Pierwsza litera nazwiska

Egzamin 1 termin
8.02.22

Nazwisko i imię:

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność jednostajną podanego ciągu funkcyjnego na podanym zbiorze:

$$f_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2}, \ (-\infty, \infty).$$

Rozwiązanie: Ustalmy dowolne x. Mamy

$$f_n(x) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + (\frac{x}{n} + 1)} \to 0.$$

Ciąg funkcyjny jest więc zbieżny do 0 w każdym punkcie. Zauważmy, że

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(-n) = 1.$$

Zbieżność nie jest więc jednostajna na $(-\infty, \infty)$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność całki niewłaściwej (tylko zbieżność):

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{2/3} + x^{5/3}}.$$

Rozwiązanie: Całka ma 2 niewłaściwości, w 0 i w ∞. Rozdzielmy ją więc na dwie całki, po $(0, 1]$ i po $[1, \infty)$. Sprawdźmy zbieżność pierwszej. Ustalmy $\epsilon > 0$.

$$\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^{2/3} + x^{5/3}} \leq \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^{2/3}} = 3 \cdot x^{\frac{1}{3}} \Big|_\epsilon^1 = 3 - 3\sqrt[3]{\epsilon} \leq 3.$$

Ta całka jest więc zbieżna, bo gdy $\epsilon \to 0^+$ całka obcięta jest funkcją rosnącą i ograniczoną. Sprawdźmy zbieżność drugiej całki. Ustalmy $M > 1$.

$$\int_1^M \frac{dx}{x^{2/3} + x^{5/3}} \leq \int_1^M \frac{dx}{x^{5/3}} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{2}{3}} \Big|_1^M = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{M^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{3}{2}.$$

Ta całka też jest zbieżna, podobnie jak poprzednio. Całka obcięta jest funkcją rosnącą M, i ograniczoną. Istnieje więc granica gdy $M \to \infty$. Obie całki niewłaściwe są zbieżne, więc łącznie cała całka też jest zbieżna.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 3. Oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n^2+0}{(3n)^3}+\frac{n^2+1}{(3n+1)^3}+\frac{n^2+2}{(3n+2)^3}+\frac{n^2+3}{(3n+3)^3}+\cdots+\frac{n^2+n}{(4n)^3}\Big).$$

Rozwiązanie: Chcemy zinterpretować ten ciąg jako ciąg sum Riemanna.

$$a_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{n^2+i}{(3n+i)^3}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{1+\frac{i}{n^2}}{(3+\frac{i}{n})^3}.$$

Widać, że wyrażenie $\frac{i}{n^2}$ w liczniku nie pasuje do schematu. Nie są to równo rozmieszczone punkty podziału. Ale zauważmy, że ten składnik ciągu ma granicę 0:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{(3+\frac{i}{n})^3}\le\frac{1}{3^3\cdot n^3}\sum_{i=0}^{n}i=\frac{n(n+1)}{54\,n^3}\to 0.$$

Możemy więc ograniczyć się do ciągu

$$b_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(3+\frac{i}{n})^3}.$$

Zauważamy, że jest to ciąg sum Riemanna (po pominięciu wyrazu $i=0$, który dąży do 0) funkcji $f(x)=frac1(3+x)^3$, przedziału $[0,1]$, podziału jednostajnego $\frac{i}{n}$ i wyboru prawych końców do próbkowania wartości funkcji w przedzialikach. Z twierdzenia o sumach Riemanna mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\int_0^1\frac{dx}{(3+x)^3}=-\frac{1}{2}\,(3+x)^{-2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\frac{1}{9}-\frac{1}{2}\frac{1}{16}=\frac{7}{9\cdot 32}.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 4. Oblicz całkę:

$$\int \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx.$$

Rozwiązanie: Będziemy całkować przez części:

$$\int \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx = \int \arctan(x)\Big(-\frac{1}{x}\Big)'\,dx = -\frac{\arctan(x)}{x} + \int \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

Pozostała nam więc do policzenia całka wymierna. Rozkładamy na ułamki proste:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A + Ax^2 + Bx^2 + Cx}{x(x^2+1)}.$$

Wyliczamy: $A = 1,\ B = -1,\ C = 0$. Dalej:

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

W ostatniej całce zrobiliśmy oczywiste podstawienie $t = x^2 + 1$.

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 5. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2x-1}.$$

Rozwiązanie: Możemy skorzystać z de l'Hospitala, ale możemy też skorzystać z tego, co wiemy o liczbie e. zamieniając $x+2=y$ mamy

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2x-1}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y-5}=\frac{\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{2}}{\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)\right)^{5}}=\frac{e^2}{1^5}=e^2.$$

Pierwsza litera nazwiska

Nazwisko i imię:

Zadanie 6. Znajdź wartości najmniejszą i największą podanej funkcji na podanym przedziale:

$$f(x) = (x-3)^2\, e^{|x|}, \qquad [-1,4].$$

Rozwiązanie: Wiemy, że wartości największa i najmniejsza osiągane są albo na końcach przedziału, albo w punktach nieróżniczkowalności albo w punktach gdzie pochodna jest 0. Znajdźmy punkty w których pochodna jest 0. Dla $x \in [-1,0]$ mamy

$$f(x) = (x-3)^2\, e^{-x} \;\Rightarrow\; f'(x) = 2(x-3)\, e^{-x} - (x-3)^2\, e^{-x} = (x-3)\, e^{-x}(2-(x-3)).$$

Na tym przedziale pochodna nie zeruje się nigdzie. Dla $x \in [0,4]$ mamy

$$f(x) = (x-3)^2\, e^{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = 2(x-3)\, e^{x} + (x-3)^2\, e^{x} = (x-3)\, e^{x}(2+(x-3)).$$

Pochodna zeruje się w punkcie $x = 1$. Mamy więc do rozważenia 4 punkty: -1, 4 (końce), 0 (nieróżniczkowalność) oraz 1 (pochodna 0).

$$f(-1) = 16 \cdot e, \quad f(0) = 9, \quad f(1) = 4 \cdot e, \quad f(4) = e^4.$$

Najmniejszą z tych wartości jest ewidentnie 9, a największą $16e$ lub e^4. Pytanie, co jest większe, 16 czy e^3? Wykonując proste rachunki zauważamy, że $2,7^3 > 19$, a skoro $e > 2,7$ to wartością największą jest e^4.