410

   (a) Stosując metodę najmniejszych kwadratów dopasuj prostą $y = mx + c$ do powyższych danych. Oblicz normę $(\sum(d_i - (mh_i + c))^2)^{1/2}$.
   (b) Znajdź analitycznie wzór na d jako funkcji h (Galileo nie znał zasad dynamiki, nie mógł więc sam tego zrobić).
   (c) Stosując metodę najmniejszych kwadratów dopasuj krzywą $y = m\sqrt{x} + c$ do powyższych danych, i oblicz normę residualną, jak w poprzednim punkcie.
2. Mamy 4 drużyny piłkarskie, którym chcielibyśmy nadać ranking $r_1, \dots r_4$. Znamy wyniki meczów pomiędzy poszczególnymi drużynami, i chcielibyśmy, żeby ranking odzwierciedlał te wyniki, tzn. żeby różnica rankingu $r_i - r_j$ była równa różnicy bramek w meczach. Oznaczmy drużyny T_1, T_2, T_3 i T_4. Wyniki meczów były następujące (tutaj chodzi o futbol amerykański, więc takie wyniki nie są niczym dziwnym).
   - T_1 pokonała T_2 21 do 17,
   - T_3 pokonała T_1 27 do 18,
   - T_1 pokonała T_4 16 do 10,
   - T_3 pokonała T_4 10 do 7,
   - T_2 pokonała T_4 17 do 10.

   Zastosuj metodę najmniejszych kwadratów dla znalezienia rankingów r_i. Zauważ, że rozwiązań jest wiele. Konkretne rozwiązanie można ustalić np. zadając konkretną sumę $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$.
3. W tym ćwiczeniu wykorzystamy bazę danych `mnist_all.mat`, która zawiera ręcznie napisane cyfry. Każda cyfra w bazie zapisane jest w postaci obrazu w odcieniach szarości o rozmiarach 28×28. Cyfry są umiejscowione na obrazku w ten sposób, że środek masy pikseli pokrywa się ze środkiem obrazka. W bazie jest 60000 cyfr *treningowych* i 10000 cyfr *testowych*. Obrazki zapisane są w tablicach `train0,...,train9` oraz

`test0,...,test9`. Wiersz każdej tablicy reprezentuje jeden obraz, i ma $28 \times 28 = 784$ współrzędnych (kolejne wiersze obrazka). Bazę możemy załadować do Matlaba instrukcją `load`. Wiersze można przetworzyć na tablice pikseli instrukcją `tab_pix = reshape(wiersz, 28,28)`. Pomocne mogą być też instrukcje `flipud, rot90`.

- Utwórz macierz T 10 na 784 zawierającą *średnie* cyfry treningowe. Wyświetl te średnie cyfry.
- Najprostszym sposobem identyfikacji cyfry testowej jest porównanie jej pikseli z kolejnymi wierszami T, i znalezienie wiersza najlepiej przybliżającego badaną cyfrę, powiedzmy w 2 normie.